

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Schrödinger, Erwin:** *Mind and matter.* (The Tarner lectures delivered at Trinity College, Cambridge, in October 1956.) Cambridge: At the University Press 1958. VII, 104 p. 13 s. 6 d.

In this small book the author deals with the fundamental philosophical problem of the relation between mind and matter. He discusses in detail some of its most characteristic aspects and presents his personal ideas as a contribution to the solution of the problem. The reader will find in this book too the clarity and elegance of presentation characterizing the works of Professor Schrödinger. — Table of contents: 1. The physical basis of consciousness, 2. The future of understanding, 3. The principle of objectivation, 4. The arithmetical paradox — the oneness of mind, 5. Science and religion, 6. The mystery of the sensual qualities. *A. Papapetrou.*

**Joja, Ath.: Marx et la logique moderne.** An. Univ. „C. I. Parhon“ București, Ser. Acta logica 1, 7—18 (1958).

**Koursanov, G. A.: A propos du prétendu „critère logique de la vérité“.** An. Univ. „C. I. Parhon“ București, Ser. Acta logica 1, 19—23 (1958).

● **Carnap, Rudolf:** *Introduction to symbolic logic and its applications.* Transl. by William H. Meyer and John Wilkinson. New York: Dover Publications, Inc. 1958. XIV, 241 p. \$ 1.85.

Siehe die Besprechung des deutschen Originals in diesem Zbl. 56, 6.

● **Peano, Giuseppe:** *Opere scelte. Vol. II. Logica matematica. Interlingua ed algebra della grammatica.* Roma: Edizioni Cremonese 1958. VI, 518 p. L. 5000,—.

This second volume (vol. I. see this Zbl. 78, 41) contains the most important of Peano's papers on symbolic logic. (The most important practical application is the paper on differential equations in vol. I.) One finds here definitions of most of the higher operators used in logic, as  $\in$ ,  $\iota$ ,  $\emptyset$  etc. Nonetheless this part is mostly of historical interest, as are the papers on "latin without flexions" as international language. The last paper in the volume, "algebra de grammatica" will be of great interest for those who attempt to build automatic translating machines, it is an attempt to build up the common structure of indogerman grammar as an algebraic calculus. As it stands, it cannot be transposed to other language systems. — Printing and production is excellent, as usual with these memorial volumes.

*H. Guggenheimer.*

**Barker, C. C. H.: Some calculations in logic.** Math. Gaz. 41, 108—111 (1957).

The author considers correspondences between logical operations and certain polynomials and uses the correspondences to obtain some elementary logical theorems. The method is discussed mainly with reference to 2-valued and 3-valued logics.

*A. Rose.*

**Ackermann, Wilhelm:** *Ein typenfreies System der Logik mit ausreichender mathematischer Anwendungsfähigkeit. I.* Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 4, 3—26 (1958).

Die Grundsätze zum typenfreien Aufbau eines Systems der Logik, die Verf. schon in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 28, 100; 36, 147; 50, 245) erklärt und angewendet hat, werden hier weiterentwickelt und zum Aufbau eines möglichst ausdrucksfähigen logischen Systems verwendet. Im Unterschied zu den engeren typenfreien Systemen des Verf. und des Ref., die als widerspruchsfrei nachgewiesen wurden, wird hier auf die nachweisbare Widerspruchsfreiheit verzichtet. Das vorliegende System



ist kombinatorisch vollständig, d. h. es gestattet die uneingeschränkte Anwendung des Komprehensionsaxioms. Dabei ist es unmöglich, zugleich die deduktive Vollständigkeit, d. h. die Existenz eines allgemeinen Deduktionstheorems, in widerspruchsfreier Weise zu erreichen. Das hier angegebene System ist insofern besonders stark, als es einen weitgehenden Ersatz für das Deduktionstheorem liefert, ohne die Grundsätze zu verletzen, die dem Verf. zur Vermeidung von Widersprüchen ausreichend zu sein scheinen. Als Grundzeichen dienen: Variablen (ohne Typenunterscheidung), die aussagenlogischen Operatoren für „nicht“, „und“ und „oder“, das Existenzzeichen, das Gleichheitszeichen, das  $\lambda$ -Symbol (zur Darstellung des Komprehensionsaxioms), das  $\varepsilon$ -Symbol (zur Darstellung des Auswahlaxioms) und das  $\iota$ -Symbol (zur Darstellung des bestimmten Artikels). Eine Generalisierung wird nur in der Gestalt  $\mathfrak{A} \xrightarrow{x \dots u} \mathfrak{B}$  verwendet, nämlich mit der Bedeutung: „Alle  $x, \dots, u$ , die die Eigenschaft  $\mathfrak{A}$  haben, haben auch die Eigenschaft  $\mathfrak{B}$ “. Die „Formeln“ und die „Gegenstandszeichen“ werden als bestimmte Reihen von Grundzeichen simultan definiert. Dabei ergeben sich gemäß dem typenfreien Charakter des Systems sowohl sinnvolle als auch sinnlose Formeln und Gegenstandszeichen. In einer heuristischen Betrachtung wird nun erläutert, nach welchen Leitsätzen gewisse „Ausdrücke“ als sinnvolle Formeln und gewisse „Terme“ als sinnvolle Gegenstandszeichen zu bilden sind. Eine Formel  $\mathfrak{A}$  bzw. ein Gegenstandszeichen  $a$ , in dem keine anderen freien Variablen als  $x, \dots, u$  vorkommen, soll ein Ausdruck bzw. ein Term sein, wenn die Formel  $(Ex) \dots (Eu) (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}})$  bzw.  $(Ex) \dots (Eu) (a = a)$  beweisbar ist. Die Begriffe „Ausdruck“ und „Term“ werden also mit einem formalen Beweisbarkeitsbegriff gekoppelt. Verf. gibt nun nach seinen Grundsätzen ein Axiomensystem für den Beweisbarkeitsbegriff an, das aus besonders einfachen Grundformeln und aus 31 Ableitungsregeln besteht. In diesem Axiomensystem tritt die Beziehung zwischen der Grundverknüpfung  $\xrightarrow{x}$  und dem Ableitbarkeitsbegriff besonders durchsichtig in Erscheinung. — Ein zweites Axiomensystem mit 22 Grundformeln und 10 Ableitungsregeln, das in formaler Hinsicht etwas einfacher ist, wird als äquivalent nachgewiesen

Kurt Schütte.

Nolin, Louis: Sur un système de „déduction naturelle“. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1128—1131 (1958).

L'A. pose les règles d'un système de déduction naturelle  $L$  pour le calcul des propositions, avec antécédents non vides et conséquents constitués par une seule formule. Le système ne comporte pas de schéma pour l'implication; il use d'un schéma de coupure et d'un seul schéma de structure (permutation). Ce système est dit „équivalent dans un certain sens au calcul des propositions classique“, mais l'A. n'explique pas en détail la portée de cette affirmation, ni celle du „théorème fondamental“ qu'il énonce sans démonstration.

R. Feys.

Joja, Ath.: About tertium non datur. An. Univ. „C. I. Parhon“ București. Ser. Acta logica 1, 111—143, russ. und französ. Zusammenfassg. 144—148 (1958).

Fraïssé: La logique des prédicats. Bull. Soc. Sci. Afrique du Nord, Sci. math. phys. Nr. 16, 30—31 (1958).

Kanger, Stig: A note on quantification and modalities. Theoria 23, 133—134 (1957).

Zur Interpretation der Prädikatenlogik mit Modalitäten, die in einer früheren Arbeit des Verf. angegeben ist (dies. Zbl. 81, 11), wird hier neben dem Allquantor  $(x)$  ein schwächerer Allquantor  $(Ux)$  erklärt.  $(Ux)$  schließt sich enger an den Sinn der Redewendung „für alle  $x$ “ an, während sich  $(x)$  auf jede Interpretation von  $x$  bezieht. Für nicht-modales  $Fx$  ist  $(x) Fx$  äquivalent  $(Ux) Fx$ . Für die Modalitäten  $N$  (notwendig) und  $P$  (möglich) sind die Formeln  $(x) N Fx \supset N Fc$  und  $(x) P Fx \supset P Fc$  allgemein gültig, aber nicht die entsprechenden Formeln mit  $(Ux)$  statt  $(x)$ .

Kurt Schütte.



Tuŝugan, Florea: La théorie des rapports logiques entre les jugements de relation et entre les jugements de modalité. An. Univ. „C. I. Parhon“ București, Ser. Acta logica 1, 61—104, russ. und engl. Zusammenfassg. 104—110 (1958).

Dekker, J. C. E. and J. Myhill: Some theorems on classes of recursively enumerable sets. Trans. Amer. math. Soc. 89, 25—59 (1958).

Verff. beweisen eine Reihe von Sätzen über (rekursiv-) aufzählbare (a.), vollständig-aufzählbare (v. a.) und entscheidbare (e.) (= vollständig-rekursive) Klassen von a. Mengen im Sinne von Rice (vgl. auch wegen der Bezeichnungen dies. Zbl. 53, 3). Sie geben u. a. mehrere Beweise des Satzes von Rice (l. c.), daß es keine nicht-triviale e. Klasse gibt, (darunter einen sehr einfachen), sowie verschiedene Verschärfungen dieses Satzes, u. a.: Für jede nichttriviale Klasse  $A$  ist der Unlösbarkeitsgrad im Sinne von Kleene-Post (dies. Zbl. 57, 247) von  $\theta A \geq 0'$ . Weiter bestimmen sie u. a. für die Klasse  $Q$  aller endlichen Mengen den Unlösbarkeitsgrad von  $\theta Q$  zu  $0''$ . Ferner wird die Ricesche key-array-conjecture über v. a. Klassen bewiesen. — Weitere Beweise und Verschärfungen des genannten Satzes von Rice ergeben sich durch Betrachtung von Klassen  $A, B$ , für welche  $\theta A$  und  $\theta B$  nicht durch a. Mengen getrennt werden können, sowie durch eine Topologisierung der Klasse  $F$ . — Ferner werden die Begriffe der Produktivität (vgl. Dekker, dies. Zbl. 64, 10), Kreativität usw. in naheliegender Weise von Mengen auf Klassen übertragen und eine Reihe von Existenzfragen über solche Klassen beantwortet. Hierbei werden u. a. noch folgende interessanten Sätze bewiesen: Der Durchschnitt zweier a. Klassen ist nicht notwendig a. Es gibt abzählbar viele v. a. Klassen  $A$  mit a. Komplement  $F - A$ . — Die Arbeit enthält auch einige Sätze über Mengen, z. B.: Jede produktive Menge besitzt eine rekursive produktive Funktion (vgl. hierzu Dekker, l. c.). Es gibt genau abzählbar viele a., nicht rekursive Mengen, die weder einfach noch semikreativ sind (vgl. Dekker, l. c. und dies. Zbl. 52, 250).

*E. Burger.*

## Algebra und Zahlentheorie.

• Lichnerowicz, A.: Algèbre et analyse linéaires. (Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens). 2ième éd. révisée. Paris: Masson & Cie. 1959. 316 p.

Unveränderte Neuauflage des in diesem Zbl. 31, 2 besprochenen Werkes.

*G. Köthe.*

Neville, E. H.: Partial fractions: Rationalizing the denominator. Math. Gaz. 42, 261—266 (1958).

## Allgemeines. Kombinatorik:

Nanjundiah, T. S.: Remark on a note of P. Turán. Amer. math. Monthly 65, 354 (1958).

Bewiesen wird der Spezialfall  $\mu = \nu$  der allgemeinen, nach der gleichen Methode beweisbaren Formel des Verf.

$$\sum_{r=0}^n \binom{m-\mu+\nu}{r} \binom{n+\mu-\nu}{n-r} \binom{\mu+r}{m+n} = \binom{\mu}{m} \binom{\nu}{n}$$

mit  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\mu, \nu$  beliebig komplex. Der noch engere Spezialfall  $\mu = \nu$   $m = n$  ist die von Turán bewiesene Formel.

*I. Paasche.*

Clarke, L. E. and James Singer: On circular permutations. Amer. math. Monthly 65, 609—610 (1958).

Le problème traité est celui du nombre des permutations circulaires de  $n$  éléments identiques ou différents. Les AA. rectifient une erreur contenue dans un résultat de Wen-Hou Shia (ce Zbl. 77, 19).

*S. Bays.*



Riordan, John: The combinatorial significance of a theorem of Pólya. *J. Soc. industr. appl. Math.* **5**, 225—237 (1957).

On connaît le remarquable travail de G. Pólya (ce Zbl. **17**, 232) sur la détermination du nombre des arbres. A la page 163, Nr. 16, Pólya énonce: „Um die abzählende Potenzreihe der aus dem Figurenvorrat  $[\Phi]$  gebildeten, in bezug auf die Permutationsgruppe  $\mathfrak{S}$  inäquivalenten Konfigurationen zu erhalten, setze man die abzählende Potenzreihe von  $[\Phi]$  in den Zyklenzeiger von  $\mathfrak{S}$  ein“. Après avoir rappelé en quelques pages les notions nécessaires à l'emploi des fonctions génératrices et de l'„indice de cycles“ (Pólya, *ibid.*, p. 157, Nr. 10) — pour les définitions, voir l'analyse de W. Nowacki dans ce Zbl. **17**, 232 — et donné quelques exemples, l'A. énonce le théorème de Pólya en des termes où les fonctions génératrices (enumerators) sont prises sous une forme générale. L'exactitude de la généralisation résulte des conclusions contenues dans deux autres papiers: L. Carlitz and J. Riordan, *Duke math. J.* **23**, 435—446 (1956) et J. Riordan, ce Zbl. **77**, 368. La preuve découle de celle de Pólya et d'un théorème de Frobenius [*J. reine angew. Math.* **101**, 273—299 (1887), p. 287, Nr. 4]: „Ist eine Substitutionsgruppe der Ordnung  $h$  in  $m$  transitive Gruppen zerlegbar, so ist die Summe der Anzahl der Symbole, die in den einzelnen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben, gleich  $h m$ .“ Applications: (i) Coefficients du développement des puissances d'un polynôme, (ii) combinaisons avec répétitions, (iii) permutations circulaires avec répétitions, (iv) dénumérant de Sylvester, (v) partitions „multipartites“. A. Sade.

### Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Zaanen, A. C.: *Lineare Algebra und lineare Vektorräume*. Euclides, Groningen 34, 110—116 (1958) [Holländisch].

Lazarson, T.: The representation problem for independence functions. *J. London math. Soc.* **33**, 21—25 (1958).

H. Whitney (this Zbl. **12**, 4) introduced the concept of abstract (linear) dependence: he replaced vector spaces  $V$  by arbitrary sets  $S$  and the family of linearly independent subsets of  $V$  by a family of subsets of  $S$  obeying certain axioms. Such an “abstract dependence on  $S$ ” is said to be representable over a division ring  $D$  if  $S$  can be embedded in a left vector space over  $D$  in such a way that the abstract and vectorial interpretations of “independent subset  $S$ ” coincide. The author constructs an abstract dependence on a set of 16 elements which is not representable over any  $D$ .

Denote by  $(D, n)$ , where  $n > 2$ , a set of  $2n + 1$  vectors  $e_1, \dots, e_n, u = \sum_{i=1}^n e_i, u - e_1, \dots, u - e_n$ , where the  $e_i$  are a basis of an  $n$ -dimensional left vector space over  $D$ . Then  $S$  is the disjoint union of  $S_1 = (GF(2), 3)$  and  $S_2 = (GF(3), 4)$ , and  $T \subseteq S$  is defined to be independent if, and only if,  $T \cap S_1$  and  $T \cap S_2$  are linearly independent sets in the ordinary sense. The proof rests on the lemma: if  $D$  has characteristic  $p > 0$  and  $(D, pr + 1)$  is representable over  $\Delta$  of characteristic  $q$  then  $q | pr$ . Thus, assuming  $S$  representable over  $\Delta$  we immediately get the conflicting values 2 and 3 for  $q$  by applying the lemma to  $S_1$  and  $S_2$ . G. E. Wall.

• Zurmühl, Rudolf: *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure*. 2. völlig neu bearb. und erweitert. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. XV, 467 S., 76 Abb. Ganzln. DM 33,—.

Die zweite Auflage dieses Buches weist gegenüber der ersten (dies. Zbl. **36**, 149) mancherlei Verbesserungen und Ergänzungen auf, ein Zeichen für die immer noch im Fluß befindliche Entwicklung dieses für den Praktiker so nützlichen Kalküls, auch dafür, daß der Kalkül in den Jahren nach dem Erscheinen der ersten Auflage in zahlreichen Anwendungsgebieten Fuß gefaßt hat. Im einzelnen ist zu bemerken, daß bei der Darstellung der linearen Gleichungssysteme der Gaußsche Algorithmus



entsprechend seiner Bedeutung mehr in den Vordergrund gerückt ist und als Beweismethode benutzt wird. Bei der Behandlung der Eigenwertaufgabe werden die Ergebnisse gleich in voller Allgemeinheit für die Klasse derjenigen Matrizen formuliert, die den Diagonalmatrizen ähnlich sind. Auch der Abschnitt über Schranken von Eigenwerten ist erweitert worden. Einige inzwischen bekannt gewordene numerische Verfahren zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen sind neu aufgenommen worden. Das letzte, von den technischen Anwendungen handelnde Kapitel ist gründlich überarbeitet und beträchtlich erweitert worden. Trotzdem mußte sich der Verf., um den Umfang nicht übermäßig anwachsen zu lassen, darauf beschränken, nur eine Auswahl aus der großen Zahl der in den letzten Jahren veröffentlichten Ergebnisse zu bringen. Auch dem aus Kreisen der Ingenieure geäußerten Verlangen, die Darstellung noch mehr als bisher durch numerische Beispiele aus der Technik zu beleben, wurde in der neuen Auflage Rechnung getragen. — So hat die neue Auflage gegenüber der ersten viele Verbesserungen aufzuweisen, sowohl was das Mathematische betrifft als auch die Anwendung dieses Kalküls. Der Mathematiker mag bei der Lektüre dieses Buches wohl störend empfinden, daß hier fast jedem Satz ein Beispiel aus den Anwendungen folgt, was ein dauerndes Umstellen von der Mathematik auf das gerade in Rede stehende Anwendungsgebiet erfordert. Umgekehrt mag es der Ingenieur als störend empfinden, daß er sich mit ihm zunächst fremden Gedankengängen vertraut machen soll, um eine ihn interessierende Frage beantworten zu können. In seiner neuen Auflage erleichtert das Buch dem Ingenieur das Vertrautwerden mit dem Matrizenkalkül, und derjenige, sei er Mathematiker oder Ingenieur, der einmal irgendwie an diesem Kalkül Gefallen gefunden und seinen Wert erkannt hat, wird dadurch angeregt, sich weiter mit ihm zu beschäftigen, um auf Entdeckungen auszugehen, seien sie abstrakter oder konkreter Art. So wird sich das Buch in der neuen Auflage zu den alten noch viele neue Freunde erwerben und seinen Teil zur mathematischen Bildung der Ingenieure beitragen.

W. Quade.

**Drbohlav, Karel:** Über das Minimum einer gewissen Linearform. Czechosl. math. J. 8 (83), 190—195, dtsh. Zusammenfassg. 196 (1958) [Russisch].

The author considers real  $m \times n$  matrices (denoted by capitals) and defines  $(U, V) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} v_{ij}$ ,  $U \sim V$  if  $\sum_{j=1}^n (u_{ij} - v_{ij}) = 0 = \sum_{i=1}^m (u_{ij} - v_{ij})$  and  $A \geq 0$  if  $a_{ij} \geq 0$ . If  $A \geq 0$  the matrix  $A = (a_{ij})$  is said to be  $K$ -minimal if  $(K, A) \leq (K, X)$  for all  $X \sim A$  and  $X \geq 0$ . The author defines a matrix  $D$  to be reducible if there exists a matrix  $C \neq D$  where the  $c_{ij}$  are integers and  $0 \leq c_{ij} \leq d_{ij}$  or  $0 \geq c_{ij} \geq d_{ij}$ ; otherwise  $D$  is irreducible. If  $F \sim O$ , the zero matrix, then  $F$  may be expressed as a sum of positive multiples of irreducible matrices. This result is used to show that  $A$  is  $K$ -minimal if, and only if,  $(K, C) \geq 0$  for the set of all integer, irreducible  $C$  for which  $C \sim O$  and  $A + \varrho C \geq 0$  for some  $\varrho > 0$ . If  $E_{rs}$  is zero everywhere except for unity in column  $s$  of row  $r$ , let  $\mathfrak{C}_A^{(r,s)}$  (with  $A \geq 0$ ) denote the set of irreducible, integer matrices  $C$  for which  $C \sim -E_{1r} + E_{1s}$  and  $A + \varrho C \geq 0$  for some  $\varrho > 0$ . If  $A$  is also  $K$ -minimal then  $A + \sigma C$  ( $\sigma > 0$ ) is  $K$ -minimal if, and only if,  $(K, C) \leq (K, D)$  for all  $D$  in  $\mathfrak{C}_A^{(r,s)}$ . A method of finding these matrices is given. Finally, if  $B \geq 0$  and the  $b_{ij}$  are rational then a  $U$  can be found such that  $U \sim B$  and  $U$  is  $K$ -minimal.

F. W. Ponting.

**Haimovici, Corina:** Matrizen zweiter Ordnung mit Elementen aus dem Körper der Restklassen mod  $p$ . An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I 4, Nr. 1, 11—19, russ. Zusammenfassg. 19 (1958).

Es werden elementare Bemerkungen zu dem in der Überschrift genannten Gegenstand gemacht. Insbesondere werden die Lösungen  $X$  der Kongruenz  $(1) X^k \equiv A \pmod{p}$  ( $p$  ungerade Primzahl) für ganzzahlige Diagonalmatrizen  $A$ ,  $X$  angegeben. Der triviale Satz, daß jedes derartige  $X$  genau einer Kongruenz der Form  $(1)$  ( $k$  fest)



genügt, wird für  $k = 2$  verifiziert. — Mittels einer Formel von Porcu-Tortrini [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. 7, 206–208 (1928)] wird in Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes die Kongruenz  $A^p \equiv A \pmod{p}$  für jede ganzzahlige  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  bestätigt, deren charakteristisches Polynom  $f(\lambda) \pmod{p}$  in verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Diese Tatsache folgt aber auch unmittelbar daraus, daß dann  $f(\lambda)$  ein Teiler von  $\lambda^p - \lambda$  ist und ist somit offenbar nicht nur auf  $2 \times 2$ -Matrizen beschränkt; sie gilt dann und nur dann, wenn das Minimalpolynom von  $A \pmod{p}$  in (paarweise) verschiedene Linearfaktoren zerfällt, und in diesem Fall ist  $A \pmod{p}$  in die Diagonalform transformierbar (Anm. d. Ref.).

H. J. Hoehnke.

Taussky, Olga: A note on the group commutator of  $A$  and  $A^*$ . J. Washington Acad. Sci. 48, 305 (1958).

$A$  und  $B$  seien komplexe  $n \times n$ -Matrizen,  $AB$  und  $BA$  positiv definit hermitesch,  $A$  vertauschbar mit  $AB - BA$ . Dann ist  $AB = BA$ , wie Verf. mit Hilfe eines Satzes von Putnam und Wintner über die Eigenwerte von  $A^{-1}B^{-1}AB$  zeigt [Proc. Amer. math. Soc. 9, 360–362 (1958)]. Der Sonderfall  $B = A^*$  ist auf anderem Wege schon mehrfach behandelt worden, zuletzt von Kleinecke (dies. Zbl. 79, 129).

H. Wielandt.

Taussky, Olga: On a matrix theorem of A. T. Craig and H. Hotelling. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. 61, 139–141 (1958).

Es seien  $A, B$  reelle, symmetrische  $n \times n$  Matrizen, und es gelte

$$\det(I - \lambda A) \det(I - \mu B) \equiv \det(I - \lambda A - \mu B).$$

Dann gilt  $AB = 0$ . Verf. gibt einen neuen Beweis dafür, indem sie zuerst zeigt, daß  $A, B$  die Eigenschaft  $L$  haben, d. h.: sind  $\alpha_i, \beta_i$  die Eigenwerte von  $A, B$ , mit geeigneter Anordnung, dann hat für beliebige  $\lambda, \mu$   $\lambda A + \mu B$  die Eigenwerte  $\lambda \alpha_i + \mu \beta_i$ ; dann zeigt sie, daß  $AB = BA$  gilt, und endlich  $AB = 0$ .

J. L. Brenner.

Fulton, Curtis M. and Donald A. Norton: Non-existence of fixed subspaces under affine transformations. Math. Z. 70, 52–54 (1958).

Let  $\alpha: Y = AX + C$  be an affine transformation of  $n$ -dimensional Euclidean space ( $X, Y, C$  real column vectors of length  $n$ ,  $A$  a real  $n$ -by- $n$  matrix). The authors prove the equivalence of the following three conditions: (i)  $\alpha$  maps no proper subspace into itself; (ii) the  $n$ -dimensional volume of the polyhedron with vertices  $X, \alpha X, \dots, \alpha^n X$  is a non-zero constant independent of  $X$ ; (iii)  $B = A - I$  is nilpotent and  $B^{n-1}C \neq 0$ . [(ii) is obviously sufficient for (i); the point of interest is that it is also necessary.] The proof is by straightforward matrix methods. G. E. Wall.

Lanczos, C.: Linear systems in self-adjoint form. Amer. math. Monthly 65, 665–679 (1958).

Let  $A$  be an  $n \times m$  matrix, of rank  $p$  and let  $S = \begin{bmatrix} 0 & A \\ \tilde{A} & 0 \end{bmatrix}$ , the tilde denoting transposition. If the scalar  $\lambda_i$  and vector  $u_i$  satisfy  $S u_i = \lambda_i u_i$ , then  $A y_i = \lambda_i x_i$ ,  $\tilde{A} x_i = \lambda_i y_i$  when  $u_i = x_i + y_i$ . Then  $A \tilde{A} x_i = \lambda_i^2 x_i$  and  $\tilde{A} A y_i = \lambda_i^2 y_i$ . The  $p$  vectors  $x_i$  corresponding to the non-zero  $\lambda_i$  may be so chosen that if  $X = (x_1, \dots, x_p)$  then  $\tilde{X} X = I$ , the unit matrix of order  $p$ . The  $m \times p$  matrix  $Y$  (with  $\tilde{Y} Y = I$ ) is obtained similarly. Then  $A = X A \tilde{Y}$  where  $A$  is the  $p \times p$  diagonal matrix  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ . The author points out that the matrix  $Y A^{-1} \tilde{X}$  is Moore's generalized inverse of  $A$ . (See Penrose, this Zbl. 65, 246 and Rado, this Zbl. 71, 247.) Mention is made of the extension of these results to function space.

F. W. Pönting.

Lehti, Raimo: Eine Methode von sukzessiven Projektionen zur Lösung der linearen algebraischen Vektorgleichung und ihre Anwendungen für Inversion von Matrizen. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 21, Nr. 5, 35 S. (1958).



Die genannte Methode ist im Grunde die der Lösung eines linearen Gleichungssystems durch sukzessive Elimination, ausführlich und vollständig dargestellt in Vektoren und Kovektoren über einem beliebigen Schiefkörper. Die praktische Durchführbarkeit wird an Zahlenbeispielen über Schiefkörpern belegt, und es wird die Anzahl der im allgemeinen Fall durchzuführenden Rechenoperationen zur Umkehrung einer Matrix bestimmt.

*H. Reichardt.*

**Krakowski, Fred:** Eigenwerte und Minimalpolynome symmetrischer Matrizen in kommutativen Körpern. *Commentarii math. Helvet.* 32, 224—240 (1958).

Es sei  $K$  ein kommutativer Körper, und  $\Omega$  sei seine algebraisch abgeschlossene Hülle. Verf. behandelt folgende Fragen: Welche Elemente  $\lambda \in \Omega$  treten als Eigenwerte symmetrischer Matrizen über  $K$  auf? Welche Polynome aus  $K[x]$  sind Minimalpolynome symmetrischer Matrizen über  $K$ ? Es wird gezeigt: Die Eigenwerte symmetrischer Matrizen über  $K$  bilden einen Unterkörper  $\Lambda$  von  $\Omega$ , und dieser enthält auch alle Eigenwerte symmetrischer Matrizen über  $\Lambda$ . Ist  $K$  formal reell, so besteht  $\Lambda$  aus allen total reellen Elementen von  $\Omega$ . Ist  $K$  dagegen nicht formal reell, so gilt  $\Lambda = \Omega$ . Ist die Charakteristik von  $K$  von 2 verschieden und  $K$  formal reell, so ist ein Polynom genau dann Minimalpolynom einer symmetrischen Matrix über  $K$ , wenn es lauter verschiedene, total reelle Nullstellen besitzt. Ist  $K$  jedoch nicht formal reell, so sind alle Polynome auch Minimalpolynome symmetrischer Matrizen über  $K$ . Ähnliche Resultate werden für schiefsymmetrische und orthogonale Matrizen gewonnen.

*H.-J. Kowalsky.*

**Bottema, O.:** Zur Stabilitätsfrage bei Eigenwertproblemen. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 61, 501—504 (1958).

Ein von H. R. Schwarz kürzlich angegebenes Stabilitätskriterium (dies. Zbl. 73, 339) dafür, wieviel Eigenwerte einer Matrix in der positiven oder negativen Halbebene liegen, wird hier auf einfacherem direktem Wege bewiesen und auf den Fall ausgedehnt, daß die Koeffizienten der Nebendiagonalen der von Schwarz angegebenen Normalform auch Null sein können.

*R. Zurmühl.*

**Bellman, Richard:** Notes on matrix theory. XV: Multiplicative inequalities obtained from additive inequalities. *Amer. math. Monthly* 65, 693—694 (1958).

Es sei  $A$  eine Matrix,  $x^* x = 1 \Rightarrow x^* A x > 0$  (positiv definit). Dann genügen die Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$  den Ungleichungen

$$(1) \quad \prod_{i=k}^N \lambda_i \geq \prod_{i=k}^N x_{(i)}^* A x_{(i)}, \quad (2) \quad \sum_{i=k}^N \lambda_i \geq \sum_{i=k}^N x_{(i)}^* A x_{(i)},$$

für jedes bestimmte  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , und für orthonormale  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)}$ . Verf. bemerkt nur (und beweist), daß die zwei Ungleichungen nicht gegenseitig unabhängig sind, sondern daß die eine die andere bedingt. Letzteres ist nur eine Eigenschaft von positiven reellen Zahlen.

*J. L. Brenner.*

**Gross, Wolf:** Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica di una matrice. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 24, 497—500 (1958).

The author considers real valued continuous functions  $\varphi(A)$  of a complex  $n$ -by- $n$  matrix  $A$ , which are positive and positive-homogeneous:  $\varphi(A) > 0$  when  $A \neq 0$ ;  $\varphi(kA) = k\varphi(A)$  for all  $A$  and real  $k \geq 0$ . Let  $\mu(A)$ ,  $\varrho(A)$  denote the maximum moduli of the elements of  $A$  and of the charactersitic roots of  $A$  respectively. Then  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(A^r)^{1/r} = \varrho(A)$  and (i)  $p\mu(A) \leq \varphi(A) \leq q\mu(A)$ , (ii)  $\varrho(A) \leq s^{1/r} \varphi(A^r)^{1/r}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), (iii)  $\varphi(AB) \leq t\varphi(A)\varphi(B)$ , where  $p, q, s, t$  are positive constants independent of  $A, B$ . If also  $\varphi(kA) = |k|\varphi(A)$  for all  $A$  and complex  $k$ , then any  $t$  for which (iii) holds is an  $s$  for which (ii) holds. The key result (i) is proved by a simple continuity argument.

*G. E. Wall.*

**Krull, Wolfgang:** Über eine Verallgemeinerung der Hadamardschen Ungleichung. *Arch. der Math.* 9, Festschrift Hellmuth Kneser, 42—45 (1958).



Let  $(g_{ij})$  be an  $n$ -rowed positive definite Hermitian matrix,  $r, s, t$  three disjoint sets of indices chosen from  $1, 2, \dots, n$ . If  $r = \{q_1, \dots, q_r\}, \dots$  write  $|r| = |g_{\alpha\beta}|$  ( $\alpha, \beta = q_1, \dots, q_r$ ),  $\dots$  and  $\left| \begin{smallmatrix} r & s \\ t \end{smallmatrix} \right| = |r \cup s \cup t| \cdot |t| \cdot |r \cup t|^{-1} \cdot |s \cup t|^{-1}$ . The author proves that  $\left| \begin{smallmatrix} r & s \\ t \end{smallmatrix} \right| \leq 1$  and obtains conditions for equality. The recurrence formula  $\left| \begin{smallmatrix} r & s \cup s' \\ t \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} r & s \\ s' \cup t \end{smallmatrix} \right| \cdot \left| \begin{smallmatrix} r & s' \\ t \end{smallmatrix} \right|$ , evident from the definition, reduces the proof to the case where  $r, s$  are single indices; this is then settled by a simple calculation. The inequality for  $t$  empty,  $r \cup s = \{1, 2, \dots\}$  is a known result which at once yields Hadamard's inequality  $g_{11} \dots g_{nn} \geq |g_{ij}|$ . Misprint:  $t_0$  in lines 14, 16, p. 44 should be  $t$ . G. E. Wall.

**Taussky, Olga: A determinantal inequality of H. P. Robertson.** I. J. Washington Acad. Sci. 47, 263—264 (1957).

Sei  $H = A + iB$  eine hermitesche  $n \times n$ -Matrix,  $A$  und  $B$  reell. Verf. beweist: I. Wenn  $H$  positiv definit ist, so ist (1)  $A$  eine positive definite reelle symmetrische Matrix; (2)  $B$  schief-symmetrisch; (3)  $\lambda_p < 1$  für jeden Eigenwert  $\lambda_p$  von  $H$ ; (4) desgleichen  $\lambda_p > -1$ ; (5)  $\det B < \det A$  (dies schon bei H. P. Robertson, dies. Zbl. 10, 228); (6)  $\alpha_p > \beta_p$ , wenn  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$  und  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots$  die Eigenwerte von  $A$  und  $B$  bedeuten; (7)  $\det H < \det A$ , wenn  $B \neq 0$ ; (8) jede symmetrische Grundfunktion der  $\lambda_p$ , abgesehen von der ersten, ist kleiner als die entsprechende Funktion der  $\alpha_p$ , wenn  $B \neq 0$ . II. Umgekehrt reichen die Bedingungen 1, 2, 3 dafür aus, daß  $H$  positiv definit ist. H. Wielandt.

**Marcus, Marvin: On a determinantal inequality.** Amer. math. Monthly 65, 266—269 (1958).

Let  $\lambda_j, \alpha_j, \beta_j$  be the eigenvalue of  $I - A^*B$ ,  $A^*A$  and  $B^*B$  so indexed that  $|\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}|$ ,  $\alpha_j \geq \alpha_{j+1}$ ,  $\beta_j \geq \beta_{j+1}$  for  $j = 1, \dots, n-1$ , where  $A$  and  $B$  are  $n$ -rowed matrices and  $A^*$  denotes the conjugate transpose of  $A$ . The author proves that, if  $\alpha_n \geq 0$ ,  $\beta_n \geq 0$ , then for each  $k$  satisfying  $1 \leq k \leq n$ , we have

$$\prod_{j=1}^k |\lambda_{n-j+1}|^2 \geq \prod_{j=1}^k (1 - \alpha_j)(1 - \beta_j).$$

In case  $k = n$ , the inequality is due to the reviewer.

L. K. Hua.

**Aparo, Enzo: Un criterio di Routh e sua applicazione al calcolo degli zeri di un polinomio.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. VIII. Ser. 25, 26—30 (1958).

Le critère de Routh est utilisé pour trouver la plus grande des parties réelles des racines de l'équation algébrique  $f(z) = 0$ . Un calcul purement algébrique permet de trouver l'équation qui fournit les parties imaginaires correspondantes. On élimine par division les racines ainsi déterminées et l'on continue le processus. Un programme basé sur ce principe a été écrit pour la machine FINAC. J. Kuntzmann.

**Ostrowski, Alexander: Über einige Sätze von Herrn M. Parodi.** Math. Nachr. 19, H. L. Schmid-Gedächtnisband, 331—338 (1958).

In Anlehnung an einen kürzlich von M. Parodi auf matrizentheoretischem Wege bewiesenen Satz (dies. Zbl. 70, 17; 71, 16) behandelt Verf. nachstehende allgemeinere Aufgabe: Für die Klasse  $\mathfrak{K}(\alpha, S)$  aller komplexen Polynome  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  vom Grade  $n$  mit  $|a_1| = \alpha \neq 0$ ;  $|a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = S$  und positiven Konstanten  $\alpha, S$  sollen optimale Schranken  $r_n, r_n^*$  (in Abhängigkeit vom Grade  $n$  und den Konstanten  $\alpha, S$ ) bestimmt werden, derart daß für jedes  $\varrho > r_n$  und  $\varrho^* > r_n^*$  die Kreisgebiete  $|z + a_1| < \varrho$  und  $|z| < \varrho^*$  genau eine bzw. genau  $n-1$  Nullstellen eines jeden Polynoms  $f(z) \in \mathfrak{K}(\alpha, S)$  enthalten. Auf dieses Problem ist der Satz von Rouché anwendbar, wenn auf den Kreisen  $|z + a_1| = \varrho$  bzw.  $|z| = \varrho^*$  die Ungleichung

$$|z + a_1| |z^{n-1}| > |a_2 z^{n-2} + \dots + a_n|$$



besteht. Die Bestimmung der Grenzen  $r_n$  und  $r_n^*$  hängt von den beiden Gleichungen (\*)  $x^2 - \alpha x + S = 0$  und (\*\*)  $x(x - x)^{n-1} - S = 0$  ab. Unter der Annahme  $\alpha > 2\sqrt{S}$  besitzt (\*) zwei verschiedene Wurzeln  $0 < r' < r''$ , unter der Annahme  $(n-1)S < ((n-1)/n)^n \alpha^n$  die Gleichung (\*\*) genau zwei verschiedene Wurzeln  $0 < \varrho'_n < \varrho''_n < \alpha$ . Für die Anwendbarkeit des Satzes von Rouché auf die aufgeworfene Frage ist somit das Zutreffen einer der folgenden drei Fälle notwendig und hinreichend:

$$(A) \quad \alpha > 1 + S, \quad r_n = r'; \quad r_n^* = \alpha - \varrho''_n.$$

$$(B) \quad 1 + S \geq \alpha > 2 \max(1, \sqrt{S}); \quad r_n = r_n^* = r'.$$

$$(C) \quad 1 > ((n-1)/n)^n \alpha^n > (n-1)S; \quad \alpha \leq 1 + S; \quad r_n = \varrho'_n; \quad r_n^* = \alpha - \varrho''_n.$$

Hierin sind insbesondere die Ergebnisse von M. Parodi enthalten. *W. Specht.*

**Gonçalves, J. Vicente:** *Quelques limites pour les modules des zéros d'un polynôme.* Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 6, 83—120 (1957).

Die Nullstellen eines komplexen Polynoms  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  gehören nach A. Cauchy dem Kreisbereich  $|z| \leq R$  an, wenn  $R$  die einzige positive Wurzel der Gleichung  $R^n = |a_1| R^{n-1} + \dots + |a_n|$  bezeichnet. Nach Verf. bilden die positiven Wurzeln  $R_\nu$  der Gleichungen

$$R^\nu - |a_1| R^{\nu-1} - \dots - |a_\nu| = |a_{\nu+1}|^{\nu/(\nu+1)} + |a_{\nu+2}|^{\nu/(\nu+2)} + \dots + |a_n|^{\nu/n}$$

eine absteigende Folge mit dem Endwert  $R_n = R$ , geben also Nullstellenschranken für  $f(z)$ . (Verallgemeinerung eines Ergebnisses von R. D. Carmichael-J. L. Walsh). Setzt man

$$\alpha = |a_m|^{1/m} = \max_{1 \leq \nu \leq n} |a_\nu|^{1/\nu}; \quad \beta = \max_{\mu \neq m} |a_\mu|^{1/\mu}; \quad \delta = \alpha^m - \beta^m,$$

so genügen die beiden Wurzeln  $v_2 > v_1 \geq 0$  der Gleichung  $(v^m - \delta)(v - \beta) = \beta v$  der Ungleichung  $v_1 \leq R \leq v_2$ . (Verbesserung der Schranke  $v = \alpha + \beta$  von E. Westerfield). Setzt man im Falle eines nichtreduzierten Polynoms  $f(z)$

$$\alpha_1 = \left| \frac{a_{k+1}}{a_1} \right|^{1/k} = \max_{1 \leq \nu \leq n-1} \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_1} \right|^{1/\nu}; \quad \beta_1 = \max_{\kappa \neq k} \left| \frac{a_{\kappa+1}}{a_1} \right|^{1/\kappa}; \quad \delta_1 = \alpha_1^k - \beta_1^k,$$

so genügen die beiden Wurzeln  $w_2 > w_1 \geq 0$  der Gleichung

$$(w^{k+1} - |a_1| \delta_1)(w - \beta_1) = |a_1| w^{k+1}$$

der Ungleichung  $w_1 \leq R \leq w_2$ . (Verbesserung der Schranke  $w = |a_1| + \alpha_1$  von Kojima). — Gütevergleich dieser Schranken mit den Nullstellenschranken von M. Fujiwara. — Anwendung der gleichen Methoden auf ähnliche und allgemeinere Fragen im gleichen Gedankenkreis. *W. Specht.*

**Heigl, F.:** *Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen.* Monatsh. Math. 62, 16—55 (1958).

In dieser Arbeit werden für die Beträge der Nullstellen eines reellen oder komplexen Polynoms in der genauen Gestalt  $f(z) = \sum_0^k a_\kappa z^{n-s_\kappa}$  mit  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 a_2 \dots a_k \neq 0$  eine Reihe von Schranken hergeleitet, die von den Beträgen  $|a_\kappa|$  und den Zahlen  $s_\kappa$  sowie von geeignet gewählten weiteren Parametern abhängen und zum Teil Verallgemeinerungen, zum Teil kleine Verfeinerungen von bekannten Schranken darstellen. Für Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden; auf den engen Zusammenhang mit der sehr allgemeinen Schranke von C. F. Cowling und W. J. Thron (Amer. Math. Monthly 61, 682—687 (1954); dies. Zbl. 56, 254) muß hingewiesen werden. Der Arbeit hängt übrigens ein recht ausführliches Literaturverzeichnis zum behandelten Gegenstand an. *W. Specht.*

**Kuipers, L. and G. R. Veldkamp:** *Commentary on a special case of the Gauss-Lucas theorem in the geometry of the zeros of polynomials.* Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. 61, 430—433 (1958).



Es wird eine geometrische Interpretation der Nullstellen von  $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} =$

$$\sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z - z_j} \quad \text{für } p = 3 \text{ gegeben.}$$

*F. Heigl.*

**Schurrer, Augusta:** On the location of the zeros of the derivative of rational functions of distance polynomials. Trans. Amer. math. Soc. 89, 100—112 (1958).

Diese bereits 1952 fertiggestellte Arbeit schließt eng an Untersuchungen von Sz. Nagy (dies. Zbl. 32, 386) und Marden, The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable (dies. Zbl. 38, 153) an. Es werden „Abstandspolynome“  $F(x)$  in  $n$  reellen Variablen eingeführt und rationale Funktionen  $R$  gebildet, deren Zähler und Nenner teilerfremde Produkte von solchen Abstandspolynomen sind. Wenn man die (reellen) Nullstellen der einzelnen Abstandspolynome in gewissen Kugelbereichen eingeschlossen hat, können Aussagen über die Lage der Nullstellen von  $R'$  ( $4 R' = R (V \log R)^2$ ) und von  $R - \lambda^2 R'$  gemacht werden. *W. Gröbner.*

**Greenspan, Donald:** On popular methods and extant problems in the solution of polynomial equations. Math. Mag. 31, 239—253 (1958).

**Clair, Harry S.:** An algebraic method for finding the critical values of the cubic functions. Math. Mag. 32, 31—32 (1958).

**Hoehnke, Hans-Jürgen:** Über komponierbare Formen und konkordante hyperkomplexe Größen. Math. Z. 70, 1—12 (1958).

Let  $\omega_1, \dots, \omega_m$  be a basis of  $\mathfrak{A}$ , an associative algebra with unity  $\varepsilon = \sum e_i \omega_i$  and non-zero discriminant over some commutative field  $\mathfrak{P}$ , and let  $\xi^{(k)} = \sum x_i^{(k)} \omega_i$  be a general member of  $\mathfrak{A}$ . The author considers polynomial forms  $G(x_1, \dots, x_m) = G(\xi)$  which satisfy  $G(\xi^{(1)}) G(\xi^{(2)}) = G(\xi^{(1)} \xi^{(2)})$ , the norm  $N(\xi)$  being such a form. If  $\lambda$  belongs to  $\mathfrak{P}$  and

$$G(\lambda \varepsilon - \xi) = \lambda^n - g_1(\xi) \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n g_n(\xi),$$

let

$$g_k(\xi) = \sum \dots \sum c_{j_1 j_2 \dots j_k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}.$$

If  $c_{(j_1 \dots j_k)} = \sum c_{j_1 \dots j_k}$  summed over all permutations of  $j_1 \dots j_k$  and

$$g_k(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}) = \sum c_{(j_1 \dots j_k)} x_{j_1}^{(1)} \dots x_{j_k}^{(k)}$$

then

$$g_1(\xi^{(1)}) g_1(\xi^{(2)}) = g_2(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) + g_1(\xi^{(1)} \xi^{(2)}),$$

similar results for products of three or four  $g_1(\xi^{(i)})$  are given. If  $\omega_j \omega_k = \sum w_{jk}^i \omega_i$  and  $(d^{hi})$  is the reciprocal of the matrix  $(g_1(\omega_h \omega_i))$  then it is shown that

$$w_{jk}^i + w_{kj}^i = c_j \delta_{ik} + c_k \delta_{ij} - e_i c_{(jk)} + \sum_{h=1}^m d^{ih} c_{(hjk)}.$$

Thus  $\xi \eta + \eta \xi$  and  $2^{i-1} \xi^i$  may be calculated in terms of the coefficients of the forms  $g_1(\xi)$ ,  $g_2(\xi, \eta)$  and  $g_3(\xi, \eta, \zeta)$ . Using Newton's relations between  $g_1(\xi^i)$  and  $g_h(\xi)$ , (provided the characteristic of  $\mathfrak{P}$  does not divide  $k!$ )  $g_k(\xi)$  may be expressed in terms of  $g_1(\xi)$ ,  $g_2(\xi)$  and  $g_3(\xi)$ . Finally the author shows how to apply these results to the problem of whether  $\alpha \beta$  is an integer when  $\alpha$  and  $\beta$  are integers in  $\mathfrak{A}$ .

*F. W. Ponting.*

## Gruppentheorie:

**Belousov, V. D.:** Ableitungsoperationen und Assoziatoren in Loops. Mat. Sbornik, n. Ser. 45 (87), 51—70 (1958) [Russisch].

Die Menge  $M^l$  aller Elemente  $m \in M$ , für die  $m(ab) = (ma)b$  für alle  $a, b \in M$  gilt, heißt ein Linksassoziator einer Quasigruppe  $M$  mit Einselement. Ähnlich wird ein Rechts- resp. Mittelassoziator  $M^r$  resp.  $M^c$  definiert.  $M^l, M^c, M^r$  sind Untergruppen in  $M$ . Sind  $L, C, R$  mit  $M^l, M^c, M^r$  isomorphe Gruppen, so bezeichnet man mit  $(L, C, R)$  den Typ von  $M$ . Sind  $L, C, R$  drei gegebene Gruppen und  $M$  eine beliebige Menge,  $\bar{M} \geq \max\{\bar{L}, \bar{C}, \bar{R}\}$  (wo  $\bar{X}$  die Mächtigkeit einer Menge  $X$  bezeich-



net), dann ist es möglich, auf  $M$  eine Operation zu finden, so daß  $M$  eine Quasigruppe mit Einselement und  $(L, C, R)$  ihr Typ ist. Zwei isotope Quasigruppen mit Einselement haben denselben Typ. Dagegen existieren nichtisotope Quasigruppen mit Einselement, die auf derselben endlichen Menge definiert sind und denselben Typ besitzen. Ist  $M$  eine Quasigruppe, so definieren wir auf der Menge  $M$  eine neue Operation  $\circ : a, b \in M, a \circ b = c$ , wo  $c$  die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung  $(x a) b = x c$  ist. Die Menge  $M$  mit dieser Operation nennen wir eine rechte Ableitung von  $M$  und bezeichnen sie mit  $M_x$ .  $M_x$  ist eine Quasigruppe. Ähnlich ist die linke Ableitung  ${}_x M$  von  $M$  definiert. Quasigruppen  ${}_y(M_x)$  nennen wir gemischte Ableitungen von  $M$ . Abelsche Quasigruppen mit Einselement, die mit allen ihren gemischten Ableitungen isomorph sind, sind Gruppen. F. Šik.

**Etherington, I. M. H.:** Groupoids with additive endomorphisms. Amer. math. Monthly **65**, 596—601 (1958).

If  $G$  is a groupoid and  $f, g: G \rightarrow G$  are functions then  $f + g$  is defined by  $(f + g)(x) = f(x)g(x)$  and  $f \cdot g$  is defined by  $(fg)x = g(f(x))$ . Every word  $W$  in the symbol  $x$  (such as  $x$  or  $(xx)x$ ) defines  $\psi(W): G \rightarrow G$ . If  $U, V$  are words in  $x$  then the word formed by replacing  $x$  in  $V$  by  $U$  shall be denoted  $UV$ . Note that  $\psi(UV) = \psi(U) \cdot \psi(V)$ . The set of all functions  $f: G \rightarrow G$  of the form  $\psi(W)$  is (essentially) the "Logarithmic"  $L$  of  $G$ . Clearly if  $f, g \in L$  so are  $f + g$  and  $f \cdot g$ . The primary concern of the paper is the interplay of  $G$  and  $L$ . For example: If the sum  $f + g$  of any two endomorphisms of  $G$  is an endomorphism then  $\psi(UV) = -\psi(VU)$  for any two words  $U$  and  $V$ ; also every element of  $L$  is an endomorphism of  $G$ : if furthermore  $G$  is generated by a single element then  $L$  is precisely the set of endomorphisms of  $G$ . (As suitable idempotent groupoids show, the author's conjecture that the converse of Theorem 1 (i) is false is true.) S. Stein.

**Hosszú, Miklós:** Über einen Satz von Belousov und über einige Anwendungen desselben. Magyar Tud. Akad., mat. fiz. Tud. Oszt. Közleményei **9**, 51—56 (1959) [Ungarisch].

In § 1 beweist der Verf. den folgenden Satz, den V. D. Belousov in einem Vortrag ohne Beweis ausgesprochen hat [Uspechi mat. Nauk **13**, Nr. 3 (81) 243 (1958)]: Bildet eine Menge  $Q$  unter jeder der vier Operationen ①, ②, ③, ④ je eine Quasigruppe und besteht für beliebige Elementetripel  $x, y, z$  aus  $Q$

$$(1) \quad (x \textcircled{1} y) \textcircled{2} z = x \textcircled{3} (y \textcircled{4} z),$$

dann gibt es eine Gruppe, mit der alle vier genannten Quasigruppen isotop sind. Verf. gibt auch genauer das allgemeine Lösungssystem von (1) an, das etwas einfacher folgenderweise angegeben werden kann,

$x \textcircled{1} y = a^{-1}(fx \cdot gy), x \textcircled{2} y = ax \cdot by, x \textcircled{3} y = fx \cdot dy, x \textcircled{4} y = d^{-1}(gx \cdot by)$ ,  
wo „ $\cdot$ “ eine beliebige Gruppenoperation,  $a, b, d, f, g$  beliebige eindeutig umkehrbare Abbildungen der Menge  $Q$  sind (in der Formel (2) des Verf. stecken Schreibfehler: in  $G$  soll  $h_2 k_1$  statt  $h_2$ , in  $K$  soll  $f_1 g_2$  statt  $f_1 g_1$  stehen). Im § 3 erhält Verf. hieraus die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(x \textcircled{1} y) \textcircled{2} (u \textcircled{3} v) = (x \textcircled{4} u) \textcircled{5} (y \textcircled{6} v)$$

auf Quasigruppen:

$$x \textcircled{1} y = a^{-1}(fx + gy), \quad x \textcircled{2} y = ax + by, \quad x \textcircled{3} y = b^{-1}(hx + ky);$$

$$x \textcircled{4} y = c^{-1}(fx + hy), \quad x \textcircled{5} y = cx + dy, \quad x \textcircled{6} y = d^{-1}(gx + ky),$$

wo  $+$  diesmal eine beliebige abelsche Gruppenoperation ist,  $a, b, c, d, f, g, h, k$  dagegen wieder beliebige eindeutig umkehrbare Abbildungen sind. — In den §§ 2, 3 gibt Verf. auch weitere verschiedene Anwendungen, u. a. auf die Geschlossenheit der sog. Thomsenschen Figur [W. Blaschke-G. Bol, Geometrie der Gewebe (1938; dies. Zbl. **20**, 67) §§ 2, 4]. — Der Beweis der obigen sehr interessanten und wichtigen Sätze, die die Ergebnisse des Verf. (dies. Zbl. **52**, 128, zweite Besprechung, 58, 108) in



überraschend weitgehender Weise verallgemeinern, ist ziemlich einfach und, von einigen leicht auszufüllenden logischen Lücken abgesehen, leicht verständlich.

*J. Aczél.*

**Lefebvre, Pierre:** Demi-groupes admettant des complexes nets à droite minimaux. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 393—396 (1958).

L'A. étudie les demi-groupes admettant des complexes nets à droite minimaux. Il montre que tous ces complexes sont équipotents et que leur existence équivaut à celle d'idéaux à droite minimaux, la réunion des complexes nets à droite minimaux coïncidant alors avec la réunion des idéaux à droite minimaux et constituant un sous-demi-groupe inversif à droite du demi-groupe considéré.

*R. Croisot.*

**Lefebvre, Pierre:** Sur les sous-demi-groupes nets d'un côté, minimaux, d'un demi-groupe. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 173—175 (1959).

L'A. montre que, dans un demi-groupe, les sous-demi-groupes nets à droite minimaux sont aussi des complexes nets à droite minimaux. Pour que le complexe net à droite  $S$  soit un sous-demi-groupe net à droite minimal, il faut et il suffit qu'on ait  $sS = \{s\}$  pour tout  $s \in S$ . Un sous-demi-groupe net à droite minimal est l'ensemble des idempotents d'un idéal à gauche minimal. Pour qu'un demi-groupe contienne des sous-demi-groupes nets à droite minimaux, il faut et il suffit qu'il contienne des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux.

*R. Croisot.*

**Baer, Reinhold:** Die Potenzen einer gruppentheoretischen Eigenschaft. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **22**, 276—294 (1958).

Gegenstand der sehr allgemeinen Untersuchungen vorliegender Arbeit ist eine Klasse  $\mathfrak{E}$  von Gruppen  $\mathfrak{G}$ , die durch eine Gruppeneigenschaft  $e$  unter folgenden Annahmen erklärt ist: (I) Es gibt  $e$ -Gruppen. (II) Epimorphe Bilder von  $e$ -Gruppen sind  $e$ -Gruppen. (III) Besitzen Normalteiler  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$   $e$ -Faktorgruppen  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ , so ist auch  $\mathfrak{G}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$  eine  $e$ -Gruppe. — Zu jeder solchen Gruppeneigenschaft  $e$  lassen sich Potenzen  $e^k$  erklären: (1) Es sei  $e^1 = e$ . (2) Eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist genau dann eine  $e^{k+1}$ -Gruppe, wenn jedes homomorphe Bild  $\bar{\mathfrak{G}} \neq 1$  von  $\mathfrak{G}$  einen Normalteiler  $\bar{\mathfrak{N}} \neq 1$  besitzt, in dem  $\bar{\mathfrak{G}}$  eine  $e^k$ -Gruppe von Automorphismen induziert. — Jede  $e^k$ -Gruppe ist auch eine  $e^{k+1}$ -Gruppe; jede Gruppeneigenschaft  $e^k$  genügt den Forderungen (I—III) und bestimmt eine Gruppenklasse  $\mathfrak{E}^k$ . Die Vereinigung dieser Klasse sei  $\mathfrak{E}^\omega$ ; eine Gruppe ist eine  $e^\omega$ -Gruppe, wenn sie eine  $e^k$ -Gruppe (für einen Exponenten  $k \geq 1$ ) ist. — Eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist obernilpotent, wenn das Zentrum eines jeden homomorphen Bildes  $\bar{\mathfrak{G}} \neq 1$  von  $\mathfrak{G}$  gleichfalls von 1 verschieden ist. Gruppen endlicher Klasse sind obernilpotent. Besitzt ein obernilpotenter Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  eine  $e^k$ -Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ , so ist  $\mathfrak{G}$  eine  $e^{k+1}$ -Gruppe. — Gruppen endlichen Grades werden in folgender Weise erklärt: Die Einheit ist die einzige Gruppe vom Grade 0; eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist genau dann von Grade  $k+1$ , wenn  $\mathfrak{G}$  eine obernilpotente charakteristische Untergruppe  $\mathfrak{C}$  besitzt, deren Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$  vom Grade  $k$  ist. Erweiterungen von Gruppen  $k$ -ten Grades durch  $e^n$ -Gruppen sind  $e^{k+n}$ -Gruppen; Erweiterungen von Gruppen endlichen Grades durch  $e^\omega$ -Gruppen sind  $e^\omega$ -Gruppen. Ist andererseits  $\mathfrak{G}$  eine  $e^{k+1}$ -Gruppe, aber nicht  $e^k$ -Gruppe, ist der Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  maximal unter allen Normalteilern, in denen  $\mathfrak{G}$  eine  $e^k$ -Gruppe von Automorphismen induziert, so ist das Zentrum  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$  von 1 verschieden. — Bezeichnet man eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  als eine  $m$ -Gruppe, wenn ihre Normalteiler die Maximalbedingung erfüllen, so sind folgende Eigenschaften einer  $m$ -Gruppe äquivalent: (1)  $\mathfrak{G}$  ist eine  $e^\omega$ -Gruppe. (2) Ist 1 der einzige abelsche Normalteiler des homomorphen Bildes  $\bar{\mathfrak{G}}$  von  $\mathfrak{G}$ , so ist  $\bar{\mathfrak{G}}$  eine  $e$ -Gruppe. (3) Ist 1 der einzige abelsche Normalteiler des homomorphen Bildes  $\bar{\mathfrak{G}} \neq 1$  von  $\mathfrak{G}$ , so induziert  $\bar{\mathfrak{G}}$  in einem seiner von 1 verschiedenen Normalteiler eine  $e^\omega$ -Gruppe von Automorphismen. (4)  $\mathfrak{G}$  ist eine Erweiterung einer Gruppe endlicher Stufe durch eine  $e$ -Gruppe. (5)  $\mathfrak{G}$  ist eine



Erweiterung einer Gruppe endlichen Grades durch eine  $e$ -Gruppe. (6) Jedes homomorphe Bild  $\bar{\mathfrak{G}} \neq 1$  von  $\mathfrak{G}$  besitzt einen Normalteiler  $\bar{\mathfrak{N}} \neq 1$ , der entweder abelsch ist oder in dem  $\bar{\mathfrak{G}}$  eine  $e$ -Gruppe von Automorphismen induziert. — Für  $m$ -Gruppen ist eine transfinite Fortführung der Definition der Potenzen  $e^\omega$  nicht möglich: Jede  $e^{\omega+1}$ - $m$ -Gruppe ist eine  $e^\omega$ - $m$ -Gruppe. — Bezeichnet  $\mathfrak{N}$  das Kompositum aller Normalteiler endlicher Stufe in  $\mathfrak{G}$ , so ist eine  $m$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  genau dann eine  $e^\omega$ -Gruppe, wenn  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  eine  $e$ -Gruppe ist. Ferner ist eine  $m$ -Gruppe genau dann eine  $e^k$ -Gruppe, wenn sie Erweiterung einer Gruppe vom Grade  $k-1$  durch eine  $e$ -Gruppe ist. — Die Fittingschen Untergruppen  $\mathfrak{F}_k(\mathfrak{G})$  einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  sind folgendermaßen erklärt: Es sei  $\mathfrak{F}_0(\mathfrak{G}) = 1$ ; es sei  $\mathfrak{F}_{k+1}(\mathfrak{G})/\mathfrak{F}_k(\mathfrak{G})$  das Kompositum aller obernalpotenten Normalteiler von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_k(\mathfrak{G})$ . Für  $m$ -Gruppen ist jeder Faktor  $\mathfrak{F}_{k+1}(\mathfrak{G})/\mathfrak{F}_k(\mathfrak{G})$  eine Gruppe endlicher Klasse. Eine  $m$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist genau dann eine  $e^k$ -Gruppe, wenn  $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{k-1}(\mathfrak{G})$  eine  $e$ -Gruppe ist. — Eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist eine  $m'$ -Gruppe, wenn jeder Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  eine  $m$ -Gruppe ist; eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist eine  $n$ -Gruppe (= Noethersche Gruppe), wenn sie die Maximalbedingung für beliebige Untergruppen erfüllt. Jede  $n$ -Gruppe ist eine  $m'$ -Gruppe, jede  $m'$ -Gruppe eine  $m$ -Gruppe. Es gilt: Ist  $\mathfrak{U}$  Normalteiler endlicher Stufe eines Normalteilers  $\mathfrak{N}$  der  $m'$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$ , so ist  $\mathfrak{U}$  in einem Noetherschen Normalteiler endlicher Stufe von  $\mathfrak{G}$  enthalten. Daraus folgt: Jede  $e^\omega$ - $m'$ -Gruppe ist Erweiterung einer Noetherschen Gruppe endlicher Stufe durch eine  $e$ -Gruppe. — Sind  $e$ - $m'$ -Torsionsgruppen endlich, so sind auch  $e^\omega$ - $m'$ -Torsionsgruppen endlich. (Bemerkung des Ref.: Aussagen dieser Gestalt haben neuerdings wieder besondere Bedeutung, nachdem die Burnsidesche Vermutung widerlegt ist!) Genau dann ist jede  $e^\omega$ - $m'$ -Gruppe Erweiterung einer torsionsfreien Gruppe durch eine Torsionsgruppe, wenn jede  $m'$ -Erweiterung einer endlichen auflösbaren Gruppe durch eine  $e$ -Gruppe ohne torsionsfreien Normalteiler eine Torsionsgruppe ist. Weiter gilt der Satz: Es sei jede  $m$ -Erweiterung ohne abelschen Normalteiler einer  $e$ -Gruppe durch eine  $e$ -Gruppe oder eine abelsche Gruppe eine  $e^\omega$ -Gruppe; dann ist jede  $m'$ -Erweiterung einer  $e^\omega$ -Gruppe durch eine  $e^\omega$ -Gruppe gleichfalls eine  $e^\omega$ -Gruppe. — Als  $m_0$ -Gruppe werde jede Gruppe  $\mathfrak{G}$  bezeichnet, deren Normalteiler die Minimalbedingung erfüllen. Der Durchschnitt  $\mathfrak{D}_k(\mathfrak{G})$  aller Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  mit  $e^k$ -Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  ist charakteristisch in  $\mathfrak{G}$ . Die Gruppen  $\mathfrak{D}_k(\mathfrak{G})$  bilden eine absteigende Folge; ihr Durchschnitt  $\mathfrak{D}_\omega(\mathfrak{G})$  ist der Durchschnitt aller Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  mit  $e^\omega$ -Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ . Bei  $m_0$ -Gruppen  $\mathfrak{G}$  ist  $\mathfrak{D}_k(\mathfrak{G})$  der kleinste Normalteiler mit  $e^k$ -Faktorgruppe. Ferner sind die Faktoren  $\mathfrak{D}_k(\mathfrak{G})/\mathfrak{D}_{k+1}(\mathfrak{G})$  obernalpotent. Eine  $m_0$ -Gruppe ist genau dann eine  $e^\omega$ -Gruppe, wenn sie Erweiterung einer Gruppe endlicher Stufe durch eine  $e$ -Gruppe ist. Eine  $m_0$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist also gewiß dann eine  $e^\omega$ -Gruppe, wenn jedes homomorphe Bild  $\bar{\mathfrak{G}} \neq 1$  von  $\mathfrak{G}$  in wenigstens einem Normalteiler  $\bar{\mathfrak{N}} \neq 1$  eine  $e^\omega$ -Gruppe von Automorphismen induziert. — Die bisherigen Aussagen über  $m$ -Gruppen bzw.  $m_0$ -Gruppen können zusammengeführt werden durch die nachfolgenden Ergebnisse der Arbeit: Enthält die  $e^\omega$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  keinen abelschen Normalteiler (außer 1) und kein direktes Produkt unendlich vieler Normalteiler, so ist  $\mathfrak{G}$  eine  $e$ -Gruppe. Daraus folgt: Eine  $e^\omega$ -Gruppe, deren homomorphen Bilder keine direkten Produkte unendlich vieler Normalteiler enthalten, ist Erweiterung einer auflösbaren Gruppe durch eine  $e$ -Gruppe. ( $m$ -Gruppen und  $m_0$ -Gruppen erfüllen die Voraussetzung über Normalteiler.) — Eine Gruppe  $\mathfrak{G}$ , deren abelschen Untergruppen sämtlich endlich erzeugbar sind, ist genau dann eine  $e^\omega$ -Gruppe, wenn sie Erweiterung einer Noetherschen Gruppe endlichen Grades durch eine  $e$ -Gruppe ist. — Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist genau dann eine  $e^\omega$ -Gruppe wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: (a) Jedes homomorphe Bild  $\bar{\mathfrak{G}} \neq 1$  von  $\mathfrak{G}$  besitzt einen Normalteiler  $\bar{\mathfrak{N}} \neq 1$ , in dem  $\bar{\mathfrak{G}}$  eine  $e^\omega$ -Gruppe von Automorphismen induziert. (b)  $\mathfrak{G}$  induziert im Normalteiler  $\mathfrak{N}$  eine  $e^\omega$ -Gruppe von Automorphismen, wenn nur  $\mathfrak{N}$  eine Produkt von Normalteilern von  $\mathfrak{G}$  ist, in denen



$\mathfrak{G}$  eine  $e^\omega$ -Gruppe von Automorphismen induziert. (Die Bedingung (b) ist insbesondere bei  $m$ -Gruppen und  $m_0$ -Gruppen nach Forderung (III) stets erfüllt.)

W. Specht.

**Baer, Reinhold: Lokal Noethersche Gruppen.** Math. Z. 66, 431—363 (1957).

Eine Noethersche Gruppe ist eine Gruppe, deren Untergruppen sämtlich endlich-erzeugbar sind, eine lokal-Noethersche Gruppe eine Gruppe, deren endlichererzeugbare Untergruppen sämtlich Noethersche Gruppen sind. Untergruppen und homomorphe Bilder lokal-Noetherscher Gruppen sind lokal-Noethersch; jede abelsche Gruppe ist lokal-Noethersch. Hingegen sind (im Gegensatz zu einer Eigenschaft der Noetherschen Gruppen) Erweiterungen lokal-Noetherscher Gruppen durch lokal-Noethersche Gruppen nicht immer lokal-Noethersche Gruppen. An Stelle dieser fehlenden Aussage können die folgenden Kriterien treten: (1) Ist die Gruppe  $\mathfrak{G}$  Produkt des lokal-Noetherschen Normalteilers  $\mathfrak{N}$  und der lokal-Noetherschen Untergruppe  $\mathfrak{U}$ , liegt im Durchschnitt  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$  ein Normalteiler  $\mathfrak{D}$  mit lokal-Noetherscher Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ , so ist  $\mathfrak{G}$  selbst lokal-Noethersch. Daher ist jedes Produkt lokal-Noetherscher Normalteiler wieder lokal-Noethersch. (2) Ist für einen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  jedes Kompositum  $\{\mathfrak{N}, G\}$  mit  $G \in \mathfrak{G}$  eine lokal-Noethersche Gruppe, ferner jede endlich-erzeugbare Untergruppe von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  Noethersch und auflösbar, so ist  $\mathfrak{G}$  lokal-Noethersch. — Die Untersuchungen an diesem Gegenstand werden in einem sehr allgemeinen Rahmen durch Betrachtungen über gruppentheoretische Eigenschaften und Teilerbeziehungen geführt, deren Differenziertheit ein Referat auf engem Raum unmöglich macht, so daß hierfür auf die sehr interessante und inhaltsreiche Arbeit selbst verwiesen werden muß.

W. Specht.

**Hsieh, Pang-chieh: Chains of admissible subgroups of groups with operators.** Sci. Sinica 7, 704—715 (1958).

Der Verf. betrachtet die Maximal- und Minimalbedingungen in Gruppen mit Operatoren. Hauptergebnisse:  $\Omega$  sei irgendein Operatorenbereich,  $G$  eine Gruppe mit  $\Omega$  als linkem Operatorenbereich und  $N, N_i (i = 1, \dots, n), G_j (j = 1, \dots, r)$   $\Omega$ -(zulässige) Normalteiler von  $G$ . (1) Die Maximal-(Minimal)bedingung für  $\Omega$ -Untergruppen in  $G$  ist äquivalent mit denjenigen in  $G/N_i (i = 1, \dots, n)$  und  $N = \bigcap_{i=1, \dots, n} N_i$ . (2) Die Maximal-(Minimal)bedingung für  $\Omega$ -Untergruppen in  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r$  (direktes Produkt) ist äquivalent mit denjenigen in  $G_j (j = 1, \dots, r)$ . Überdies werden einige eingehendere Betrachtungen angegeben.

N. Itô.

**Chen, K. T., R. H. Fox and R. C. Lyndon: Free differential calculus. IV: The quotient groups of the lower central series.** Ann. of Math., II. Ser. 68, 81—95 (1958).

(Teil I, II, III, s. dies. Zbl. 50, 256; 55, 17; 73, 254.) Ist  $G_2$  die Kommutatorgruppe von  $G_1$  und  $G_{n+1}$  die Gruppe, die von den Kommutatoren der Elemente von  $G_1$  mit denen von  $G_n$  erzeugt wird, so sind die Faktorgruppen  $Q_n = G_n/G_{n+1}$  endlich erzeugte Abelsche Gruppen, falls  $G_1$  endlichviele Erzeugende besitzt. Es wird ein Algorithmus zur Berechnung von  $Q_n$  aus den Erzeugenden und definierenden Relationen von  $G_1$  angegeben, der auf der Differentiation in freien Gruppenringen nach Fox und einer Normierung der höheren Kommutatorelemente (Klammerausdrücke) in freien Variablenringen beruht. Dabei ergibt sich ein neuer Beweis des Zusammenhangs der Gruppen  $G_n$  mit den Dimensionsgruppen von Magnus für den Fall, daß  $G_1$  eine freie Gruppe ist. Die  $Q_n$  sind in diesem Fall freie Abelsche Gruppen. Die Basis, die der Algorithmus ergibt, ist von der Hall'schen Basis verschieden.

R. Reidemeister.

**Grün, Otto: Automorphismen von Gruppen und Endoisomorphismen freier Gruppen.** Illinois J. Math. 2, Miller Memorial Issue 759—763 (1959).

If the finitely generated group  $G$  is presented as factor group of a free group  $F$  of finite rank by a suitable normal subgroup  $N$ , then every automorphism of  $F$  which maps  $N$  into itself induces an automorphism of  $G$ . The author shows that in general not every automorphism of  $G$  is obtainable in this way, but that every automorphism



of  $G$  is induced by some isoendomorphism of  $F$  which maps  $N$  into itself, provided that  $G$  is not isomorphic to a proper factor group of itself. Assuming this to be true for the free Burnside group of exponent  $m$  the author adds some remarks on its group of automorphisms.

Hanna Neumann.

**Moran, S.: Duals of a verbal subgroup.** J. London math. Soc. **33**, 220—236 (1958); **Corrigendum.** Ibid. **34**, 250 (1959).

Es sei  $f(x_1, \dots, x_n)$  ein Wort in den Symbolen  $x_1, \dots, x_n$  und  $h(u, v)$  ein weiteres Wort in den Symbolen  $u$  und  $v$ . Zu der durch  $f$  gegebenen Wortuntergruppe  $V_f(G)$  der Gruppe  $G$  definiert Verf. zwei zu  $V_f(G)$  bezüglich  $h(u, v)$  duale Untergruppen  $H_f^1(G)$  und  $H_f^2(G)$  von  $G$ :  $H_f^1(G)$  ist die kleinste Untergruppe von  $G$ , die alle Elemente  $y$  aus  $G$  enthält, die den Relationen

$$f(h(x_1, y), \dots, x_n) = \dots = f(x_1, \dots, h(x_n, y)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

für alle Elemente  $x_1, \dots, x_n$  aus  $G$  genügen.  $H_f^2(G)$  wird von den Elementen  $z$  aus  $G$  erzeugt, die für alle  $x_1, \dots, x_n$  aus  $G$  die Bedingung  $h(f(x_1, \dots, x_n), z) = 1$  erfüllen. Drei Spezialfälle sind besonders interessant: 1.  $h(u, v) = uv$  ergibt für  $H_f^1(G)$  die marginale Untergruppe  $M_f(G)$ ; 2.  $h(u, v) = uvu^{-1}v^{-1}$  ergibt für  $H_f^2(G)$  den Zentralisator  $Z_f(G)$  der Wortuntergruppe  $V_f(G)$  in  $G$ ; 3.  $h(u, v) = uvu^{-1}$  führt zu dem neuen Begriff der „invariablen“ Untergruppe  $I_f(G)$ . Es ist  $1 \leq M_f(G) \leq I_f(G) \leq Z_f(G) \leq G$ . Nach dem Vorbild der marginalen Untergruppen werden die Vererbungseigenschaften auch für diese Untergruppen untersucht. Es wird ferner bewiesen, daß für ein freies Produkt  $G$  stets  $Z_f(G) = 1$  ist, außer für ein freies Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnung 2.

W. Kappe.

**Moran, S.: The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the Cartesian subgroup of a free product.** J. London math. Soc. **33**, 237—245 (1958); **Corrigendum.** Ibid. **34**, 250 (1959).

$G$  sei freies Produkt der Gruppen  $G_a$ .  $V(G)$  eine Wortuntergruppe von  $G$  und  $[G_a]^G$  die cartesische Untergruppe von  $G$  (d. i. der von den Kommutatoren  $g_a g_b g_a^{-1} g_b^{-1}$  mit  $g_a \in G_a, g_b \in G_b$  und  $a \neq b$  erzeugte Normalteiler von  $G$ ). Ist  $\Phi$  ein Homomorphismus von  $G$ , so gilt  $(V(G) \cap [G_a]^G) \Phi \leq V(G\Phi) \cap [G_a\Phi]^{G\Phi}$ , und Verf. zeigt durch ein Gegenbeispiel, daß i. a. auf die Gleichheit nicht geschlossen werden kann. Für spezielle Wortuntergruppen — die Kommutatorformen  $f(G)$  — werden zwei cartesische Kommutatorgruppen  $f[G_a^G]$  und  $f[G_a]^G$  definiert und es wird bewiesen, daß  $f[G_a^G] = f(G) \cap [G_a]^G = f[G_a]^G$ . Diese Darstellung für  $f(G) \cap [G_a]^G$  ist mit den Homomorphismen  $\Phi$  von  $G$  vertauschbar:

$$f[G_a \Phi^{G\Phi}] = (f[G_a^G] \Phi, f[G_a \Phi]^{G\Phi} = (f[G_a]^G) \Phi.$$

Die Frage, wann die Durchschnittsbildung  $V(G) \cap [G_a]^G$  mit  $\Phi$  vertauschbar ist, bleibt jedoch auch für Kommutatorformen offen.

W. Kappe.

**Marchionna Tibiletti, Cesarina: Sui prodotti completi contenenti prodotti di gruppi permutabili.** Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **44**, 153—170 (1957).

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren Arbeit der Verf. (dies. Zbl. **77**, 249). Krasner und Kaloujnine haben den Begriff des vollständigen (kompletten) Produktes von Gruppen eingeführt (dies. Zbl. **38**, 162; Definitionen und Bezeichnungen s. dort). In der erwähnten Arbeit der Verf. wurde gezeigt, daß sämtliche faktorisierbaren Gruppen  $G = AB$  ( $A \cap B = 1$ ) (von Isomorphismen abgesehen) Untergruppen des vollständigen Produktes  $\Gamma_{ab} = \Gamma_a \circ B_s$  sind, wo  $\Gamma_a$  die vollständige Permutationsgruppe der Menge  $M_a$  von den Elementen von  $A$ , ferner  $B_s$  die (links) reguläre Gruppe von  $B$  bezeichnet. In dieser Arbeit zeigt Verf., daß man in einigen Fällen ein solches vollständiges Produkt  $\Delta_{ab} = \Delta_a \circ B_s$  konstruieren kann, in dem  $\Delta_a$  eine Untergruppe von  $\Gamma_a$  ist und  $\Delta_{ab}$  sämtliche faktorisierbaren Gruppen  $G = AB$  ( $A \cap B = 1$ ) vom gegebenen Typus enthält. Es gibt Fälle, wo Verf. das engste vollständige Produkt  $\Delta_{ab}$  angeben kann, die die gegebenen faktorisierbaren Gruppen



enthalten. Z. B. im Fall der faktorisierbaren Gruppen  $G = A B$ , wo  $B$  ein Normalteiler in  $G$  ist. Verf. führt diese Untersuchungen auch im Fall der faktorisierbaren Gruppen  $G = A B$  durch, wo der Durchschnitt von  $A$  und  $B$  vom Einselement verschieden ist. S. dazu noch das übernächste Referat. *J. Szép.*

**Marchionna Tibiletti, Cesarina: Immersione in prodotti completi di prodotti ordinati di più gruppi.** Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 44, 233—244 (1957).

Verf. hat sich bisher in mehreren Arbeiten (dies. Zbl. 77, 249 und sowohl die vorstehend, als auch die nachstehend referierte Arbeit) mit dem Problem beschäftigt, ein solches vollständiges Produkt (eingeführt von Krasner und Kaloujnine, dies. Zbl. 38, 162) zu konstruieren, das sämtliche faktorisierbaren Gruppen  $G = A B$  (mit gegebenen  $A, B$  und  $A \cap B = 1$ ) enthält (von Isomorphismen abgesehen). In dieser Arbeit beschäftigt sich Verf. zu ähnlichem Zweck mit einer Verallgemeinerung der faktorisierbaren Gruppen. Verf. nennt eine Gruppe  $G$  geordnetes Produkt der Gruppen  $A_1, A_2, \dots, A_s$ ;  $G = A_1 A_2 \cdots A_s$ , wenn folgende Bedingungen für diese erfüllt sind: 1. die Gruppen  $A_i$  sind Untergruppen von  $G$ . Die Produkte  $G_i = A_i A_{i+1} \cdots A_s$  ( $1 < i \leq s$ ) sind Untergruppen von  $G$  und vertauschbar mit  $A_{i-1}$  und mit  $G_{i-1}$  ( $G_s = A_s$ ;  $G_1 = G$ ), 2.  $G_i \cap A_{i-1} = 1$  ( $i = 2, \dots, s$ ). Das geordnete Produkt  $G = A_1 \cdots A_s$  hat eine normale Kette, wenn  $G_i$  normal in  $G_{i-1}$  ist ( $i = 2, \dots, s$ ), und hat eine Hauptkette, wenn  $G_i$  normal in  $G$  ist. Es bezeichne  $M_i$  die Menge der Elemente von  $A_i$ ,  $\Gamma_i$  die vollständige Substitutionsgruppe von  $M_i$ , ferner  $C_{A_i}$  die (links) reguläre Gruppe von  $A_i$ . Hauptergebnisse: Die geordneten Produkte der Gruppen  $A_1, \dots, A_s$ ;  $G = A_1 \cdots A_s$  sind gewisse Untergruppen des vollständigen Produktes  $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_{s-1} \circ C_{A_s}$ . Haben die Gruppen  $G = A_1 \cdots A_s$  eine normale Kette oder eine Hauptkette, so kann Verf. ein engeres vollständiges Produkt geben, das die entsprechenden geordneten Produkte enthält. *J. Szép.*

**Marchionna Tibiletti, Cesarina: Sui minimi prodotti completi contenenti prodotti di gruppi permutabili.** Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 44, 251—259 (1957).

Diese Arbeit ist eine direkte Fortsetzung der ersten der beiden vorstehend referierten Arbeiten der Verf. Es ist nötig, zuerst einige Begriffe und Ergebnisse der früheren Arbeit bekanntzumachen. Betrachten wir die faktorisierbaren Gruppen  $G = AB$  ( $A \cap B = D$ ), wo  $A, B$  und  $D$  (von Isomorphismen abgesehen) gegeben sind. Es seien  $aD$  die Nebenklassen von  $D$  in  $A$ . Diese Elemente  $a$  (in einer bestimmten Zerlegung) bilden eine Menge  $\bar{M}_a$ . Es sei  $\bar{A}_s$  die Substitutionsgruppe auf  $\bar{M}_a$ , die eine (links) homomorphe Darstellung  $\varrho$  der Gruppe  $A$  gibt. Es sei  $\bar{D}_s$  die Untergruppe von  $\bar{A}_s$ , die der Gruppe  $D$  in dem Homomorphismus  $\varrho$  entspricht. Die Elemente  $g$  von  $G = AB$  kann man in der Form  $g = ab$  aufschreiben, wo  $a \in \bar{M}_a$ ,  $b \in B$  gilt. Multiplizieren wir die Elemente  $g = ab$  von links mit den Elementen  $b'$  von  $B$ :  $b'(ab) = a_b b'$ ; die Substitutionen  $a \rightarrow a_b$  bilden eine Gruppe  $\bar{\Sigma}_B$  (die auf  $\bar{M}_a$  operiert) mit den folgenden Eigenschaften: 1.  $B$  ist antihomomorph zu  $\bar{\Sigma}_B$ . 2.  $\bar{\Sigma}_B$  und  $\bar{A}_s$  sind vertauschbar und bilden eine Gruppe  $\bar{\Sigma}_{AB} = \bar{A}_s \bar{\Sigma}_B$ . 3.  $\bar{\Sigma}_B \cap \bar{A}_s = \bar{D}_s$ . 4. die Substitutionen von  $\bar{\Sigma}_B$  lassen das Element  $a = 1$  ungeändert. Es bezeichne  $S_B$  eine beliebige Substitutionsgruppe (über  $\bar{M}_a$ ), die sämtliche Eigenschaften (für  $\bar{\Sigma}_B$ ) 1—4 befriedige. Es bezeichne  $\Delta_a$  die Vereinigungsgruppe von  $\bar{A}_s$  und von sämtlichen  $S_M$ . Es gilt der folgende Satz: Die obigen Gruppen  $G = AB$  sind (bis auf Isomorphismen) — wo  $A, B$  und  $D$  gegeben sind — gewisse Untergruppen des vollständigen Produktes  $\Delta_{ab} = \Delta_a \circ B_s$ , wo  $B_s$  die (links) reguläre Gruppe von  $B$  ist. Wir kommen jetzt auf die Ergebnisse der gegenwärtigen Arbeit. Es bezeichne  $\bar{\Gamma}_a$  die vollständige Substitutionsgruppe von  $\bar{M}_a$ .  $R$  sei eine Untergruppe von  $\bar{\Gamma}_a$ , die  $\bar{A}_s$  enthält. Hauptergebnisse: 1. Die Gruppe  $\Delta_a$  ist die Vereinigung von gewissen Untergruppen  $R$ . 2. Es seien die Gruppen  $A$  und  $B$  endlich mit Ordnungen  $n_A$  bzw.

$n_B$ , außerdem sei  $\mu$  die Ordnung von  $A \cap B = D$ . Es sei die Gruppe  $B$  eine einfache Gruppe. Dann ist  $A_a$  in einer Gruppe  $\Delta_a^*$  enthalten, wo  $\Delta_a^*$  die Vereinigung derjenigen Untergruppen von  $\Gamma_a$  ist, die die Gruppen  $A_s$  enthalten und außerdem die Ordnung  $n_A n_B / \mu$  haben. So sind die Gruppen  $G = AB$  ( $A \cap B = D$ ) Untergruppen von  $\Delta_{ab}^* = \Delta_a^* \circ B$ . 3. Es sei  $A_s \approx A$ , außerdem sei  $A_s$  ein Normalteiler in den Gruppen  $S_{AB} = \bar{S}_B \bar{A}_s$ , dann ist  $\Delta_{ab} = A_a \circ B_s$  das minimale vollständige Produkt, das die Gruppen  $G = AB$  ( $A \cap B = D$ ) enthält. J. Szép.

**Marchionna Tibiletti, Cesarina:** Una scomposizione del prodotto sghembo di Rédei. Univ. Politec. Torino. Rend. Sem. mat. 17, 209—221 (1958).

L. Rédei hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 40, 299) einen gewissen Typus eines schiefen Produktes eingeführt, das er mit  $G \circ \Gamma$  bezeichnet. Es wird folgendermaßen erklärt: Sind  $G$  und  $\Gamma$  zwei beliebige Gruppen, so besteht  $G \circ \Gamma$  aus den Elementepaaren  $(a, \alpha)$  mit  $a \in G$ ,  $\alpha \in \Gamma$ , zwischen denen eine Produktbildung erklärt ist durch das Multiplikationsgesetz

$$G \circ \Gamma: (a, \alpha) (b, \beta) = (a b^\alpha \beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta).$$

Hierin sind  $b^\alpha, \beta^\alpha \in G$ ,  $a^b, \alpha^b \in \Gamma$  gewisse Funktionen der angegebenen Argumente. Rédei beschränkt sich in seiner Arbeit (in Verbindung mit dem allgemeinen Fall) im wesentlichen auf die Angabe der Bedingungen, unter denen das schiefe Produkt eine Gruppe ist. Man nennt das schiefe Produkt  $k$ -fach ausgeartet, wenn genau  $k$  der vier Relationen  $b^\alpha = b$ ,  $\beta^\alpha = e$ ,  $a^b = e$ ,  $\alpha^b = \alpha$  ( $e$  bzw.  $e$  ist das Einselement von  $G$  bzw.  $\Gamma$ ) identisch erfüllt sind. Den Fall, in dem keine dieser vier Relationen identisch erfüllt ist, nennen wir den nicht-ausgearteten Fall. Im vierfach ausgearteten Fall ist  $G \circ \Gamma$  das direkte Produkt der Gruppen  $G$  und  $\Gamma$ . Es gibt im wesentlichen vier verschiedene zweifach ausgeartete schiefe Produkte, die mit  $G_1 \Gamma$  bis  $G_4 \Gamma$  bezeichnet werden. Eine besondere Rolle spielen die Gruppen  $G_1 \Gamma$  und  $G_2 \Gamma$ , die durch folgende Multiplikationsgesetze definiert werden:

$$G_1 \Gamma: (a, \alpha) (b, \beta) = (a b, a^b \alpha^b \beta), \quad G_2 \Gamma: (a, \alpha) (b, \beta) = (a b^\alpha, \alpha^b \beta).$$

Die Gruppen  $G_1 \Gamma$  sind die Schreierschen Erweiterungen der Gruppe  $\Gamma$  durch die Gruppe  $G$ , während die Gruppen  $G_2 \Gamma$  mit den faktorisierbaren Gruppen — wo der Durchschnitt von  $G$  und  $\Gamma$  das Einselement ist — identisch sind. Diese zwei Fälle stehen schon in der Arbeit von Rédei. Die übrigen zweifach ausgearteten Gruppen, definiert durch die Multiplikationsgesetze

$$G_3 \Gamma: (a, \alpha) (b, \beta) = (a b \beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta), \quad G_4 \Gamma: (a, \alpha) (b, \beta) = (a b^\alpha, a^b \alpha \beta)$$

sind eingehend von R. Kochendörffer (dies. Zbl. 51, 256) untersucht worden. Sie lassen sich beide auffassen als eine zweimalige Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen. Der Fall der einfach ausgearteten Gruppen wurde von F. Rühls erledigt (dies. Zbl. 77, 248). Es gibt im wesentlichen zwei verschiedene einfach ausgeartete schiefe Produkte. Das eine ist durch das Multiplikationsgesetz  $G * \Gamma: (a, \alpha) (b, \beta) = (a b \beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$  definiert und erweist sich als eine zweimalige Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen, während das andere — definiert durch das Multiplikationsgesetz  $G ** \Gamma: (a, \alpha) (b, \beta) = (a b^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$  — eine einfache Schreiersche Erweiterung einer gewissen Untergruppe durch eine faktorisierbare Gruppe (wo der Durchschnitt das Einselement ist) ist. In dieser Arbeit der Verf. ist der nichtausgeartete Fall betrachtet und im wesentlichen erledigt. Der nichtausgeartete Fall ist durch zweimalige Schreiersche Erweiterung und durch eine Faktorisierung herstellbar. Zur genauen Formulierung des Hauptsatzes schicken wir folgendes voraus: 1. Es bezeichne  $G_1$  die durch die Elemente  $\alpha^\beta$  ( $\alpha, \beta \in \Gamma$ ) erzeugte Gruppe, und seien  $a_1, b_1, \dots$  die Elemente von  $G_1$ . 2. Es bezeichne  $\Gamma_1$  die durch die Elemente  $a^b$  ( $a, b \in G$ ) erzeugte Gruppe und seien  $\alpha_1, \beta_1, \dots$  die Elemente von  $\Gamma_1$ . 3. Die Menge  $A_{G, \Gamma_1}$  der Elemente  $(a_1, \alpha_1)$  ist eine Untergruppe des schiefen Produktes  $G \circ \Gamma$ , die das direkte Produkt von zwei Gruppen sind, die mit  $G_1$



bzw.  $\Gamma_1$  isomorph sind. 4. Die Menge  $A_{G\Gamma_1}$  der Elemente  $(a, \alpha_1)$  ist eine Untergruppe von  $G \circ \Gamma$ , für die  $A_{G\Gamma_1}/(e, \Gamma_1) \approx G$  gilt. 5. Die Menge  $A_{G_1\Gamma}$  der Elemente  $(a_1, \alpha)$  ist eine Untergruppe von  $G \circ \Gamma$ , für die  $A_{G_1\Gamma}/(G_1, \varepsilon) \approx \Gamma$  gilt. Hauptergebnis: Das nichtausgeartete Rédeische schiefe Produkt  $G \circ \Gamma$  ist eine faktorisierbare Gruppe mit den Faktoren  $A_{G_1\Gamma}$  und  $A_{G\Gamma_1}$ , für die  $A_{G_1\Gamma} \cap A_{G\Gamma_1} = A_{G_1\Gamma_1} = (G_1, \varepsilon) \times (e, \Gamma_1) \approx G_1 \times \Gamma_1$ .  
 $A_{G\Gamma_1}/(e, \Gamma_1) \approx G$ ,  $A_{G_1\Gamma}/(G_1, \varepsilon) \approx \Gamma$ ,  $A_{G_1\Gamma_1} = (G_1, \varepsilon) \times (e, \Gamma_1) \approx G_1 \times \Gamma_1$ .

Damit ist der Problemkreis des Rédeischen schiefen Produktes in dieser Richtung abgeschlossen. J. Szép.

**Rühs, Fritz:** Über das allgemeine Rédeische schiefe Produkt. J. reine angew. Math. **200**, 99—111 (1958).

Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **77**, 248) den Fall des einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produktes erledigt (für die Begriffe und die Ergebnisse siehe z. B. die vorstehend referierte Arbeit von C. Marchionna Tibiletti). In dieser Arbeit beschäftigt sich Verf. mit dem nichtausgearteten Fall und bekommt einige interessante Teilergebnisse, z. B. wenn die Komponenten Abelsche oder Hamiltonsche Gruppen sind. Die Bekanntgabe dieser Ergebnisse verliert aber gewissermaßen an Bedeutung, weil das allgemeine Problem inzwischen von C. Marchionna Tibiletti (in oben erwähnter Arbeit) erledigt wurde. Verf. geht bei dieser Untersuchung im wesentlichen so vor wie C. Marchionna Tibiletti. J. Szép.

**Cernikov, S. N.:** Über schichtweise endliche Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. **45 (87)**, 415—416 (1958) [Russisch].

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **39**, 13) hat Verf. die Struktur schichtweise-endlicher Gruppen ausführlich untersucht, d. h. der Gruppen, in denen die Mengen der Elemente gleicher Ordnung alle endlich sind. Eine solche Gruppe heißt dünn, wenn alle ihre Sylow-Gruppen endlich sind. Das Ergebnis der vorliegenden Note ist, daß jede dünne schichtweise-endliche Gruppe sich in ein dünnes, schichtweise-endliches direktes Produkt von endlichen Gruppen einbetten läßt. K. A. Hirsch.

**Jakubík, Ján:** Konvexe Ketten in  $l$ -gruppen. Časopis Mat. **84**, 53—63, russ. Zusammenfassg. 63 (1959).

A convex chain  $R$  in a lattice ordered group ( $l$ -group)  $G$  is a subset of  $G$  which is linearly ordered and which satisfies the following property:  $x, y \in R$  and  $x < z < y$  imply  $z \in R$ . The author proves that if  $R$  is a maximal convex chain in  $G$ , then  $R$  is a coset modulo some direct factor of  $G$ . In an archimedean  $l$ -group, if  $r > 0$  and if the interval  $R_0 = (0, r)$  is a chain, there is a direct factor  $R$  of  $G$  such that  $R$  is a chain and contains  $R_0$ . He proves also that if the set  $G^+$  of positive elements of an  $l$ -group  $G$  is a direct product as a lattice, then such a decomposition induces a direct product decomposition of  $G$  as an  $l$ -group. M. Suzuki.

**Curzio, Mario:** Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **12**, 284—289 (1958).

Let  $\varphi(G)$  denote the lattice of all subnormal (composition, or nachinvariant) subgroups of a group  $G$ . The author considers only a solvable group of finite order and proves the following theorems: Theorem 1.  $\varphi(G)$  is a chain if and only if  $G$  is either a cyclic group of prime power order or a group of order  $p^n q^m$  ( $p$  and  $q$  are prime numbers,  $p > q$ ) such that Sylow subgroups are cyclic and the  $p$ -Sylow subgroup coincides with its centralizer. Theorem 2. If  $\varphi(G)$  is isomorphic with  $\varphi(G')$  for some  $p$ -group  $G'$  which is not cyclic,  $G$  has the same order as  $G'$  (and the subgroup lattices of  $G$  and  $G'$  are isomorphic). M. Suzuki.

**Curzio, Mario:** Sui gruppi  $\varphi$  isomorfi ad un gruppo speciale finito. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **24**, 70—75 (1958).

Let  $\varphi(G)$  be the lattice of all subnormal (composition) subgroups of a group  $G$ . The author proves the following: Let  $G'$  be a nilpotent group of finite order and let

$S'_1, S'_2, \dots, S'_t$  be all the Sylow subgroups of  $G'$ . If a solvable group  $G$  satisfies the relation  $\varphi(G) \cong \varphi(G')$ , then  $G$  is finite and is the direct produkt  $S_1 \times \dots \times S_t$  of subgroups  $S_1, \dots, S_t$  such that  $\varphi(S_i) \cong \varphi(S'_i)$  and any two factors  $S_i$  and  $S_j$  have relatively prime orders. The structure of each factor has been determined in a previous paper of the author (see the above review). *M. Suzuki.*

**Ferschl, Franz und Wilfried Nöbauer:** Halbordnungen von endlichen Gruppen. Arch. der Math. 9, 401—406 (1958).

The partial order among finite groups which authors discuss in this paper is the ordering in classes of isomorphic groups (that is, in abstract groups) defined for example by saying  $A \subset B$  if a representative of the class  $A$  is a subgroup of a representative of the class  $B$ . The authors determine the structure of the partly ordered set consisting of all classes containing abelian groups equipped with the above ordering. It is the direct product  $\prod_{t=1}^{\infty} \Omega_t$  where each factor  $\Omega_t$  is isomorphic with the set of all monotone decreasing sequences of natural numbers which end in zeros, the order being defined by componentwise natural order. For any class  $A$  the set of classes satisfying  $X \subset A$  forms a partly ordered set which is the type of  $A$ . The authors determine those classes whose type is a chain. They find also all the classes with types containing at most 6 elements. *M. Suzuki.*

**Blackburn, N.:** On prime-power groups with two generators. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 327—337 (1958).

Die folgenden Sätze über  $p$ -Gruppen  $G$  werden bewiesen: 1. Ist  $G/G'$  vom Typ  $(p^m, p^n)$ , so läßt sich  $G'$  mit höchstens  $(p^m - 1)(p^n - 1)$  Elementen erzeugen. Das  $(p^m + p^n - 1)$ -te Glied der absteigenden Zentralreihe liegt in der Frattini-Gruppe  $\Phi(G')$  von  $G'$ . (Diese Resultate sind bestmöglich.) 2. i) Ist  $p \neq 2$ , so ist  $G$  genau dann metazyklisch (zyklische Erweiterung eines zyklischen Normalteilers), falls  $(G:P(G)) \leq p^2$  ist, wobei  $P(G)$  die von den  $p$ -ten Potenzen erzeugte Untergruppe von  $G$  ist. ii) Ist  $p = 2$ , so ist ein Produkt von zwei zyklischen  $p$ -Gruppen stets metazyklisch. iii) Hat  $G$  höchstens  $p + 1$  Untergruppen vom Index  $p^2$ , so ist  $G$  metazyklisch (gilt für alle  $p$ ). 1. beruht auf einem sehr eingehenden Studium der absteigenden Zentralreihe, 2. zum Teil auf folgendem nützlichen Hilfssatz: Eine  $p$ -Gruppe  $G$  ist genau dann metazyklisch, wenn  $G/G_3\Phi(G')$  metazyklisch ist ( $G_3 =$  drittes Glied der absteigenden Zentralreihe). *B. Huppert.*

**Itô, Noboru:** Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen. Math. Z. 70, 165—173 (1958).

Eine Permutationsgruppe  $G$  heißt  $k$ -fach primitiv, wenn sie  $k$ -fach transitiv ist und die Untergruppen, welche durch das Festbleiben von  $k - 1$  Ziffern definiert sind, auf den restlichen Ziffern noch primitiv sind. Verf. vervollständigt Untersuchungen von H. Wielandt und Ref. (dies. Zbl. 82, 248) durch den Beweis des folgenden Satzes: Satz 1. Ein nichtregulärer Normalteiler einer  $k$ -fach transitiven Permutationsgruppe, welche nicht die symmetrische ist, ist für  $k \geq 3$  stets  $(k - 1)$ -fach primitiv. (Für  $k = 2$  gibt es Ausnahmen.) Der Beweis des Satzes für  $k = 3$  beruht auf Satz 2 (s. u.), für  $k > 3$  ergibt eine einfache Induktion dann den Satz. Satz 2.  $G$  sei dreifach transitiv vom Grad  $n + 1$ , aber nicht die symmetrische Gruppe.  $N$  sei ein einfacher Normalteiler von  $G$  der Ordnung  $(n + 1)(n - 1)n/t$  mit  $t < n - 1$ , und kein Element von  $N$  (außer 1) lasse mehr als zwei Ziffern fest. Dann ist  $t \leq 2$ . Der Beweis von Satz 2 wird durch eine komplizierte, äußerst geschickte Abzählung der Involutionen von  $N$  geführt. *B. Huppert.*

**Miller, Donald W.:** On a theorem of Hölder. Amer. math. Monthly 65, 252—254 (1958).

A well-known result, due to Hölder is the following: the symmetric group  $S_n$  has outer automorphisms if and only if  $n = 6$ . The author gives a direct method



for constructing an outer automorphism  $\theta$  of  $S_6$ . Moreover, since the group,  $\mathfrak{J}$ , of inner automorphisms of  $S_6$  has index 2 in the full automorphism group, it follows that the right coset  $\mathfrak{J}\theta$  includes all outer automorphisms of  $S_6$ . *P. Braunfeld.*

**Dickinson, D. J.:** On Fletcher's paper „Campanological groups“. *Amer. math. Monthly* **64**, 331—332 (1957).

L'A., se référant à un article de Fletcher dans le problème des carillons de cloches (ce Zbl. **73**, 258), améliore une preuve de Thompson sur le sujet. Cette amélioration cherchée par Thomson et Fletcher, dérive d'un théorème de Rankin (ce Zbl. **30**, 106) qui établit un résultat plus général, dont l'application par l'A. est un cas particulier. *S. Bays.*

**Ono, Tamio:** An analytical proof of the fundamental theorem on finite abelian groups. *Proc. Japan. Acad.* **33**, 587 (1957).

Beweis des Fundamentalsatzes mit Hilfe des Gruppenringes über den komplexen Zahlen und der regulären Darstellung. *H. Leptin.*

**Belov, N. V., N. N. Neronova and T. S. Smirnova:** Shubnikov groups. *Kristallografija* **2**, 315—325, engl. Zusammenfassg. 315 (1957) [Russisch].

Dieselben Verff. haben früher (dies. Zbl. **66**, 278) die Methoden angegeben, um die sogenannten zweifarbigen Raumgruppen herzuleiten. Sie haben, in Übereinstimmung mit A. M. Zamorzaev (Diss. Leningrad 1953), deren 1651 gefunden, die sie nach Šubnikov benennen. In vorliegender Arbeit werden diese Šubnikov-Gruppen mittels eines sie eindeutig charakterisierenden Symbols beschrieben, das eine Verallgemeinerung der Hermann-Mauginschen Bezeichnung der 230 Raumgruppen darstellt. *J. J. Burckhardt.*

**Hua, Loo-keng:** A subgroup of the orthogonal group with respect to an indefinite quadratic form. *Science Record, n. Ser.* **2**, 329—331 (1958).

In this note the author considers the orthogonal group  $O_n(F, A)$  over  $F$  with respect to the indefinite quadratic form

$$x'Ax = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \cdots - x_{l+m}^2,$$

$F$  being a field with characteristic  $\neq 2$ . The matrices of  $O_n(F, A)$  are written as  $\Gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  with  $A = A^{(l)}$ ,  $B = B^{(l, m)}$ ,  $C = C^{(m, l)}$ ,  $D = D^{(m)}$ . The author proves that the matrices  $\Gamma$  for which  $\det A$  is a sum of squares of elements of  $F$  form a normal subgroup of  $O_n(F, A)$ . The same is true for the matrices for which  $\det A$  and  $\det D$  are sums of squares. *J. H. van Lint.*

**Landin, Joseph and Irving Reiner:** Automorphisms of the Gaussian unimodular group. *Trans. Amer. math. Soc.* **87**, 76—89 (1958).

Für die Gruppe  $\mathfrak{G}_n$  aller  $n$ -reihigen unimodularen Matrizen über dem Ring der Gaußschen ganzen Zahlen wird die volle Automorphismengruppe  $\mathfrak{A}_n$  durch Angabe eines vollständigen Erzeugendensystems bestimmt unter Anwendung einer auf die Untersuchung der Involutionen in der Gruppe  $\mathfrak{G}_n$  sich stützenden, vorwiegend rechnerischen Methode, die nach Erledigung der Fälle  $n = 2, 3$  eine induktive Behandlung der Aufgabe gestattet. [Vgl. J. Landin and I. Reiner, *Ann. of Math.*, II. Ser. **65**, 519—526 (1957).] *W. Specht.*

**Makar, Ragy H.:** On the analysis of the representations of the linear group of dimension 2. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **61**, 475—479 (1958).

The binary analysis of the plethysm  $\{m\} \otimes \{v\}$ , ( $v$ ) being a partition of 5, is given without any restriction on the size of the parts. Makar and Missiha (this Zbl. **80**, 22) found the coefficients of  $\{5m - k - r, k, r\}$  in  $\{m\} \otimes \{v\}$  only for  $k \leq m$ . These results are used here and the coefficient of  $\{5m - k, k\}$  for  $k > m$  is obtained by the use of Foulkes differential operators, the cases  $\{4m - k, m + k\}$  and  $\{3m - k, 2m + k\}$  needing separate treatment. Tables are given for the coefficients of  $\{5m - k, k\}$  for  $m \leq 8$ . *F. W. Ponting.*

**Hangan, T.:** Équations aux dérivées partielles satisfaites par les transformations du groupe projectif ou conforme. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 19, 33—37, russ. und französ. Zusammenfassg. 37 (1958) [Rumänisch].

Le groupe projectif et le groupe conforme satisfont à certaines équations aux dérivées partielles. Le Ref. a démontré cela en utilisant des transformations particulières dans lesquelles se décompose un de ces groupes. L'A. donne des démonstrations en partant de la forme générale de ces groupes. Dans le cas du groupe projectif

$$x^i = \varphi^i / \varphi^0 \quad (\varphi^\alpha = a_i^\alpha x^i + a_0^\alpha x; \alpha = 0, 1, \dots, n)$$

l'A. montre que le déterminant fonctionnel  $\Delta = |\partial x^i / \partial x^j|$  est donné par la formule  $\Delta = D / (\varphi^0)^{n+1}$  où  $D$  est le déterminant des  $n+1$  formes  $\varphi^\alpha$  ce qui conduit facilement aux équations

$$(1) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j}.$$

Des considérations analogues sont valables pour le groupe conforme dont les transformations satisfont à des formules analogues aux (1) avec la différence que  $\Delta = -[(x^r)^2]^{-n}$  et qu'au lieu de  $n+1$  nous avons  $n$  et nous avons dans le second membre le terme complémentaire  $-\frac{\delta_k^i}{n} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j}$ . G. Vranceanu.

**Stoka, Marius I.:** Sur les groupes  $G_r$  mesurables du plan. Acad. Republ. popul. Romîne. Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 9, 341—380, russ. und französ. Zusammenfassg. 379—380 (1957) [Rumänisch].

On montre que: un groupe de Lie local  $G_r$ , opérant analytiquement dans l'espace numérique  $R^2$ , admet un invariant intégral d'ordre 2 si et seulement si les constantes de structure  $c_{jk}^i$  et les coefficients  $\xi_h^i$  des transformations infinitésimales de  $G_r$  satisfont aux formules

$$c_{\alpha\beta}^l A_{lh} + c_{h\alpha}^l A_{l\beta} + c_{\beta h}^l A_{l\alpha} = 0, \quad A_{lh} = \begin{vmatrix} \xi_h^1 & \xi_h^2 \\ \xi_h^1 & \xi_h^2 \end{vmatrix},$$

pour toute paire d'indice  $\alpha, \beta$  pour laquelle  $A_{\alpha\beta} \neq 0$ . En particulier, tout groupe  $G_3$  ayant  $c_{ij}^i = 0$  admet un invariant intégral d'ordre 2. De même en utilisant le théorème ci-dessus, l'A. donne les formes générales des coefficients  $\xi_h^i$  correspondant aux groupes  $G_3$  et  $G_4$  ayant un invariant intégral d'ordre 2. C. Teleman.

**Stoka, Marius I.:** Sur la mesure des ensembles de variétés d'un espace Euclidien  $E_n$ . Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 7, 313—317, russ. und französ. Zusammenfassg. 317 (1957) [Rumänisch].

On montre que si un groupe de Lie local opère analytiquement dans l'espace numérique  $R^n$ , il peut avoir au plus un invariant intégral d'ordre  $n$ . C. Teleman.

**Freudenthal, Hans:** Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 61, 379—383 (1958).

It is well known that the classification of all simple Lie algebras over the complex numbers can be reduced to the classification of certain vector systems in Euclidean space. In the present paper these vector systems are classified in a very clear and concise fashion. S. Helgason.

**Wallace, E. W.:** Complex four-dimensional Lie algebras. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 65, 72—83 (1958).

The author obtains canonical forms for the complex Lie algebras of dimension four. He first classifies the nilpotent algebras by examining the dimensions of their centers. By a lemma which allows him to choose a special basis in the case of dimension four, the author shows that the non-solvable algebras decompose into the direct sum of a three dimensional simple algebra and an abelian algebra. The paper concludes with a list of the constants of structure and a table of invariants of the four-dimensional Lie algebras. J. P. Jans.



Nôno, Takayuki: Note on the paper "On the singularity of general linear groups" J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **21**, 163—166 (1958).

In the paper named in the title (this Zbl. **79**, 42) the author has stated as Theorem 1 the following: The exponential mapping of the Lie algebra  $\mathfrak{G}$  into the Lie group  $G: X \rightarrow \exp X$  is locally homeomorphic at  $A$  if and only if the matrix  $C(A)$  has no non-zero integral multiple of  $2\pi i$  as characteristic root. This condition is now asserted to be equivalent with the condition that the differential or Jacobian  $\chi(A)$  of the exponential mapping at  $A$  has an inverse. For the case of the complex Lie groups it is seen from a theorem concerning Jacobians in S. Bochner and W. T. Martin. Several complex variables (this Zbl. **41**, 52), p. 179, that if  $\chi(A)$  has no inverse, then the exponential mapping is not locally homeomorphic at  $A$ . For the case of the real Lie groups this argument is not available. The proof of the above mentioned theorem is now completed and attention is given to the correspondence by the exponential mapping between the neighbourhoods of  $A$  and  $\exp A$ .

H. Schwerdtfeger.

Chen, Kuo Tsai: Exponential isomorphism for vector spaces and its connection with Lie groups. J. London math. Soc. **33**, 170—177 (1958).

$\mathfrak{B}$  sei ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ .  $\mathfrak{B}(\mathfrak{B})$  sei das freie Monoid (Halbgruppe), das aus den Worten  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$  mit  $u_i \in \mathfrak{B}$  besteht. Führt man in  $\mathfrak{B}(\mathfrak{B})$  eine Äquivalenz durch  $\langle 0 \rangle = \varepsilon$  (= leeres Wort) und  $\langle u, v \rangle = \langle u + v \rangle$ , falls  $u$  und  $v$  linear abhängig sind, ein, so erhält man eine Gruppe  $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B})$ .  $\mathfrak{A} \tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B})$  sei die (formale) Gruppenalgebra von  $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B})$  über  $\mathbb{K}$ .  $\mathfrak{B}^p$  sei der Raum der kovarianten Tensoren der Ordnung  $p$  und  $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$  sei die Menge der formalen Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} U_p$  mit  $U_p \in \mathfrak{B}^p$ .  $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$  wird zur Algebra über  $\mathbb{K}$ , wenn man

$$\left( \sum_{p=0}^{\infty} U_p \right) \left( \sum_{p=0}^{\infty} V_p \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p U_i \otimes V_{p-i}$$

setzt. Es sei  $\theta(\langle u \rangle) = \exp u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^p}{p!}$  für  $u \in \mathfrak{B}$  mit  $u^p = u \otimes \dots \otimes u$ .

$\theta$  läßt sich zu einem Homomorphismus von  $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B})$  bzw.  $\mathfrak{A} \tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B})$  in  $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$  erweitern. Falls  $\mathbb{K}$  von der Charakteristik 0 ist, ist  $\theta$  ein Monomorphismus (ein-eindeutig). Ist  $\mathfrak{G}$  eine reelle oder komplexe Liesche Gruppe mit der Lieschen Algebra  $\mathfrak{g}$ , so läßt sich die gewöhnliche Exponentialabbildung  $u \rightarrow \exp u$  von  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{G}$  zu einem Homomorphismus  $\theta^*$  von  $\mathfrak{A} \tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B})$  in die formale Gruppenalgebra  $\mathfrak{A} \mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{G}$  erweitern. Ist  $\mathfrak{G}$  zusammenhängend, so ist  $\theta^*$  ein Epimorphismus (Homomorphismus auf). Ist  $\mathfrak{G}$  zusammenhängend, so gibt es also einen Epimorphismus, der die von  $\exp u$  ( $u \in \mathfrak{B}$ ) erzeugte Algebra  $G$  bzw. Gruppe  $G'$  auf  $\mathfrak{A} \mathfrak{G}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  abbildet. Ist  $X_1, \dots, X_n$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$ , so ist  $G$  die von den formalen Potenzreihen  $\exp \sum_{i=1}^n x_i X_i$  erzeugte Algebra, wenn man die  $X_i$  als nicht-kommutative Unbestimmte betrachtet.

E. Thoma.

Dieudonné, Jean: Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic  $p > 0$ . VIII. Amer. J. Math. **80**, 740—772 (1958).

(Part I—V s. this Zbl. **55**, 256; **64**, 255, 256; **72**, 262; part VI VII see the two papers from the author mentioned in this review). The author continues his study of formal Lie groups by considering the extension problem. Let  $K$  be a perfect field (of characteristic  $p$ ) and let  $G$  be any finite dimensional formal Lie group and  $A$  an abelian formal Lie group. Then the author defines cohomology groups  $H^m(G, A)$ , which are analogous to the corresponding concept for abstract groups and uses them to study extensions of  $G$  by  $A$ . An abelian Lie group  $A$  (written additively) is called divisible, if  $x \rightarrow px$  is surjective and hence an isogeny of  $A$  onto itself. A central extension  $E$  of  $G$  by  $A$  is called quasi-trivial if  $E$  is isogeneous to the direct pro-

duct of  $A$  and a group isogeneous to  $G$ . Now the author proves Theorem 1: If  $G$  is a soluble group over an algebraically closed field and  $D$  the largest divisible abelian group in the centre of  $G$ , then  $D$  is a quasi-direct factor in  $G$ . On the other hand, from results in part VI [Amer. J. Math. **79**, 331—388 (1957)] follows Theorem 2: If  $G$  is as in Th. 1 and its centre contains no divisible abelian group, then  $G$  is isogeneous to a semidirect product of a torus and its largest unipotent normal subgroup. These theorems together with the results on abelian groups in part VII [Math. Ann. **134**, 114—133 (1957)] and the fact that a 2-dimensional group cannot be simple (Ecole normale supérieure, Séminaire C. Chevalley, "Classification des groupes de Lie algébriques", Paris 1958) suffice to give a complete description, up to isogeny, of all 2-dimensional formal Lie groups. In contrast to the classical case, nilpotent non-abelian groups can occur here, and it is shown that such a group may be an extension of the additive group by itself and yet non-representable (by algebraic matrix groups). On the other hand, the non-nilpotent soluble groups of dimension 2 are representable, and in fact are all isogeneous. *P. M. Cohn.*

**Dixmier, Jacques: Quelques propriétés des groupes abéliens localement compacts.** Bull. Sci. math., II. Ser. **81**, 38—48 (1957).

Verf. untersucht die Beziehungen zwischen Zusammenhangseigenschaften und der Struktur lokal kompakter abelscher Gruppen und erhält u. a. folgende Resultate: Die Komponente des bogenweisen Zusammenhangs der lokalkompakten abelschen Gruppe  $A$  ist die Vereinigung aller einparametrischen Untergruppen.  $A$  ist genau dann bogenweise zusammenhängend, wenn  $A = \mathbf{R}^n \times \hat{D}$  ist, wobei  $\mathbf{R}^n$  der  $n$ -dimensionale reelle Vektorraum und  $\hat{D}$  die Charaktergruppe einer diskreten Gruppe  $D$  mit  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}(D, \mathbf{Z}) = 0$  ist,  $\mathbf{Z}$  = ganze rat. Zahlen. Eine ähnliche, etwas kompliziertere Kennzeichnung gilt für lokal bogenweise zusammenhängende Gruppen. Weiter zeigt Verf., daß es kompakte zusammenhängende, lokal zusammenhängende abelsche Gruppen gibt, die nicht bogenweise zusammenhängen. Der Hauptschritt des Existenznachweises einer solchen Gruppe besteht im Beweis, daß für die  $\aleph_0$ -te Potenz  $D$  von  $\mathbf{Z}$   $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(D, \mathbf{Z}) \neq 0$  ist. Schließlich beweist Verf., daß die injektiven lokal kompakten abelschen Gruppen genau die Gruppen der Form  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$  sind,  $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ,  $m$  eine beliebige Kardinalzahl. *H. Leptin.*

### **Verbände. Ringe. Körper:**

**Rado, R.: Note on independence functions.** Proc. London math. Soc., III. Ser. **7**, 300—320 (1957).

An independence function on a set  $S$  is a function which assigns to every finite subset of  $S$  the value 0 (dependent) or 1 (independent) with the following properties. A subset of an independent set is independent and if  $A$  and  $B$  are finite independent subsets of  $S$ , where  $B$  has a greater cardinal number than  $A$ , there exists an element  $b$  in  $B$  and not in  $A$ , such that  $\{A, b\}$  is independent. The main problem is, whether  $S$  may be mapped into a vectorspace over a division ring, such that dependence and independence correspond to linear dependence and independence of the vectors. It is proved that if such a representation of a finite  $S$  over a field  $K$  is possible, it is also possible over a finite extension of the prime field of  $K$  and if  $K$  has characteristic 0 also over finite fields of characteristic  $p$  for almost all  $p$ . Some results on non-representability are also given; in a footnote it is remarked that a non-representable set with independence function consisting of 16 elements has been found by T. Lazarsen. Some results are given on independence functions on a graph, where a subset is dependent if it contains a circuit; a finite graph then turns out to be representable over any division ring. Finally some results are derived on independence functions on infinite well-ordered sets; in particular certain bases, which are in a certain sense minimal with respect to the well-ordering, are investigated. *W. Peremans.*



Čulik, Karel: Zur Theorie der Graphen. Časopis Mat. 83, 133—154, russ. Zusammenfassg. 155 [1958].

Verf. entwickelt eine allgemeine algebraisierte Graphentheorie. Ein Graph wird repräsentiert als eine nichtleere Menge  $F$  mit einer binären Relation  $f$ , d. h. für  $x, y \in F$  ist eine Funktion  $f(x, y)$  definiert, deren Wertebereich (zumeist) nur 0 oder 1 ist. Man erhält verschiedene bekannte Sorten von Graphen (ungerichtete, gerichtete, schlingenlose, zweiecklose Graphen und andere) je nachdem ob gewisse Eigenschaften von  $f$ , z. B. Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Antisymmetrie, Irreflexivität, verlangt werden oder nicht. Wie sich diese und weitere Eigenschaften von Graphen (Einfachheit, Zusammenhang, Komplementbildung) bei einer homomorphen Abbildung und deren Umkehrung verhalten, wird insbesondere studiert.

*G. Ringel.*

Matsushima, Yataro: The geometry of lattices by  $B$ -covers. Proc. Japan Acad. 33, 328—332 (1957).

Weitere kalkulatorische Behandlung des früher (dies. Zbl. 72, 261) eingeführten allgemein-verbandstheoretischen Zwischenbegriffs und der „ $B$ -cover“  $B(a, b)$  (der Menge der „zwischen“  $a$  und  $b$  liegenden Elemente); es werden aus  $B(a, b)$  zwei weitere Bildungen  $B^*(a, b)$  und  $B^+(a, b)$  abgeleitet und ausführlich die rechnerischen Beziehungen zwischen allen drei Bildungen, vor allem auch im Spezialfall der Modularität und Distributivität, studiert.

*Jürgen Schmidt.*

Matsushima, Yataro: On  $B$ -covers and the notion of independence in lattices. Proc. Japan Acad. 33, 462—467 (1957).

Nach Wilcox (dies. Zbl. 21, 108) bilden die Elemente  $a, b$  eines Verbandes  $L$  ein modulares Paar, wenn  $(x \vee a) \wedge b = x \vee (a \wedge b)$  für jedes  $x \leq b$ ; Verf. studiert formale Zusammenhänge dieses Begriffes mit den beiden Relationen der „Semi-Betweenness“, deren Konjunktion seine allgemein-verbandstheoretische (von den normierten Verbänden her verallgemeinerte) Zwischen-Relation (dies. Zbl. 72, 261) ist; damit beweist Verf. erneut seinen Satz aus der vorstehend referierten Note: ein modulares Paar liegt bereits dann vor, wenn obige Gleichung bei allen  $x$  mit  $a \wedge b \leq x \leq b$  eintritt (relativ modulares Paar). In der 2. Hälfte werden Zusammenhänge zwischen den o. a. (Halb-) Zwischen-Begriffen des Verf. und dem von Wilcox loc. cit. eingeführten Unabhängigkeitsbegriff für endliche Familien von Verbandselementen analysiert.

*Jürgen Schmidt.*

Matsushima, Yataro: On the relations „semi-between“ and „parallel“ in lattices. Proc. Japan Acad. 34, 341—346 (1958).

Weiterentwicklung des Kalküls der verbandstheoretischen Zwischen- und Halb-Zwischen-Begriffe früherer Noten des Verf. (dies. Zbl. 72, 261, sowie die beiden vorstehend referierten Noten); es ergeben sich dabei Charakterisierungen der Modularität und der Distributivität. „Parallelität“ hier als eine vierstellige Relation  $ab||cd$  zwischen Verbandselementen (Zusammenhang mit der zweistelligen Parallelitätsrelation von Wilcox, dies. Zbl. 21, 108); mit Hilfe dieses Begriffes werden Beziehungen zwischen zwei Kompositionsreihen betrachtet. Die Darstellung ist rein kalkulatorisch, auf Deutung der Begriffe wird völlig verzichtet.

*Jürgen Schmidt.*

Matsushita, Shin-ichi: Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände. I. Math. Ann. 137, 1—8 (1959).

L'A. précise ici quelques propriétés algébriques de systèmes introduits précédemment par lui sous le nom de treillis non commutatifs (lattices non commutatifs. cf. ce Zbl. 50, 27). Il définit les treillis non commutatifs réguliers.

*R. Croisot.*

Klein-Barmen, Fritz: Verallgemeinerung des Verbandsbegriffs durch Abschwächung des Axioms der Idempotenz. Math. Z. 70, 38—51 (1958).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 80, 24) hat Verf. die Ordoide definiert. Jetzt wird die Theorie dieser Klasse von algebraischen Strukturen weiter entwickelt. Zuerst wird eine Relation  $\vdash$  durch die Definition „ $x \vdash y$  dann und nur dann,

wenn  $x y = x$  ist“ eingeführt, und es werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Relation in kommutativen Halbgruppen — insbesondere in Ordoiden — untersucht. Dann wird ein Verfahren beschrieben, mit dessen Hilfe aus vorgegebenen Ordoiden und kommutativen Halbgruppen neue Ordoide konstruiert werden können. Endlich wird das Axiom der sog. Autodistributivität im Zusammenhang mit den übrigen vorstehend betrachteten Axiomen erörtert.

G. Szász.

**Revuz, André:** Topologies sur certains treillis complets. Arch. der Math. 9, Festschrift Hellmuth Knéser, 342—346 (1958).

Eine Menge  $X$  mit einer Ordnung  $<$  und einer Topologie  $\mathfrak{T}$  (Umgebungsfilter von  $x \in X$ :  $\mathfrak{V}(x)$ ) heißt ein Raum  $\tilde{X}$ , wenn die folgenden Bedingungen  $X_0, X_a, X_b, X_c$  sowohl mit der Ordnung  $<$ , als auch mit der zu ihr dualen Ordnung erfüllt sind.  $X_0$ :  $X$  ist in der Ordnung  $<$  Halbverband.  $X_a$ : Die Hauptanfänge  $[\leftarrow, x]$  von  $X$  sind in der Topologie  $\mathfrak{T}$  kompakt.  $X_b$ : Die Abbildung  $(x, y) \rightarrow \inf(x, y)$  von  $X \times X$  auf  $X$  ist in der Topologie  $\mathfrak{T}_+$  stetig. Dabei ist  $\mathfrak{T}_+$  die Topologie, deren Umgebungsfilter  $\mathfrak{V}_+(x)$  die Systeme  $\{V \cap [x, \rightarrow]; V \in \mathfrak{V}(x)\}$  als Basen haben.  $X_c$ : Zu jedem  $x \in X$  und jedem  $V_+ \in \mathfrak{V}_+(x)$  existiert ein Element  $y \in V_+$  mit  $\overset{0}{[\leftarrow, y]} \supseteq [\leftarrow, x]$ . (Im Text heißt es, wohl infolge eines Druckfehlers,  $\overset{0}{[\leftarrow, y]} \subset [\leftarrow, x]$  an

Stelle von  $\overset{0}{[\leftarrow, y]} \supseteq [\leftarrow, x]$ .) Jede vollständige Kette ist in der natürlichen Topologie ein  $\tilde{X}$ -Raum, ferner das Produkt einer beliebigen Familie von  $\tilde{X}$ -Räumen, insbesondere also das Produkt  $C = \prod_i C_i$  vollständiger Ketten  $C_i$ . Verf. beweist:

Genau dann ist der Teilverband  $T$  von  $C$  ein  $\tilde{X}$ -Raum, wenn er sogar vollständiger Teilverband von  $C$  ist. Seine Topologie stimmt, wie Verf. bei der Korrektur hinzufügt, mit der Ordnungstopologie von Birkhoff überein, ist also von der speziellen Art der Einbettung unabhängig. Die vollständigen Teilverbände direkter Produkte vollständiger Ketten sind, einem Satz von Raney [Proc. Amer. math. Soc. 4, 518—522 (1953)] zufolge, gerade die vollständigen, vollständig distributiven Verbände. Auf die Wichtigkeit der betrachteten Räume für Fragen der Maßtheorie wird hingewiesen. Anmerkung des Ref. (zu S. 346, 1. Absatz): Der Verband der Hauptanfänge  $[\leftarrow, x]$  einer vollständigen Kette  $C$  ist zwar stets ein vollständiger Verband, braucht jedoch kein vollständiger Teilverband (im Sinne des Verf.) der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(C)$  von  $C$  zu sein.

G. Bruns.

**Luchian, Tudora:** A classification of real linear algebras of order 2, with divisors of zero. An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi. n. Ser., Sect. I 4, Nr. 1, 21—37, russ. Zusammenfassg. 37—38 (1958).

In einer nicht notwendig assoziativen Algebra  $A$  der Dimension 2 über dem Körper der reellen Zahlen läßt sich die Linksmultiplikation  $y I(x) = xy$  von  $A$  mit dem Element  $x$  bezüglich einer Basis von  $A$  durch eine Matrix darstellen. Deren Determinante  $D(x)$  ist eine quadratische Form mit der Determinante  $d$ . Ein Element  $a$  heißt singulär, wenn es Nullteiler ist, d. h. wenn  $D(a) = 0$  ist. Wenn  $A$  Nullteiler besitzt, ist  $D(x)$  entweder die Nullform ( $L_3$ -Algebren) oder es ist  $D(x) \equiv 0$  und  $d = 0$  ( $L_2$ -Algebren) oder  $d < 0$  ( $L_1$ -Algebren). — Eine  $L_1$ -Algebra besitzt genau dann ein Einselement für die Rechtsmultiplikation, wenn sie direkte Summe zweier Rechtsideale ist. — Eine  $L_2$ -Algebra  $A$  besitzt genau einen Unterraum  $R$ , der aus lauter linkssingulären Elementen besteht; dieser ist ein Rechtsideal, wenn  $A$  eine Rechtseins besitzt. Verf. behandelt auch die Frage, unter welchen Voraussetzungen zu einem Element  $a$  aus  $A$  eine zugehörige Rechtseins  $z(a)$  mit  $az = a$  existiert. — In einer  $L_3$ -Algebra sind alle Elemente linkssingulär. Diejenigen Elemente  $a$  aus ihr, die Rechtseins  $z(a)$  besitzen, bilden ein Rechtsideal  $R$ ; und umgekehrt existiert für jedes Element  $a$  eines Rechtsideals  $R$  eine zugehörige Rechtseins  $z(a)$ , falls das Produkt  $RA \neq 0$  ist.

E.-A. Behrens.



**Albada, P. J. van:** Two theorems about quadratic nonassociative algebras. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 319—321 (1958).

Eine nicht notwendig assoziative Algebra  $A$  heißt symmetrisch, wenn sie einen involutorischen Antiautomorphismus besitzt, der jedes Element des Grundkörpers  $F$  festläßt. Jede solche Algebra ist quadratisch, d. h. jedes Element genügt einer quadratischen Gleichung über  $F$ . Davon gilt jedoch nicht die Umkehrung, wie Verf. an einem Beispiel zeigt. Jede flexible, also  $(xy)x = x(yx)$  erfüllende, und quadratische Algebra, deren Charakteristik von 2 verschieden ist, ist jedoch symmetrisch. Ferner beweist Verf., daß es nicht-flexible, symmetrische Divisionsalgebren der Dimension 4 gibt. E.-A. Behrens.

**Oehmke, Robert H.:** A class of noncommutative power-associative algebras. Trans. Amer. math. Soc. **87**, 226—236 (1958).

Im Zusammenhang mit einer Arbeit von A. A. Albert (dies. Zbl. **45**, 321), untersucht Verf. solche Algebren ( $SJ$ -Algebren) über  $F$ , für die  $x^2x = x^2x^2$  gilt und deren zugeordnete Algebra  $A^+$  eine separable Jordan-Algebra ist. Dabei geht  $A^+$  aus  $A$  durch  $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$  hervor. Eine separable Jordan-Algebra ist eine halbeinfache Jordan-Algebra, deren einfache Komponenten separable Zentren über  $F$  besitzen. — Sei  $G$  eine nichtassoziative Algebra und  $S$  ein Unterraum von  $G$ , der unter  $a \cdot b$  abgeschlossen ist. Dann spannen die Elemente  $xy - yx$  für  $x, y \in S$  einen Unterraum  $U(S)$  in  $G$  auf. Sei  $T$  eine lineare Abbildung von  $U(S)$  in  $S$ . Dann definiert das Produkt

$$(1) \quad x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) + (xy - yx)T$$

eine Algebra  $A = B(G, S, T)$  über  $F$  ( $A$  heißt bonded zu  $G$ ). Jede  $SJ$ -Algebra  $A$  ist von der Form  $B(G, S, T)$ , wobei die Algebra  $G$  die direkte Summe einer halbeinfachen assoziativen Algebra und von Algebren dreireihiger Matrizen über einer Cayley-Algebra ist. Genauer wird gezeigt, daß falls  $A$  eine  $SJ$ -Algebra und  $A^+$  eine spezielle Jordan-Algebra ist, eine assoziative Algebra  $G$  existiert mit  $A = B(G, S, T)$ , und daß, falls für eine Algebra  $A$  über  $F$  die Algebra  $A^+$  ein Ideal  $I$  besitzt, das seinerseits eine einfach-separable Jordan-Algebra des Ausnahmetypus ist, dann das  $I$  auch ein Ideal in  $A$  ist und die Multiplikation von  $I$  in  $A$  und  $A^+$  übereinstimmt. Schließlich gibt Verf. ein Beispiel für eine Algebra an, die  $x^2x = x^2x^2$  genügt, für die  $A^+$  ein kommutativer, inseparabler Körper ist, und die sich nicht in der Form  $A = B(G, S, T)$  darstellen läßt. E.-A. Behrens.

**Albert, A. A.:** Addendum to the paper on partially stable algebras. Trans. Amer. math. Soc. **87**, 57—62 (1958).

Für die infolge eines Rechenfehlers in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **77**, 256) nur lückenhaft bewiesenen Sätze werden neue Beweise angegeben. G. Pickert.

**Jacobson, N.:** Nilpotent elements in semi-simple Jordan algebras. Math. Ann. **136**, 375—386 (1958).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **43**, 268) bewies Verf., daß eine Jordan-Algebra  $J$  über einem Körper  $F$  der Charakteristik null genau dann halbeinfach ist, wenn zu jedem nilpotenten Element  $e$  ein nilpotentes Element  $f$  existiert, das zu  $e$  assoziiert ist, d. h., für das  $2(e, e, f) = e$ ,  $2(f, f, e) = f$  gilt, wobei  $(x, y, z) = -(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$  der Assoziator ist. Der Verf. beschreibt in der vorliegenden Arbeit die Struktur der von  $e$  und  $f$  erzeugten Unter algebra  $K$  von  $J$ , auch in den Fällen, in denen die Charakteristik von null verschieden ist. Sei  $[xy] = xy - yx$  der Liesche Kommutator von  $x$  und  $y$ . Dann folgen aus den eine Jordanalgebra definierenden Relationen  $a \cdot b = b \cdot a$  und  $a^2 \cdot (b \cdot a) = (a^2 \cdot b) \cdot a$  für  $e$  und  $f$  die Beziehungen  $[ef] = h$ ,  $[eh] = 2e$ ,  $[fh] = -2f$ , wobei die erste Gleichung  $h$  definiert. Deutet man  $e, f, h$  als Basis einer Lieschen Algebra  $L$  mit diesen Relationen, so besitzt  $L$  für jede natürliche Zahl  $j$  die folgende lineare Darstellung: Seien  $x_1, \dots, x_j$  die  $F$ -Basis eines Moduls  $M_j$ , und  $x_i e = x_{i+1}$ ,  $i \leq j-1$ ,  $x_j e = 0$ ,  $x_1 f = 0$ ,  $x_{i+1} f = i(i-j)x_i$ ,

$i \leq j-1$ ,  $x_i h = (2i-1-j)x_i$ . In diesem  $L$ -Modul  $M_j$  werde eine symmetrische Bilinearform  $(x, y)$  durch  $(x_i, x_{j-k+1}) = \delta_{ik}$  definiert. Dann ist die von  $e$  und  $f$  erzeugte Unter-Jordan-Algebra  $K$  von  $J$  isomorph einer direkten Summe von Algebren  $H_j^+$ , wobei  $H_j$  aus denjenigen linearen Transformationen von  $M_j$  in sich besteht, die bez.  $(x, y)$  selbstadjungiert sind, und  $H_j^-$  aus  $H_j$  durch  $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$  hervorgeht. — Auch dann, wenn die Charakteristik von  $F$  von 2 und 3 verschieden ist, kann man einen derartigen Ring linearer Transformationen eines endlich-dimensionalen Vektorraumes für beliebige halbeinfache Jordan-Algebren angeben. Dabei ist die symmetrische Bilinearform nicht ausgeartet und besitzt maximalen Wittschen Index. Der Beweis wird für die verschiedenen wohlbekannten Typen einfacher Jordan-Algebren getrennt geführt und benutzt wesentlich deren Struktur.

*E.-A. Behrens.*

**Koecher, Max:** Analysis in reellen Jordan-Algebren. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., II a 1958, 67—74 (1958).

Eine Frage aus der Differentialgeometrie war der Anlaß der vorliegenden Untersuchung. Sei  $A$  eine kommutative, aber nicht notwendig assoziative Algebra über dem Körper der reellen Zahlen mit Einselement  $e$  und von endlicher Dimension  $n$ . Bezogen auf die Einheitsvektoren des linearen Raumes  $A$  läßt sich die Linksmultiplikation von  $A$  mit dem Element  $u$  durch eine Matrix  $L(u)$  darstellen.  $A$  heißt symmetrisch, wenn die Matrix  $L(u)$  es ist, d. h. wenn die Strukturkonstanten in allen Indizes symmetrisch sind.  $A$  heißt schwach assoziativ, wenn für alle  $v$  und alle nicht singulären  $u$  gilt  $u \circ (u^{-1} \circ v) = u^{-1} \circ (u \circ v)$ . Als  $n$ -dimensionales Vektorgebilde besitzt  $A$  eine euklidische Metrik. Verf. zeigt: Wenn  $A$  schwach assoziativ ist, dann ist  $A$  eine Jordan-Algebra. Jede symmetrische Jordan-Algebra ist schwach assoziativ. Eine symmetrische Algebra ist genau dann schwach assoziativ, wenn  $x^{-1}$  lokal Gradient einer skalaren Funktion von  $x$  ist. Beim Beweis wird die Potenzreihenentwicklung von  $x^{-1}$  nach  $x - e$  benutzt und die Funktionalmatrix der Abbildung  $f(x) = u \circ x$  des  $R^n$  in sich. Durch  $e(x) = \sum (m!)^{-1} x^m$  läßt sich die Exponentialfunktion von  $A$  erklären. Sei nun  $A$  eine symmetrische Jordan-Algebra. In ihr bezeichne  $P$  die den Punkt  $e$  enthaltende zusammenhängende Komponente der Menge aller derjenigen  $x$ , für die die Matrix  $2L^2(x) - L(x^2)$  positiv definit ist. Dann bildet  $x \rightarrow e(x)$  den Ring  $R''$  eindeutig auf  $P$  ab und  $x \rightarrow x^2$  wiederum das  $P$  eindeutig auf sich.

*E.-A. Behrens.*

**Jacobson, N.:** Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 7, 55—80 (1958).

Verf. bringt zunächst einen neuen elementaren Beweis für den Satz von A. Hurwitz, daß nur quadratische Formen der Variablenzahlen 1, 2, 4, 8 eine Komposition zulassen. Im Gegensatz zu früheren Behandlungen der Aufgabe wird hier aber ein ganz beliebiger Grundkörper  $k$  zugelassen, dessen Charakteristik  $\neq 2$  ist. Die Komposition führt auf eine i. a. nur noch alternative Algebra  $A$ , in der eine Involution  $x \rightarrow \bar{x}$  erklärt ist, und wobei  $x\bar{x}$ ,  $x + \bar{x} \in k \cdot 1$  ist, unter 1 das Einselement von  $A$  verstanden. Je nach der Variablenzahl ist  $A = k \cdot 1$ ,  $A = K$  (eine kommutative, nicht notwendig nullteilerfreie halbeinfache Erweiterung 2. Grades von  $k$ ),  $A = Q$  (eine Quaternionen-Algebra über  $k$ ),  $A = C$  (eine Cayley-Algebra). Weitere Resultate: (1) Besitzt  $A$  Nullteiler, so ist  $A$  durch die Variablenanzahl der quadratischen Form eindeutig bestimmt. (2) Wenn  $A = Q$  oder  $A = C$ , so ist jeder Automorphismus von  $A$  ein innerer, wird durch einen Automorphismus der quadratischen Form geliefert, und läßt sich als Produkt von Involutionen oder „Spiegelungen“ schreiben. (3) Im Falle  $A = C$  wird die Gruppe  $G_{A/B}$  derjenigen Automorphismen von  $A$  bestimmt, die eine Teilalgebra  $B$  fest lassen. Ist  $B$  eine Quaternionen-Algebra, so ist  $G_{A/B}$  isomorph der Multiplikationsgruppe der Elemente der Norm 1 von  $B$ . Ist  $B$  eine kommutative Erweiterung von  $k$ , so ist die Beschreibung von  $G_{A/B}$  schwieriger. (4) Ist  $A = C$ , und enthält  $A$  Nullteiler, so ist die Automorphismengruppe von  $A$



einfach. Im nullteilerfreien Falle gilt dies i. a. nicht mehr. Doch kann Verf. seine Vermutung stützen, daß dieser Satz allgemein dann gilt, wenn  $k$  ein endlich-algebraischer Zahlkörper ist. (5) Die einzigen bei der Automorphismengruppe von  $A$  invarianten Teilräume sind 0,  $A$  und die Teilräume der bei  $x \rightarrow \bar{x}$  symmetrischen und schiefsymmetrischen Elemente. M. Eichler.

Kleinfeld, Erwin: A note on Moufang-Lie rings. Proc. Amer. math. Soc. 9, 72—74 (1958).

Führt man in einem alternativen Ring  $(x, y) = xy - yx$  als neues Produkt ein, so ergibt sich ein Moufang-Lie-Ring, d. h. ein Ring, in dem  $x^2 = 0$  und  $(xy, y, z) = y(x, y, z)$  gilt, wobei  $(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$  die linke Seite der Jacobi-Identität ist. Verf. beweist, daß ein solcher Ring  $R$  mit von 2 verschiedener Charakteristik dann ein Lie-Ring ist, wenn er ein Element  $a$  mit  $aR = R$  enthält. An einem Beispiel wird gezeigt, daß, wenn man sich nicht auf Algebren endlichen Ranges beschränkt, derartige Ringe mit  $aR = R$  existieren. Analog ist ein alternierender Ring  $R$ , in dem ein Element  $a$  mit  $(a, R) = R$  existiert, assoziativ. Auch hier gibt Verf. ein Beispiel. E.-A. Behrens.

Yen, Chih-ta: Sur les sous-algèbres commutatives de dimensions maximales d'une algèbre de Lie semi-simple. Science Record, n. Ser. 1, 375—376 (1957).

The author announces the following results (it appears that all Lie algebras considered are of finite dimension over the complex numbers). Theorem 2: If  $L$  is a semisimple Lie algebra, then among the commutative subalgebras of  $L$  of maximal dimension there exist subalgebras consisting of nilpotent elements only. Theorem 3: For a simple Lie algebra of type  $\neq A_1, A_2$  the commutative subalgebras of maximal dimension contain only nilpotent elements. — These theorems complement the results obtained by Mal'cev [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. math. 9, 291—300 (1945)]; it is stated that Mal'cev's results are used in the proof of Theorem 3 but not of Theorem 2. P. M. Cohn.

Amitsur, S. A.: Derivations in simple rings. Proc. London math. Soc., III. Ser. 7, 87—112; Erratum. Ibid. 320 (1957).

Let  $A$  be a non-trivial simple ring with derivation and  $A[t]$  denote the ring of differential polynomials over  $A$ , wherein multiplication is defined by  $ta = at + a'$ ,  $a \in A$ . Let  $\mathfrak{G}_L$  denote the set of endomorphisms of the additive group of  $A$  which commute with the right multiplications  $A_R$  of  $A$ . The author then considers the two-sided ideals of  $A[t]$  and shows that these are of the form  $\pi(t_L)A[t]$ , where  $t_L \in \mathfrak{G}_L(A[t])$ , and  $\pi(t_L)$  belongs to the center of  $\mathfrak{G}_L[t_L]$ . One consequence of this investigation is to show that  $A$  can be embedded in a simple ring with an inner derivation which induces the derivation in  $A$ . There follow some results concerning the existence of universal differential equations, i. e., equations of the form 
$$\sum_{i=0}^n \alpha_i z^{(i)} = 0, \quad \alpha_i \in \mathfrak{G}_L, \quad \text{which are satisfied by all } z \in A.$$
 The last part of the

paper deals with the Lie-structure of  $A$  and of  $[A, A]$ , the module generated by the set  $[x, y] = xy - yx$ ,  $x, y \in A$ . Several results are obtained; we note one of these (Theorem 10): If  $A$  is not a central simple algebra of order 4 over a field of characteristic two, then the Lie ideals of  $A$  and  $[A, A]$  either contain  $[A, A]$  or are contained in the center of  $A$ . Finally, we note that in a later issue of the same journal there is a correction to a statement made in the proof of lemma 12. F. Levin.

Białynicki-Birula, A.: On the spaces of ideals of semirings. Fundamenta Math. 45, 247—253 (1958).

$R$  sei ein Halbring, d. h. in der Menge  $R$  seien eine kommutative, assoziative Addition und eine assoziative Multiplikation mit  $a(b+c) = ab+ac$ ,  $(b+c)a = ba+ca$  definiert; es existiere ein Element  $o$  in  $R$  mit  $a+o = a = o+a$ ,  $ao = o = oa$ . Eine Teilmenge  $i$  von  $R$  heiße ein Ideal, wenn gilt:  $a \in i, b \in i \rightarrow a+b \in i$ ;  $a \in i \rightarrow ax \in i, xa \in i$  für alle  $x \in R$ ;  $a+b=0, a \in i \rightarrow b \in i$ ;  $o \in i$ .

Ein Ideal heiße prim, wenn aus  $a x b \in i$  für alle  $x \in R$  folgt  $a \in i$  oder  $b \in i$ .  $R$  heiße  $c$ -regulär, wenn jedes Hauptideal durch ein Element des Zentrums von  $R$  erzeugt werden kann (z. B. kommutative Ringe, biregulre Ringe, distributive Verbände). Das Hauptergebnis: Sei  $R$   $c$ -regulär; sei  $J$  eine Menge von Primidealen in  $R$ ;  $J$  werde mit der Stone-Topologie versehen; dann ist  $J$  Hausdorffsch, wenn und nur wenn gilt: ist  $i_0$  ein Primideal in  $R$  mit  $i_0 \supseteq \bigcap j$  ( $j \in J$ ), so existiert höchstens ein Ideal  $j \in J$  mit  $i_0 \subseteq j$ . G. Nöbeling.

**Drazin, M. P.:** Pseudo-inverses in associative rings and semigroups. Amer. math. Monthly **65**, 506—514 (1958).

The element  $x$  of an associative ring  $R$  is defined to be pseudo-invertible (in  $R$ ) if an element  $c$  (of  $R$ ) exists such that  $c x = x c$ ,  $x^m = x^{m+1} c$  for some positive integer  $m$  [the least such  $m$  ( $= i(x)$ ) is called the index of  $x$ ],  $c = c^2 x$ . This extends Moore's generalized inverse of matrices (see Penrose, this Zbl. **65**, 246, and Rado, this Zbl. **71**, 247). It is shown that  $x$  has at most one pseudo-inverse in  $R$  and if it exists it will be denoted by  $x'$ , moreover, if  $a \in R$  and  $a x = x a$ , then  $a x' = x' a$ . Many other properties are obtained, e. g.  $(x^k)' = (x')^k$  and  $i(x^k) = [(i(x) + k - 1)/k]$ : if  $x'$  exists so does  $x'' = (x')'$  and  $i(x') = 1$ ;  $x'' = x$  if and only if  $i(x) = 1$ , hence  $x''' = x'$ . All these results are applicable to semigroups. It is then shown that  $x'$  exists if and only if  $x$  is strongly  $\pi$ -regular in  $R$  (see Azumaya, this Zbl. **58**, 25). If  $x$  is nilpotent then  $x' = 0$  and the index of  $x$  has its usual meaning. A new, simple proof is given of the theorem that if the upper limit of the indices of the nilpotent elements of  $R$  is bounded, then every right  $\pi$ -regular element of  $R$  has a pseudo-inverse. Finally, for a semigroup, the definition of pseudo-inverse can be expressed in terms of certain idempotents and maximal subgroups. F. W. Ponting.

**Sussman, Irving:** A generalization of Boolean rings. Math. Ann. **136**, 326—338 (1958).

The author considers rings  $R$  with unit elements which are subdirect sums of domains of integrity. — Definitions: Let  $a = (\dots, a_i, \dots)$  be an element of  $R$ . If there exists an  $a^*$  in  $R$  such that  $a_i^* = 0_i$  if  $a_i = 0_i$  and  $a_i^* = 1_i$  if  $a_i \neq 0_i$ , then we call this (unique and idempotent)  $a^*$  the associated idempotent of  $a$ . If each element has an associated idempotent in  $R$ , then we call  $R$  an associate ring. A ring in which every element  $a$  satisfies an equation  $a^{n(a)} = a$  (where  $n(a)$  is a natural number depending on  $a$ , but greater than 1) is called a simply periodic ring. If  $a b^2 = a^2 b$  ( $a, b \in R$ ), then we say " $a$  is compatible to  $b$ ". By a maximal compatible set of  $R$  we mean a set  $M$  of pairwise compatible elements of  $R$  which is maximal in the sense that no other element of  $R$  is compatible with each element of  $M$ . If the maximal compatible set  $M$  contains an element  $u$  which has the property that  $a u = a^2$  for all  $a \in M$ , then we call  $u$  the uni-element of  $M$ ; it may be shown that a uni-element of a set  $M$  is unique. — Results: Domains of integrity are (by definition) associate rings in which the identity is the associated idempotent of each element different from 0. Regular rings with identity and without proper nilpotent elements are associate rings. Simply periodic rings (in particular, Boolean and  $p$ -rings) with identity are commutative associate rings. In an associate ring the relation of compatibility is transitive for non-zero elements if and only if this ring is either a domain of integrity or a Boolean ring. Every maximal compatible set  $M$  with uni-element  $u$  in an associate ring  $R$  forms a distributive lattice with the operations  $x \cap y = x^* y$  ( $= x y^*$ ),  $x \cup y = x + y - x^* y$  ( $y \in M$ ) and with the greatest element  $u$ ; moreover, any two such sets are lattice-isomorphic. G. Szsz.

**Drazin, M. P.:** A generalization of polynomial identities in rings. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 352—361 (1957).

The author defines a pivotal monomial for a ring  $R$  with operators  $F$  in the following way: let  $y_1, \dots, y_t$  be indeterminates over  $R$  and consider a monomial



$\pi(y) = y_{i_1} \cdots y_{i_d}$ , where the subscripts are taken independently of each other; the degree of this monomial is  $d$ . Let  $P_\pi$  denote the set of monomials of this form different from  $\pi$ .  $\pi$  is then called a right pivotal monomial if, for any set  $x_1, \dots, x_t$  of elements of  $R$ ,  $\pi(x)$  lies in the ideal generated in  $R$  by all the elements of  $P_\pi$  after the substitution  $y_i \rightarrow x_i$ . It is strongly pivotal if this is true for the subset of  $P_\pi$  consisting of those monomials of degrees  $\geq d$ . The author first considers rings for which pivotal monomials and strongly pivotal ones exist. Among these are found to be: rings with minimal conditions on either left or right ideals, algebraic algebras of bounded degrees,  $PI$ -algebras. Next, primitive rings which have pivotal monomials are considered; it is shown, for example, that such a ring is isomorphic to a complete matrix ring over a division ring. The last section of the paper is concerned with a generalization of the pivotal monomial concept.

*F. Levin.*

**McLeod, J. B.:** On the commutator subring. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 9, 207—209 (1958).

Let  $S$  be an algebra with identity over a field  $K$  such that  $S$  is generated by  $f$  elements. In the note under review, the author shows that if  $f = 2$  and  $K$  has infinite characteristic then the commutator subring of  $S$  is actually an ideal of  $S$ . He also shows by examples that the theorem fails if  $K$  is  $GF(2)$  and  $f = 2$  and that it also fails if  $K$  is arbitrary and  $f \geq 3$ .

*J. P. Jans.*

**Yoshii, Tensho:** On algebras of left cyclic representation type. Osaka math. J. 10, 231—237 (1958).

Die Algebra  $A$  endlichen Ranges mit dem Radikal  $N$  habe die direkte Zerlegung in direkt unzerlegbare Komponenten  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{f(i)} A e_{ij}$  mit  $A e_{ij} \cong A e_{i1} = A e_i$ .

Wenn jeder unzerlegbare  $A$ -Linksmodul homomorph zu einem  $A e_i$  ist, heißt  $A$  vom links-zyklischen Darstellungstyp. Verf. beweist, daß die beiden folgenden Bedingungen zusammen für diese Eigenschaft notwendig und hinreichend sind: (1) Jedes  $e_i N$  besitzt nur eine Kompositionsreihe. (2) Jedes  $N e_i$  ist die direkte Summe von höchstens zwei zyklischen Linksidealen, die homomorph zu  $A e_j$  sind und von denen jedes nur eine Kompositionsreihe besitzt.

*R. Kochendörffer.*

**Kostrikin, A. I. and I. R. Šafarevič (Shafarevich):** The homology groups of nilpotent algebras. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 1066—1069 (1967) [Russisch].

The authors announce numerical results concerning the homology groups  $H^n(N, k)$  of a nilpotent associative algebra  $N$  of finite rank  $r$  over an arbitrary field  $k$ . Their treatment includes the group algebras of a finite  $p$ -group over the field with  $p$  elements (or the homology groups  $H^n(G, \mathbb{Z}_p)$ , where  $G$  is a finite  $p$ -group). Let  $b_n$  denote the  $n$ -dimensional Betti number of  $N$ , i.e. the dimension of  $H^n(N, k)$  as a vector space over  $k$ , and  $R_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$  the associated Poincaré function.  $R_G(t)$  is similarly defined. The relation  $F(t) \gg G(t)$  between two power series shall mean coefficientwise majorization. Theorem 1. If  $N = \sum_{i=1}^m \oplus N_i$  is a direct sum of  $m$  nilpotent algebras, then

$$\frac{1}{R_N(t)} - 1 = \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{R_{N_i}(t)} - 1 \right).$$

Theorem 2. The Betti numbers of  $N$  satisfy the inequalities

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i b_{n-i} \geq \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \quad \text{or} \quad \frac{1}{1+t} R_N(t) \gg \frac{1}{1-t^2}.$$

In particular,  $b_2 \geq b_1$ . This means that the number of non-equivalent extensions of a group of order  $p$  by a  $p$ -group with  $d$  generators is not less than  $p^d$ . An immediate consequence is Theorem 3. The Betti numbers of a nilpotent algebra or of a finite

$p$ -group are positive. Theorem 4 gives an inequality in the opposite direction:  $R_N(t) \ll 1/(1-r t)$ . Theorem 5. If  $k$  is a finite field and the Betti numbers are bounded, then  $R_N(t)$  is a rational function. The authors give a number of examples to show that in special cases the inequalities can be used for the actual computation of the Betti numbers.

*K. A. Hirsch.*

**Lesieur, Léonce et Robert Croisot: Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires.** C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 517—520 (1958).

Les AA. caractérisent les idéaux tertiaires d'un anneau ou d'un demi-groupe (et les sous-modules tertiaires d'un module) à l'aide de la notion de résiduel essentiel précédemment introduite (ce. Zbl. **80**, 29). Les idéaux tertiaires non triviaux sont caractérisés par l'existence d'un seul résiduel essentiel. Les résiduels essentiels d'un idéal (ou d'un sous-module)  $X$  coïncident avec les idéaux (ou les sous-modules) premiers associés à une décomposition de  $X$  comme intersection réduite d'idéaux (ou de sous-modules) tertiaires.

*J. Guérindon.*

**Lesieur, L. et R. Croisot: Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif. III: Sur la notion de radical.** Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **44**, 75—93 (1958).

La théorie noetherienne présentée ici, continue celle de deux précédents articles [v. Centre Belge Rech., math., Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles 1956, 79—121 (1957); ce Zbl. **80**, 28]. Utilisant toujours une extension de la théorie des treillis multiplicatifs résidués, on présente ici d'autres notions de radicaux, rattachées aux définitions d'éléments tertiaires, primaux ou unirésidués. On en déduit trois nouveaux types de radicaux et la définition des idéaux primaires, secondaires, unirésidués, tertiaires ou primaux. Les cas d'égalité de ces trois radicaux sont étudiés en présence d'une condition de chaîne ascendante pour les résiduels à droite et pour les résiduels à gauche, ainsi que les implications entre les notions correspondantes pour les idéaux.

*J. Guérindon.*

**Thierrin, Gabriel: Sur les idéaux fermatiens d'un anneau commutatif.** Commentarii math. Helvet. **32**, 241—247 (1958).

Mit festen natürlichen Zahlen  $n > 1$ ,  $r \geq 1$  definiert Verf.: Ein Ideal  $M$  des kommutativen Ringes  $A$  heißt ein  $(n, r)$ -fermatsches Ideal, wenn aus  $\sum_{i=1}^r a_i^n \in M$

die Beziehung  $\sum_{i=1}^r a_i \in M$  folgt. Ein Ring heißt ein  $(n, r)$ -fermatscher Ring, wenn sein Nullideal ein  $(n, r)$ -fermatsches Ideal ist. Verf. beweist, daß jedes  $(n, r)$ -fermatsche Ideal semi-prim ist (aus  $x^2 \in M$  folgt  $x \in M$ ). Das  $(n, r)$ -fermatsche Radikal eines beliebigen Ideals  $M$  ist der Durchschnitt aller  $(n, r)$ -fermatschen Ideale, die  $M$  enthalten; es ist der Durchschnitt  $(n, r)$ -fermatscher Primideale. Jeder  $(n, r)$ -fermatsche Ring  $(\neq 0)$  ist isomorph einer subdirekten Summe  $(n, r)$ -fermatscher Integritätsbereiche. Ein Ideal heißt  $n$ -fermatsch, wenn es für alle natürlichen Zahlen  $r \geq 1$  ein  $(n, r)$ -fermatsches Ideal ist. Für die  $n$ -fermatschen Ideale gelten entsprechende Sätze wie für die  $(n, r)$ -fermatschen.

*R. Kochendörffer.*

**Nöbauer, Wilfried: Über die Operation des Einsetzens in Polynomringen.** Math. Ann. **134**, 248—259 (1958).

Führt man im Ring  $R = r[x]$  der Polynome in einer Transzendenten  $x$  über einem kommutativen Ring  $r$  mit Eins neben Addition und Multiplikation die dritte Operation  $f(x) \circ g(x) = f(g(x))$  des Einsetzens ein, so wird der Ring  $R$ , der hinsichtlich dieser Operation eine Halbgruppe mit Einheit  $f(x) = x$  bildet, eine Algebra vom Typus  $\langle 2, 2, 2 \rangle$ . Die homomorphen Bilder dieser Algebra  $R$  werden (als Restklassenalgebren) bestimmt durch die Vollideale  $A \subseteq R$ , die neben den gewohnten Idealeigenschaften der Bedingung genügen: Aus  $a(x) \equiv 0(A)$  und  $f(x) \equiv 0(R)$  folgt  $a(f(x)) \equiv 0(A)$ . Das von einem Ideal  $\alpha \subseteq r$  erzeugte Ideal  $(\alpha) \subseteq R$  ist ein Vollideal; ebenso ist die Menge  $\{a\}$  aller Polynome  $w(x) \in R$ , deren



Werte  $w(\varrho)$  für jedes  $\varrho \in \mathfrak{r}$  dem Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$  angehören, ein Vollideal. Zu jedem Vollideal  $A \subseteq R$  existiert genau ein Umschließungsideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$ , das der Bedingung  $\langle \mathfrak{a} \rangle \subseteq A \subseteq \{\mathfrak{a}\}$  genügt. Der Idealverband in  $R$  (und in  $\mathfrak{r}$ ) kann durch Hinzunahme der Produktbildung für Ideale als Algebra vom Typus  $\langle 2, 2, 2 \rangle$  gedeutet werden. In der Idealalgebra von  $R$  bildet die Menge aller Vollideale eine Teilalgebra  $\mathfrak{T}$ . Die Abbildung der Vollideale  $A \subseteq R$  auf ihre Umschließungsideale  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$  bestimmt einen Homomorphismus der Algebra  $\mathfrak{T}$  auf die Idealalgebra von  $\mathfrak{r}$ . Der Restklassenring  $R/A$  nach einem Vollideal ist wie  $R$  eine Ringhalbgruppe  $\mathfrak{S}(A)$  (mit Einheit) hinsichtlich der Operation  $\circ$  des Einsetzens. Die Menge aller invertierbaren Elemente von  $\mathfrak{S}(A)$  ist die Ringgruppe  $\mathfrak{R}(A)$ . Für Vollideale  $B \subseteq A \subseteq R$  existiert ein natürlicher Homomorphismus  $\mathfrak{S}(B)^{\varphi} = \mathfrak{S}(A)$  mit  $\mathfrak{R}(B)^{\varphi} = \mathfrak{R}(A)$ ; für Vollideale  $A, B \subseteq R$  mit dem Durchschnitt  $A \cap B$  existiert ein Isomorphismus  $\mathfrak{S}(A \cap B)^{\eta} \subseteq \mathfrak{S}(A) \times \mathfrak{S}(B)$  mit  $\mathfrak{R}(A \cap B)^{\eta} \subseteq \mathfrak{R}(A) \times \mathfrak{R}(B)$ , wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn  $A$  und  $B$  teilerfremd sind. — Bildet man für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$  die Ringhalbgruppe  $\mathfrak{S}(\{\mathfrak{a}\})$  des Vollideals  $\{\mathfrak{a}\} \subseteq R$ , so bestimmt jedes Element  $F \in \mathfrak{S}(\{\mathfrak{a}\})$  eine eindeutige Abbildung  $F^{\pi}$  des Restklassenringes  $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$  durch die Festsetzung  $F^{\pi}x \equiv f(x)(\mathfrak{a})$ . Die Zuordnung  $F \rightarrow F^{\pi}$  bestimmt einen Isomorphismus der Ringhalbgruppe  $\mathfrak{S}(\{\mathfrak{a}\})$  in die Halbgruppe aller eindeutigen Abbildungen von  $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$  in sich und einen Isomorphismus der Ringgruppe  $\mathfrak{S}(\{\mathfrak{a}\})$  in die symmetrische Gruppe  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{r}/\mathfrak{a}}$ . Bezeichnet  $\varphi$  für ein Vollideal  $A \subseteq R$  mit dem Umschließungsideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$  den natürlichen Homomorphismus von  $\mathfrak{S}(A)$  auf  $\mathfrak{S}(\{\mathfrak{a}\})$ , so bestimmt die Abbildung  $F \rightarrow F^{\tau} = F^{\varphi\pi}$  einen Homomorphismus  $\tau$  von  $\mathfrak{S}(A)$  in die Halbgruppe aller eindeutigen Abbildungen von  $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$  in sich, wobei  $\mathfrak{S}^{\tau}(A) = \mathfrak{S}^{\pi}(\{\mathfrak{a}\})$  und  $\mathfrak{R}^{\tau}(A) \subseteq \mathfrak{R}^{\pi}(\{\mathfrak{a}\})$ . Die Zuordnung  $A \rightarrow \mathfrak{R}^{\tau}(A)$  bestimmt eine ordnungshomomorphe Abbildung des Zwischenverbandes  $\{\mathfrak{a}\}/(\mathfrak{a})$  im Vollidealverband von  $R$  in den Zwischenverband  $\mathfrak{R}^{\tau}(\{\mathfrak{a}\})/\mathfrak{R}^{\tau}(\mathfrak{a})$  des Untergruppenverbandes der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{r}/\mathfrak{a}}$ . — Anwendungen auf das Beispiel  $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$  des Ringes aller ganzen rationalen Zahlen.

W. Specht.

**Sancho de San Roman, J.:** Über die Bewertungen, die den Spezialisierungen eines bewerteten Körpers zugeordnet sind. *Revista mat. Hisp.-Amer.* 18, 244—251 (1958) [Spanisch].

Soit  $\mathfrak{o}$  un anneau d'intégrité avec le corps quotient  $\Sigma$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $\mathfrak{o}$  et  $\Sigma'$  le corps quotient de l'anneau résiduel  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ . Chaque valuation  $v$  de  $\Sigma$  subordonne d'une façon „naturelle“ une valuation  $v'$  de  $\Sigma'$ . L'A. établit les conditions pour que cette valuation  $v'$  ne soit pas triviale. On résout aussi la question de déterminer les valuations  $v$  de  $\Sigma$  qui subordonnent sur  $\Sigma'$  une valuation donnée  $v'$ . *G. Ancochea.*

**Jaffard, Paul:** Dimension des anneaux de polynomes: La notion de dimension valuative. *C. r. Acad. Sci., Paris* 246, 3305—3307 (1958).

Appelant pour tout anneau  $A$ , commutatif et intègre, de corps des quotients  $K$ , dimension valuative  $\dim_v A$ , le rang de plus élevé des valuations (de Krull) de  $K$  dont l'anneau associé contient  $A$ , on voit que  $\dim_v A \geq \dim A$ , dimension ordinaire. Si on désigne par  $A^{(n)}$  l'anneau des polynômes à  $n$  variables sur  $A$ , on a alors  $\dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A$ . Alors pour que  $\dim_v A < +\infty$ , il faut et il suffit que pour  $n$  grand on ait, pour un  $\delta$  convenable,  $\dim A^{(n)} = n + \delta$  et on a alors  $\dim_v A = \delta$ . La dimension valuative coïncide avec la dimension ordinaire dans les anneaux noethériens et aussi dans le cas des anneaux de Prüfer. La théorie repose sur la théorie classique des valuations et sur le théorème d'extension des spécialisations.

J. Guérindon.

● **Kaplansky, I.:** Einführung in die Galois'sche Theorie. Noten, redigiert von **Elon Lages Lima**. *Notas Mat.* Nr. 13, 153 p. (1958). [Spanisch].

C'est un exposé clair, élémentaire et rigoureux de la théorie de Galois (pour les extensions finies!) suivant la ligne de l'opuscule déjà classique d'Artin. D'une

lecture très attrayante, on y trouve beaucoup de références bibliographiques toujours utiles et tous les paragraphes se terminent avec des exercices très bien choisis.

*G. Ancochea.*

● **Kaplansky, Irving:** An introduction to differential algebra. (Actual. sci. industr., Nr. 1251. Publ. Inst. Math. Univ. Nancago V.) Paris: Herman & Cie. 1957. 62 p.

As the author states in the preface, this small book on differential algebra is an effort toward making "the subject more easily accessible to the mathematical community". The reader with a reasonable background in ordinary algebra plus some elementary point-set topology will find this book a clear and concise, self-contained introduction to the basic works of Ritt on differential algebra, to those of Kolchin on the Picard-Vessiot theory and Galois theory of differential fields, and to the theory of algebraic matrix groups. Probably the only criticism has to do with the numerous typographical errors in the proofs of various theorems; the inclusion of a list of errata would not be out of order. However, the statements of the theorems seem generally to be free of errors. Aside from these relatively minor objections the book certainly achieves its purpose and can be easily recommended.

*F. Levin.*

**Seidenberg, A.:** An elimination theory for differential algebra. Univ. California Publ. Math., n. Ser. 3, 31—66 (1957).

The paper is divided into four parts: Part I deals with setting up an elimination theory for a system of ordinary differential equations in several differential indeterminates over a field  $K$  of characteristic 0. In particular, an algorithm is derived for solving a simultaneous system of polynomials  $F_i = 0$ ,  $G \neq 0$ . The results are then used to give a constructive form of Hilbert's Nullstellensatz for differential polynomials. Part II deals with extending the previous theory to characteristic  $p \neq 0$ . In order to obtain similar results the author makes the assumption that every constant in the field  $K$  has a  $p$ -th root in the field. The situation where this restriction is lifted is also considered, but to secure a similar theory the results must be limited to the separable solutions, and it is assumed that it is possible to decide whether a set of constants is linearly independent over  $K^p$ . Part III is an extension of part I to partial differential systems. The general system is replaced by a "maximal canonically reduced system" whose definition is too long to reproduce here. The author shows that the solutions of such a system consists of a finite number of solutions and certain of their specializations. In addition, the problem of determining the number of steps in the algorithm is studied. Part IV extends part III to characteristic  $p \neq 0$ . Among others, the considerations in part II apply here again. However, in this case it is the weak Nullstellensatz which is the end product rather than the strong form as in the other parts of the paper.

*F. Levin.*

**Dieudonné, Jean:** Le calcul différentiel dans les corps de caractéristique  $p > 0$ . Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 1, 240—252 (1957).

This is mainly an expository article. The purpose is to provide an introduction and motivation to certain topics in differential algebra which are as follows: derivations and semi-derivations; formal Lie groups and Lie hyperalgebras; homomorphisms and subgroups of formal Lie groups.

*F. Levin.*

**Krishnan, V. S.:** Topological algebra. Math. Student 26, 57—60 (1959).

Kurzer Bericht über die Anwendungen algebraischer Methoden in der Topologie und topologischer Methoden in der Algebra. Erwähnt werden einerseits die Booleschen Algebren, sowie die Homologie- und Cohomologietheorie, andererseits die topologischen Gruppen.

*H.-J. Kowalsky.*

**Szele, Tibor:** On a topology in endomorphism rings of abelian groups. Publ. math. Debrecen 5, 1—4 (1957).



Verf. zeigt, daß der Endomorphismenring einer diskreten abelschen Gruppe in der Topologie der einfachen Konvergenz vollständig ist usw. Der Artikel ist die Ausarbeitung eines Vortrages des Verf. aus dem Jahre 1955 durch J. Erdős und A. Kertesz.  
H. Leptin.

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

Grebenjuk, D. G.: Zur Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, die von einer Wurzel einer irreduziblen Gleichung vierten Grades abhängen. Izvestija Akad. Nauk UzSSR, Ser. fiz.-mat. 1958, Nr. 6, 27—47 (1958) [Russisch].

In einer früheren Arbeit [Bull. Univ. Taškent 11, 19—43 (1925)] hatte Verf. eine Ganzheitsbasis für biquadratische Zahlkörper angegeben. Dabei waren vier simultane Kongruenzen nach gewissen Diskriminantenteilern als Moduln zu lösen. Die vorliegende Arbeit ist einer näheren Untersuchung dieser Kongruenzen und der Bestimmung ihrer Moduln gewidmet.  
R. Kochendörffer.

Terada, Fumiuki: On the principal genus theorem concerning the Abelian extensions. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 141—152 (1952).

Es wird folgende Verallgemeinerung des für zyklische Körper bekannten Hauptgeschlechtssatzes [vgl. etwa Hasse, Zahlbericht Ia, J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. 36, 233—311 (1927), insbesondere S. 304—310] bewiesen: Sei  $K|k$  eine abelsche Erweiterung des algebraischen Zahlkörpers  $k$  mit der Galoisgruppe  $\mathfrak{g} = \{r, s, t, \dots\}$ , dem Führer  $\mathfrak{f}$  und dem Geschlechterführer  $\mathfrak{F}$ , ferner  $\mathfrak{m}$  ein ganzes Ideal in  $k$ . Dann hat ein Idealsystem  $\{\mathfrak{A}(s) | s \in \mathfrak{g}\}$  von  $K$  die Eigenschaft, daß  $\mathfrak{A}(r)^t \mathfrak{A}(t) \mathfrak{A}(r t)^{-1} = (a(r, t))$  Hauptideal in  $k$  mit  $a(r, t) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m} \mathfrak{f}}$  ist, genau dann, wenn ein Ideal  $\mathfrak{B}$  und ein Zahlensystem  $\{A(r)\}$  in  $K$  existiert mit den Eigenschaften:  $\mathfrak{A}(r) = \mathfrak{B}^{1-r} (A(r))$ ,  $A(r) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m} \mathfrak{F}}$ ,  $A(r)^t A(t) A(r t)^{-1}$  in  $k$  und  $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{m} \mathfrak{f}}$ . Der Beweis erfolgt auf Grund eines Satzes über den Zerfall gewisser Zahlfaktorensysteme  $\{b(r, t)\}$  in  $K$ . Für eine modifizierte Verallgemeinerung des Hauptgeschlechtssatzes vgl. auch Kuniyoshi-Takahashi (dies. Zbl. 52, 274).  
W. Jehne.

Ono, Takashi: Sur une propriété arithmétique des groupes algébriques commutatifs. Bull. Soc. math. France 85, 307—323 (1957).

Sei  $V$  ein Vektorraum endlicher Dimension über einem endlich algebraischen Zahlkörper  $k$  und  $G$  eine algebraische Gruppe von Automorphismen von  $V$ . Mit  $i$  sei die Hauptordnung von  $k$  bezeichnet. Für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $k$  bilden wir die  $\mathfrak{p}$ -adischen Erweiterungen  $k^{\mathfrak{p}}, i^{\mathfrak{p}}, V^{\mathfrak{p}} = k^{\mathfrak{p}} V$ . Unter einem Gitter in  $V$  bzw.  $V^{\mathfrak{p}}$  verstehen wir einen endlich erzeugbaren  $i$ -Modul  $\mathfrak{S}$  bzw.  $i^{\mathfrak{p}}$ -Modul  $\mathfrak{S}^{\mathfrak{p}}$  von maximaler Dimension. Mit  $G^{\mathfrak{p}}$  wird die kleinste  $G$  enthaltende algebraische Gruppe von Automorphismen von  $V^{\mathfrak{p}}$  bezeichnet. Ist ein Gitter  $\mathfrak{S}^{\mathfrak{p}} \subset V^{\mathfrak{p}}$  gegeben, so bilden die  $\gamma^{\mathfrak{p}} \in G^{\mathfrak{p}}$  mit  $\gamma^{\mathfrak{p}} \mathfrak{S}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{S}^{\mathfrak{p}}$  eine Untergruppe  $U^{\mathfrak{p}} \subseteq G^{\mathfrak{p}}$ , die Einheitengruppe von  $\mathfrak{S}^{\mathfrak{p}}$ . Zwei Gitter  $\mathfrak{S}, \mathfrak{R} \subset V$  heißen äquivalent, wenn  $\mathfrak{R} = \gamma \mathfrak{S}$  mit einem  $\gamma \in G$  gilt; sie heißen verwandt, wenn für alle  $\mathfrak{p}$  ein  $\gamma^{\mathfrak{p}} \in G^{\mathfrak{p}}$  existiert, so daß  $\mathfrak{R}^{\mathfrak{p}} = \gamma^{\mathfrak{p}} \mathfrak{S}^{\mathfrak{p}}$  ist. Dabei sind für fast alle  $\mathfrak{p}$  die  $\gamma^{\mathfrak{p}}$  Einheiten von  $\mathfrak{S}^{\mathfrak{p}}$ . Äquivalente Gitter werden zu Klassen, verwandte zu Geschlechtern vereinigt. Der Hauptsatz der Arbeit lautet: Wenn  $G$  kommutativ ist, so besteht jedes Geschlecht aus nur endlich vielen Klassen. Dieser bemerkenswerte Satz umfaßt als Spezialfall die Aussage, daß die Idealklassenzahl eines algebraischen Zahlkörpers endlich ist, welche hier allerdings nicht erneut bewiesen, vielmehr zum Beweis des allgemeinen Satzes herangezogen wird. Ist  $G$  die orthogonale Gruppe bez. einer quadratischen Form (also nicht mehr kommutativ), so besagt der Satz, daß ein Geschlecht quadratischer Formen aus nur endlich vielen Klassen besteht.  
M. Eichler.

Nering, Evar D.: Reduction of an algebraic function field modulo a prime in the constant field. Ann. of Math., II. Ser. 67, 590—606 (1958).

$K$  sei ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper  $k$  und  $h$  eine diskrete nicht-archimedische Bewertung von  $k$ . Ist  $x$  eine über  $k$  transzendente Größe von  $K$ , so werde  $h$  durch

$$h \left[ \left( \sum_{v=0}^r a_v x^v \right) \left( \sum_{v=0}^s b_v x^v \right)^{-1} \right] = (\text{Max} \{h(a_v)\}) (\text{Max} \{h(b_v)\})^{-1}$$

$a_v \in k$  zu einer Bewertung von  $F = k(x)$  erweitert. In  $K$  zerfalle  $h = \prod_{i=1}^s H_i^{e(H_i)}$ ,

$K_i$  sei der Restklassenkörper von  $K$  modulo  $H_i$ ,  $k$  der Restklassenkörper von  $k$  modulo  $h$  und  $k_i$  der Konstantenkörper von  $K_i$  mit dem Grad  $r_i$  über  $k$ . Verf. beweist, daß zwischen den Geschlechtern  $g$  von  $K$  und  $g_i$  von  $K_i$  die Relation  $g - 1 = \sum_{i=1}^s r_i e(H_i) (g_i - 1) + \varrho$  besteht. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Radikalgrade aller  $H_i$  gleich 1 sind. Die Zahl  $\varrho \geq 0$  hat folgende Bedeutung. Ist  $K^*$  der Ring der Elemente von  $K$ , die bei allen Erweiterungen von  $h$  ganz sind und bezeichnet  $h$  auch ein Primelement bei  $h$ , so sei  $\bar{K}$  der Restklassenring  $K^*/h K^*$ .  $2\varrho$  ist dann der Grad der Norm  $N_{K|F} \bar{f}$  des Führers  $\bar{f}$  von  $K$  in bezug auf  $\bar{K}$ . W. Engel.

## Zahlentheorie:

• **Holzer, Ludwig: Zahlentheorie. Teil II.** (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek. Bd. 14.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1959. V, 126 S. DM 9,—.

Die im Abschnitt C des I. Teiles (dies. Zbl. 81, 37) begonnene Theorie der algebraischen Zahlen wird hier systematisch fortgeführt. Wieder wird von der modernen Algebra, deren Kenntnis eine Voraussetzung zur leichten Lesbarkeit des Buches ist, ausgiebiger Gebrauch gemacht. Diese Voraussetzung wird dann aber durch oft verblüffend einfachen Beweisgang und sehr ansprechende Darstellung reichlich belohnt. Die nunmehrigen Abschnitte sind: A. Weiterführung der Zahlkörpertheorie und B. Vorbereitende Ergebnisse zur Klassenkörpertheorie. Daß diese selbst dabei nicht gebracht wird, kann man nicht als Mangel empfinden; es würde den Rahmen des Buches sprengen. Der Abschnitt A bringt nach vorbereitenden Kapiteln über Einheiten, Primitivwurzeln nach einem Primideal, Relativdiskriminante und Relativedifferenten ausführlich die Hilbertsche Theorie des Galoisschen Körpers, im besonderen dabei die Durchsprechung aller möglichen Fälle beim Galoisschen Körper 6. Grades über einem kubischen Körper. Daran schließt sich die Primidealzerlegung in relativ zyklischen Körpern von Primzahlgrad über einem Grundkörper, der die betreffende Einheitswurzel enthält, an. — Der Abschnitt B gilt anfangs der Bestimmung der Klassenzahl mit dem Regulator (natürlich Begriffe der Funktionentheorie vorausgesetzt), wobei wieder der reell quadratische Körper einen breiten Raum einnimmt. Hier bietet sich auch Gelegenheit, die in Teil I angekündigte Vorzeichenbestimmung recht elegant nachzutragen. Die folgenden Kapitel über relativ-zyklische Körper, unendliche Primstellen und das Einheitenhauptgeschlecht lehnen sich stark an die Untersuchungen von H. Hasse an. Es ist ferner besonders dankenswert, daß hier auch ein schöner unveröffentlichter Isomorphiesatz (1932 im Mathematischen Seminar in Graz gebracht) von T. Rella († 1945) vor Vergessenheit bewahrt und entsprechend gewürdigt wird. Er gestattet so manche Anwendung und kürzt so manchen Beweis erheblich ab. So gelangt man zum Theorem von Moriya (1930) über Klassenzahl und Anzahl der ambigen Klassen, durch dieses wieder sehr einfach auf den Satz von Pollaczek, daß für eine reguläre Primzahl  $l$  auch die Klassenzahl im Körper der  $l^2$ -ten Einheitswurzeln nicht durch  $l$  teilbar ist. Die schwierigen Probleme der Hauptidealisierung sind herausgestellt und Einzelresultate



gegeben. Den Abschluß bildet eine Verschärfung der Idealnormschranke in reell quadratischen Körpern. — So rundet sich das Werk organisch ab und hat gehalten. was Teil I versprach. *A. Aigner.*

● **Hua, Loo-keng:** Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. (Enzyklopädie Math. Wiss. 2. völlig Neubearb. Aufl. Band. I. 2. Teil, Heft 13, Art. 29). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1959. 123 S. DM 13,—.

Das vorliegende Heft gibt nicht nur im Rahmen der Enzyklopädie einen bedeutenden Beitrag, sondern stellt auch für sich allein genommen eine wesentliche Bereicherung der mathematischen Literatur dar, und dies um so mehr, als hier der Stoff von einem ausgesprochenen Kenner dargelegt wird, der selbst mit zahlreichen eigenen Arbeiten am Aufbau dieses mathematischen Zweiges beteiligt ist. — Die Abschätzung von Exponentialsummen (trigonometrischen Summen) stellt heute einen integrierenden Bestandteil bei der Untersuchung des Goldbachschen und Waringischen Problems dar. — Inhaltsübersicht: A. Elementare Methoden. Behandelt werden u. a. der Linniksche Beweis des Waringproblems, die Siebmethode und der Schnirelmannsche Beitrag zum Goldbachproblem, der elementare Beweis des Primzahlsatzes (A. Selberg). — B. Abschätzung von Exponentialsummen. Beginnend mit den Methoden von Weyl und van der Corput nimmt der Vinogradovsche Mittelwertsatz eine zentrale Stellung ein. Es werden Folgerungen aus diesem Satz gezogen; die Diskussion der Exponentialsummen wird weitergeführt. — C. Primzahlverteilung. Hier werden die analytischen Methoden der Primzahltheorie besprochen; über zahlreiche Einzelergebnisse wird berichtet. — D. Das Waringische Problem. Es wird die analytische Behandlungsweise dargelegt: die Abschätzungen der beiden Basisordnungen  $g(k)$  und  $G(k)$  werden besprochen sowie einige Verallgemeinerungen des Waringproblems angegeben. Schließlich wird noch der Tarry-Escottische Fragenkreis angeschnitten. — E. Das Goldbachsche Problem. In diesem Kapitel werden der Vinogradovsche Satz nebst Verallgemeinerungen, das klassische Goldbachproblem bezüglich der geraden Zahlen, das Goldbach-Waring-Problem und eine Übertragung des Tarry-Escott-Problems behandelt. — F. Gleichverteilung und G. Weitere zahlentheoretische Funktionen bilden den Inhalt der letzten beiden Kapitel. Am Schluß findet sich in Tabellenform eine Übersicht über die behandelten Probleme mit Angabe der neuesten Ergebnisse.

*H. Ostmann.*

● **Yahya, Q. A. M. M.:** Complete proof of Fermat's last theorem. Lahore, Pak.: Ripon Book Depot 1957. 14 p.

Ausgehend von der durch Kapferer (dies. Zbl. 7, 4) gegebenen äquivalenten Formulierung der Fermatschen Vermutung gibt Verf. einen lückenhaften — elementar zahlentheoretisch gehaltenen — Beweisversuch. Die Größen  $t$  und  $u$  können auf S. 11 durchaus irrational sein, auch wenn Summe und Produkt rational sind; auch  $t^3$  und  $u^3$  brauchen nicht rational zu sein.

*H. Ostmann.*

**Jankowska, S.:** Les solutions du système d'équations  $\varphi(x) = \varphi(y)$  et  $\sigma(x) = \sigma(y)$  pour  $x < y < 10000$ . Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 541—543, russ. Zusammenfassg. XLV (1958).

Verf. betrachtet die Lösungen der Gleichungen  $\varphi(x) = \varphi(y)$ ,  $\sigma(x) = \sigma(y)$ , wobei  $\varphi$  die Eulersche  $\varphi$ -Funktion,  $\sigma$  die Summe der positiven Teiler bezeichnet. Wenn  $x, y$  Lösung ist, so auch  $x_1 = ax$ ,  $y_1 = ay$  für zu  $xy$  teilerfremdes  $a$ . Eine Lösung  $(x_1, y_1)$  heißt primitiv, wenn sie nicht mit einem  $a > 1$  in der obigen Form durch eine „kleinere“ Lösung  $(x, y)$  ausdrückbar ist  $[(ax, y) = 1]$ . Die Anzahl der primitiven Lösungen mit  $x_1 < y_1 < 10000$  ist = 27. Davon gibt es nur 16, für die außerdem  $d(x_1) = d(y_1)$  ist ( $d$  = Anzahl der positiven Teiler). Einige Vermutungen der Verf. wurden von P. Erdős bewiesen. (Vgl. das nachstehende Ref.)

*K. Prachar.*

**Erdős, P.:** Solution of two problems of Jankowska. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 545—547, russ. Zusammenfassg. XLV—XLVI (1958).

Von Jankowska (vgl. vorstehendes Referat) wurde die Frage gestellt, ob es unendlich viele Paare teilerfremder natürlicher Zahlen  $a, b$  gibt, für die gleichzeitig gilt:  $\varphi(a) = \varphi(b)$ ,  $\sigma(a) = \sigma(b)$ ,  $d(a) = d(b)$  (wobei  $\varphi$  die Eulersche  $\varphi$ -Funktion,  $\sigma$  die Summe der Teiler,  $d$  deren Anzahl bedeutet); ferner, ob für jedes  $k$  ein  $k$ -Tupel natürlicher Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  existiert, für das gilt:  $a_i \neq a_j$ ,  $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ ,  $\sigma(a_i) = \sigma(a_j)$ ,  $d(a_i) = d(a_j)$  für alle  $1 \leq i < j \leq k$ . Der Verf. beweist, daß die beiden Vermutungen richtig sind und führt eine Reihe eigener — bisher unbewiesener — Vermutungen an: 1. Kann man zusätzlich  $(a_i, a_j) = 1$  verlangen? 2. Sei  $A(n)$  die Anzahl der Lösungen von  $\varphi(x) = n$ ; gilt dann  $\sum_{n \leq x} A(n)^2 > x^{2-\varepsilon}$ ? 3. Gilt  $A(n) > n^{1-\varepsilon}$  für unendlich viele  $n$ ? 4. Kann man für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Folge von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen  $n+i$ ,  $1 \leq i \leq n^{1-\varepsilon}$  finden, für die  $\varphi(n+i_1) \neq \varphi(n+i_2)$  ist (für alle  $0 \leq i_1 < i_2 \leq n^{1-\varepsilon}$ )? K. Prachar.

**Erdős, Paul:** On an elementary problem in number theory. Canadian math. Bull. **1**, 5—8 (1958).

Given  $0 < x \leq y$ , the author seeks an estimate of the smallest  $f(x)$  so that there exist integers  $u, v$  satisfying (1)  $0 \leq u, v < f(x)$  and  $(x+u, y+v) = 1$ . He proves that for every  $\varepsilon > 0$  there exist arbitrarily large  $x$  satisfying

$$(2) \quad f(x) > (1 - \varepsilon) (\log x / \log \log x)^{1/2},$$

but for some  $c > 0$  and all  $x$ , (3)  $f(x) < c \log x / \log \log x$ . The author indicates that it seems a difficult problem to get a sharp estimate of  $f(x)$ . He proves also the Theorem. Let  $g(x) (\log x / \log \log x)^{-1} \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq x < y$ . Then the number of pairs  $0 \leq u, v < g(x)$  satisfying  $(x+u, y+v) = 1$  equals  $(1 + o(1)) 6\pi^2 g^2(x)$ .

J. P. Tull.

**Corput, J. G. van der:** Some identities and inequalities involving maxima and minima. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 239—251 (1958).

Gegeben seien  $m$  und  $n$  als natürliche Zahlen,  $Q = P_1 \cdots P_n$  das Produkt verschiedener Primzahlen,  $x_{\mu\nu}, y_{\mu\nu}$  reelle Zahlen mit  $y_{\mu\nu} \leq x_{\mu\nu}$ ,  $1 \leq \mu \leq m$ ,  $1 \leq \nu \leq n$ . Es sei  $z_{\mu\nu}(D) = x_{\mu\nu}$  für alle  $\nu$  mit  $P_\nu \nmid D$  und  $= y_{\mu\nu}$  für alle  $\nu$  mit  $P_\nu \mid D$ .  $f(v_1, \dots, v_m)$  sei für alle reellen  $m$ -Tupel  $v_1, \dots, v_m$  definiert. Verf. untersucht die Summe

$$S = \sum_{D \mid Q} \mu(D) f(\min(z_{11}(D), \dots, z_{1n}(D)), \dots, \min(z_{m1}(D), \dots, z_{mn}(D))),$$

wo  $\mu(D)$  die Möbiussche Funktion bezeichnet. Ein Teiler  $E$  von  $Q$  hat die Eigenschaft  $\Omega$ , wenn man zu jedem natürlichen  $\nu \leq n$  eine natürliche Zahl  $\mu$  finden kann, so daß für jeden Primfaktor  $P_\tau$  von  $E$   $y_{\mu\nu} \leq y_{\mu\tau}$  gilt. Nach verschiedenen Untersuchungen über Teiler von  $Q$  mit  $\Omega$  beweist Verf.

$$S = \sum_E \mu(E) f(\min(z_{11}(E), \dots, z_{1n}(E)), \dots, \min(z_{m1}(E), \dots, z_{mn}(E))),$$

wo  $E$  alle Teiler von  $Q$  mit der Eigenschaft  $\Omega$  durchläuft, und leitet ferner unter Voraussetzung der Monotonie von  $f(v_1, \dots, v_m)$  Abschätzungen für  $S$  nach oben und unten her.

H.-E. Richert.

**Prachar, Karl:** Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe. Monatsh. Math. **62**, 173—176 (1958).

$Q(x, k, l)$  bezeichne die Anzahl der quadratfreien Zahlen  $\leq x$ , die der arithmetischen Progression  $\nu k + l$ ,  $(k, l) = 1$  angehören. Verf. beweist mit einer von  $k$  unabhängigen  $O$ -Konstanten

$$Q(x, k, l) = A \frac{x}{k} + O(x^{1/2} k^{-1/4+\varepsilon} + k^{1/2+\varepsilon}), \text{ wo } A = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid k} (1 - p^{-2})^{-1}.$$

Hieraus folgt, daß die kleinste quadratfreie Zahl  $q_1(k, l)$  einer solchen Progression  $O(k^{3/2+\varepsilon})$  ist. Die entsprechenden Ergebnisse werden für  $r$ -freie ( $r \geq 2$ ) Zahlen in einer arithmetischen Progression hergeleitet.

H.-E. Richert.



**Bateman, P. T.:** Remark on a recent note on linear forms. Amer. math. Monthly **65**, 517—518 (1958).

Verf. hat in seinem Referat (dies. Zbl. **71**, 39) bemerkt, daß sich der von J. B. Roberts bewiesene Satz über die Lösbarkeit einer gewissen linearen diophantischen Gleichung einfacher beweisen läßt. Nun wird der wirklich einfache und kurze Beweis gebracht. N. Hofreiter.

**Ehrhart, Eugène:** Nombre de solutions de l'équation et de l'inéquation diophantiennes linéaires à trois inconnues. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 620—623 (1959).

1. Es sei  $f(X, Y, Z) = aX + bY + cZ$ ;  $a, b, c$  paarweise relativ prim. Ist  $N_n$  bzw.  $N_m$  die Anzahl der nicht-negativen ganzzahligen Lösungen von  $f(X, Y, Z) = n$  bzw.  $f(X, Y, Z) = m$ , so werden Zusammenhänge zwischen  $N_n$  und  $N_m$  in einigen Fällen angegeben. Ist z. B.  $n = q \cdot (abc) + r$ , dann gilt  $N_n = N_r + \frac{1}{2}q(n+r+a+b+c)$ . 2. Es sei  $g(X, Y, Z) = X/a + Y/b + Z/c$ ,  $a, b, c$  positiv und ganz. Ist  $N_k$  bzw.  $N_1$  die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen von  $g(X, Y, Z) < k$  bzw.  $g(X, Y, Z) < 1$ , so besteht zwischen  $N_k$  und  $N_1$  folgender Zusammenhang

$$N_k = k N_1 + \frac{abc}{6} k^3 - \frac{k^2}{4} (ab + bc + ca + \frac{abc}{m}) \\ + k \left( \frac{ab + bc + ca}{4} + \frac{abc}{4m} - \frac{abc}{6} + 1 \right) - 1,$$

wobei  $m = \{a, b, c\}$ .

N. Hofreiter.

**Ehrhart, Eugène:** Nombre de solutions de l'équation diophantienne linéaire à trois inconnues. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 758—761 (1959).

Es sei  $f(X, Y, Z) = aX + bY + cZ$ ,  $a, b, c$  positiv,  $(a, b, c) = 1$ ,  $\{a, b, c\} = m$ ;  $d = q \cdot m + r$ . Es sei  $N_d$  bzw.  $N_r$  die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen von  $f(X, Y, Z) = d$  bzw.  $f(X, Y, Z) = r$ . Es werden Beziehungen zwischen  $N_d$  und  $N_r$  abgeleitet. Ferner wird gezeigt: Sind  $a, b, c$  nicht paarweise relativ prim, so kann man die Gleichung  $f(X, Y, Z) = d$  durch eine Gleichung  $g(X, Y, Z) = k$  mit kleineren Koeffizienten ersetzen, ohne die Anzahl der Lösungen zu ändern.  $k$  geht durch einen einfachen Algorithmus aus  $d$  hervor. N. Hofreiter.

**Ehrhart, Eugène:** Sur les équations diophantiennes linéaires à plus de trois inconnues. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 896—899 (1959).

Es sei  $f(X_1, \dots, X_p) = a_1 X_1 + \dots + a_p X_p$ ,  $p \geq 4$ ;  $a_1, \dots, a_p$  positiv und paarweise relativ prim, und es sei  $d = q \cdot (a_1 \cdots a_p) + r$ . Es sei  $N_d$  bzw.  $N_r$  die Anzahl der nicht negativen ganzzahligen Lösungen von  $f(X_1, \dots, X_p) = d$  bzw.  $f(X_1, \dots, X_p) = r$ . Es werden Beziehungen zwischen  $N_d$  und  $N_r$  angegeben. N. Hofreiter.

**Ehrhart, Eugène:** Nombre de solutions d'un système d'inéquations diophantiennes linéaires à deux ou trois inconnues, à trois ou quatre si on lui adjoint une équation. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1096—1099 (1959).

Die Koeffizienten der Ungleichungen bzw. der Gleichungen seien numerisch gegebene Zahlen, die konstanten Glieder seien Vielfache eines ganzzahligen Parameters. Das System der Ungleichungen (und eventuell der Gleichung) bestimme einen endlichen Bereich, dessen Eckpunkte Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind. Es wird die Anzahl  $N$  der ganzzahligen Lösungen ermittelt. Dies beruht auf Beziehungen, die zwischen der Anzahl der Gitterpunkte im Innern, der Anzahl der Gitterpunkte am Rand und dem Volumen bestehen. N. Hofreiter.

**Moessner, Alfred:** Folgerungen aus den Gleichungen  $A \cdot B = C \cdot D$  und  $a^2 + b^2 = c^2$ . Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. **3** (7), Nr. 3/4, 7—13, russ. Zusammenfassg. 13 u. rumän. Zusammenfassg. 14 (1957).

Die genannten Gleichungen benützt Verf. zur Herstellung von Systemen multi-grader Gleichungen besonderer Form, etwa von solchen, in denen pythagoräische

Zahlentripel oder deren Potenzen auftreten, wie z. B. 7, 24, 25,  $34 \stackrel{i}{=} 14, 15, 31, 32$  ( $i = 2, 4, 6$ ) oder  $9^4, 12^4, 15^4, 1323, 31212, 45386 \stackrel{i}{=} 45^2, 171^2, 216^2, 5292, 22707, 49923$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).  
A. Aigner.

**Veidinger, L.:** On the distribution of the solutions of diophantine equations with many unknowns. Acta arithmetica 5, 15—24 (1959).

Verf. gibt eine obere Abschätzung für die Anzahl  $R(P)$  der ganzzahligen Lösungen  $x_1, \dots, x_r$  mit  $1 \leq x_v \leq P$ ,  $v = 1, \dots, r$ , einer Gleichung  $\Phi(x_1, \dots, x_r) = 0$ . Sind  $n \geq 3$ ,  $r \geq n \cdot 2^{n-1} + 1$ ,

$$\Phi(x_1, \dots, x_r) = a_1 x_1^n + \dots + a_r x_r^n + \varphi(x_1, \dots, x_r),$$

$a_r$  ganze Zahlen  $\neq 0$ ,  $\varphi$  ein Polynom vom Grade  $\leq n-3$  mit ganzen Koeffizienten, so beweist Verf. für jedes  $\varepsilon > 0$  und genügend großes  $P$   $R(P) \leq (\varrho + \varepsilon) |\mathfrak{S}| P^{r-n}$ . Dabei hängen  $\varrho$  und die „singuläre Reihe“  $\mathfrak{S}$  nicht von  $P$  ab. Der Beweis folgt der Vinogradovschen Methode und benutzt Abschätzungen von Weyl und vander Corput.  
H.-E. Richert.

**Nagell, Trygve:** Sur une classe d'équations exponentielles. Ark. Mat. 3, 569—582 (1958).

Es seien  $M_1, \dots, M_m, N_1, \dots, N_n, C$  natürliche, paarweise teilerfremde Zahlen. Verf. ergänzt einen Satz von Störmer und zeigt, daß  $\prod_{i=1}^m M_i^{x_i} - \prod_{j=1}^n N_j^{y_j} = C$  eine endliche Anzahl ganzzahliger Lösungen hat. Ferner bestimmt er sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichungen  $a^x + b^y - c^z = 0$ ,  $a^x - b^y + c^z = 0$ ,  $-a^x + b^y + c^z = 0$  für  $a = 2, b = 3, c = 5$ ;  $a = 2, b = 3, c = 7$ ;  $a = 2, b = 5, c = 7$ .  
B. Stoll.

**Erdős, P. and P. Scherk:** On a question of additive number theory. Acta arithmetica 5, 45—55 (1959).

Seien  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k$  ( $k \geq 2$ ) Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen aus dem Intervall  $[0, n]$  mit  $0 \in \bigcap_{\lambda=1}^k \mathfrak{A}_\lambda$ , derart, daß die Summenmenge  $\mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_k$  alle Zahlen  $0, 1, \dots, n-1$ , nicht aber die Zahl  $n$  enthält. Verff. untersuchen das asymptotische Verhalten der Funktion  $f_k(n) = \max \sum_{\lambda=1}^k A_\lambda(n)$ , wobei  $\{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k\}$  alle Mengensysteme mit den angegebenen Eigenschaften durchläuft. Der Fall  $k = 2$  führt auf die wohlbekannte Schranke  $f_2(n) = n-1$ . Für beliebiges  $k > 2$  wird die Ungleichung

$$\frac{kn}{2} - (k+1) 2^{2k-3} n^{(k-1)/k} < f_k(n) < \frac{kn}{2} - \frac{2^{-4-k/2}}{(k-1)!} n^{(k-1)/k}$$

hergeleitet. Der Beweis des linken Teiles gelingt durch explizite Angabe eines mit Hilfe von  $2^k$ -adischen Zifferndarstellungen konstruierten Beispiels; der des rechten Teiles ist schwieriger und erfordert zwölf, zum Teil komplizierte Hilfssätze. Verff. sprechen die Vermutung aus, daß eine negative (das Wort „positive“ auf S. 46, Z. 14 muß offensichtlich durch „negative“ ersetzt werden) Zahl  $\beta_k$  mit  $f_k(n) = kn/2 + (\beta_k + o(1)) n^{(k-1)/k}$  existiert.  
B. Volkmann.

**Wirsing, Eduard:** Eine Erweiterung des ersten Romanovschen Satzes. Arch. der Math. 9, 407—409 (1958).

Sei  $f(x)$  ein ganzwertiges Polynom mit positivem höchstem Koeffizienten, ferner, wenn  $\mathfrak{A}$  eine Menge von natürlichen Zahlen ist,  $f(\mathfrak{A})$  die Menge der natürlichen Zahlen  $f(a)$  mit  $a \in \mathfrak{A}$ , schließlich  $\mathfrak{Z}$  die Menge aller natürlichen Zahlen und  $\mathfrak{P}$  die Menge aller Primzahlen sowie der Zahl 1. Verf. beweist, daß die Summenmenge  $\mathfrak{P} + f(\mathfrak{A})$  positive asymptotische Dichte hat, wenn  $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$  gesetzt wird. Für  $f(x) = x$  ist dies ein bekannter Satz von Schnirelmann, und für  $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$  wurde die entsprechende Aussage von B. Hornfeck (dies. Zbl. 71, 270) bzw. im Spezialfall  $f(x) = x^k$  schon früher von N. P. Romanov (dies. Zbl. 9, 8) bewiesen. Der Beweis



verwendet außer Hilfsmitteln der genannten Autoren eine auf Titchmarsh zurückgehende Abschätzung, wonach die Anzahl der Primzahlen  $p \leq x$  mit  $p \equiv r \pmod{m}$   $m \leq x^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , unterhalb  $c(\alpha) x \varphi(m)^{-1} \log^{-1} x$  (mit von  $r$  und  $m$  unabhängigen  $c(\alpha)$ ) liegt.

B. Volkmann.

**Wang, Yuan:** On the representation of large even number as a sum of two almost-primes. Science Record, n. Ser. 1, 291—295 (1957).

By a combination of the methods of Brun-Buchstab-Selberg and Kuhn with some modifications, the author proves that every sufficiently large even integer can be represented as a sum of two integers  $> 1$ , of which one contains at most 2 and the other at most 3 prime factors.

L. K. Hua.

**Salzer, Herbert E. and Norman Levine:** Table of integers not exceeding 1 000 000 that are not expressible as the sum of four tetrahedral numbers. Math. Tables Aids Comput. 12, 141—144 (1958).

Die Tabelle enthält die Zahlen  $\leq 1\,000\,000$ , die nicht als Summe von vier Zahlen der Form  $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$  darstellbar sind. Verf. bemerken, daß überraschenderweise die Dichte solcher Ausnahmehzahlen sehr schnell abnimmt und führen ein Resultat von Hua (dies. Zbl. 24, 249) an, nach dem fast alle natürlichen Zahlen Summe von vier Zahlen der genannten Art sind. Sie vermuten, daß jede genügend große natürliche Zahl so darstellbar ist. Von G. L. Watson wurde bewiesen, daß jede Zahl Summe von 8 Zahlen der Form  $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$  ist (dies. Zbl. 46, 271).

K. Prachar.

**Kolberg, O.:** Identities involving the partition functions  $q(n)$  and  $q_0(n)$ . Math. Scandinav. 6, 80—86, S 6 (1958).

Es sei  $q(n)$  die Anzahl der Partitionen von  $n$  in ungerade Summanden,  $q_0(n)$  die Anzahl der Partitionen in ungerade und verschiedene Summanden. Verf. leitet nun sechs Identitäten über  $q$  und  $q_0$  her, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(5n) x^n \sum_{n=0}^{\infty} q(5n+2) x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} q(5n+1) x^n \right)^2.$$

E. Hlawka.

**Wright, E. M.:** Partitions of large bipartites. Amer. J. Math. 80, 643—658 (1958).

Verf. verallgemeinert Resultate aus einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 78, 36, die im folgenden verwendeten Bezeichnungen s. ebenda). War seinerzeit das asymptotische Verhalten der — zweidimensionalen — Partitionsfunktionen  $p_s(m, n)$  unter der Voraussetzung  $0 < A_1 < m/n < A_2$  ermittelt worden, so geschieht dasselbe jetzt unter der schwächeren Voraussetzung  $\frac{1}{2} + \varepsilon_1 < \log n / \log m < 2 - \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ ) — das Problem ist ja in  $n$  und  $m$  symmetrisch. Es wird  $p_s(n, m) \sim e^{\sigma_s^*}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) bewiesen, wobei

$$(*) \quad \sigma_s^* = \sigma_s + (a_s n m^{-2})^{-1/3} T_K \left( \sqrt[3]{a_s n m^{-2}} \right) + (a_s m n^{-2})^{-1/3} T_{K'} \left( \sqrt[3]{a_s n m^{-2}} \right)$$

ist:  $\sigma_s$  ist dem eingangs genannten Referat zu entnehmen, desgl.  $a_s$ ; die in den jetzt neu hinzutretenden zweiten und dritten Summanden rechterhand von (\*) auftretende

Funktion  $T_H(t)$  ist durch  $T_1(t) = 0$  und  $T_H(t) = a_s \sum_{h=3}^{2H-1} P_h^{(s)} t^{h-1}$  ( $H \geq 2$ )

erklärt, wobei die Koeffizienten  $P_h^{(1)}$  und  $P_h^{(2)}$  Polynome in  $\log t$  vom Grad  $[\frac{1}{2}h]$  sind,  $P_h^{(3)}$  und  $P_h^{(4)}$  jedoch nur von  $h$  und  $s$  abhängen; in (\*) ist noch

$$K = \left[ \frac{3}{8\varepsilon_1} + \frac{3}{2} \right], \quad K' = \left[ \frac{3}{2\varepsilon_2} + \frac{1}{2} \right].$$

H. Ostmann.

**Grosswald, Emil:** Some theorems concerning partitions. Trans. Amer. math. Soc. 89, 113—128 (1958).

In the theory of partitions the function  $F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1}$  plays an im-

portant role. Now let  $F_a(x) = \prod_{n=a(q)} (1-x^n)^{-1}$ ,  $0 < a \leq q$ . The author proves the following asymptotic formula

$$F_a(x) = \frac{\Gamma(a/q)}{\sqrt{2\pi}} (-q \log x)^\varepsilon x^{-K_a} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{6q \log x} + O(\log^2 x) \right\}, \quad x \rightarrow 1,$$

here  $K_a = q/24 - a/4 + a^2/4q$ ,  $\varepsilon = a/q - \frac{1}{2}$ . The author constructs generating functions for the numbers  $p_n(q)$ , the number of partitions of  $n$  into summands chosen out of a fixed system  $S$  of  $m$  restclasses modulo  $q$  and for the numbers  $p_n(q, l)$  (the same number with the restriction, however, that no summand is repeated more than  $l$  times). Then he finds asymptotic formulae for these numbers, e. g.

$$p_n(q, l) = (l+1)^{-d} (v/v_n) I_1(2\sqrt{v_n}) (1 + O(1/n)),$$

$d = q^{-1} \sum a_j - \frac{1}{2}m$ ,  $v = \pi \sqrt{m l / 6q(l+1)}$ ,  $v_n = (n + l \sum K_{a_j})^{1/2}$ . The formulae thus obtained are a generalization of results of Petersson (this Zbl. 57, 68), Livin-good (this Zbl. 60, 101] and Meinardus (this Zbl. 55, 38). As a special case the quotient  $p_n^+(q)/p_n^-(q)$  is studied, where  $p_n^-$  is build with  $S$  equals the system of the classes of quadratic residues and  $p_n^+$  with non-residues. The method is the well-known Hardy-Rademacher approach, using some non-trivial estimations in asym- ptotics the author obtains the results mentioned above. He expects that the error terms can be estimated better by using other methods. *F. van der Blij.*

**Leech, John:** Groups of primes having maximum density. Math. Tables Aids Comput. 12, 144—145 (1958).

Es werden Gruppen von aufeinanderfolgenden Zahlen betrachtet, die möglichst viele Primzahlen enthalten (Verallgemeinerung der „Zwillinge“, „Drillinge“, usw.) und die Anzahl solcher Gruppen zwischen 50 und 10 000 000 wird tabelliert. Z. B. gibt es in diesem Bereich 17 Gruppen von 17 Zahlen, deren jede 6 Primzahlen enthält; zum Beispiel 97, 101, 103, 107, 109, 113. *K. Prachar.*

**Rieger, G. J.:** Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf alge- braische Zahlkörper. I. J. reine angew. Math. 199, 208—214 (1958).

Die in Rede stehende Verallgemeinerung lautet:  $n$  durchlaufe die  $M$  nicht not- wendig verschiedenen Ideale  $n_1, n_2, \dots, n_M$  eines algebraischen Zahlkörpers  $K$ ;  $S$  sei die Anzahl der durch kein Primideal  $\mathfrak{p}$  mit einer Norm  $\leq z$  ( $z$  reell,  $\geq 2$ ) teil- baren Ideale  $n$ . Es gelte für jedes Ideal  $\mathfrak{d}$  aus  $K$  eine „Näherungsformel“

$$S_{\mathfrak{d}} = \sum_{\mathfrak{n}|\mathfrak{d}} 1 = \frac{M}{f(\mathfrak{d})} + R_{\mathfrak{d}},$$

wobei  $f(\mathfrak{d})$  eine multiplikative Funktion der Ideale von  $K$  ist ( $1 < f(\mathfrak{d}) \leq \infty$  für  $\mathfrak{d} \neq$  dem Einheitsideal  $\mathfrak{o}$  von  $K$ ). Dann gilt

$$S = \frac{M}{Z} + O\left(\sum |\lambda(\mathfrak{d}_1) \lambda(\mathfrak{d}_2) R_{[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]}| \right),$$

wobei über die Ideale  $\mathfrak{d}_1$  und  $\mathfrak{d}_2$  (unabhängig von  $\mathfrak{d}_1$ ) summiert wird, deren Norm  $\leq z$  ist und wobei folgende Bezeichnungen gelten:

$$f_1(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{r}} \mu(\mathfrak{d}) f\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}}\right) \quad (\mu(\mathfrak{d}) = \text{Verallgemeinerung der Möbiusschen } \mu\text{-Funktion}),$$

$$Z = \sum_{N\mathfrak{r} \leq z} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})} \quad (N\mathfrak{r} = \text{Norm von } \mathfrak{r}),$$

$$\lambda(\mathfrak{d}) = \frac{\mu(\mathfrak{d})}{Z} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}} \left(1 - \frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right)^{-1} \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})},$$

wobei die letzte Summe über alle  $\mathfrak{r}$  mit  $N\mathfrak{r} \leq z/N\mathfrak{d}$  und  $(\mathfrak{r}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}$  läuft ( $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$  bzw.  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] =$  g. g. T. bzw. kleinstes gem. Vielfaches der Ideale  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$ ). — Es wird noch eine Verallgemeinerung eines Resultates von Čulanovskij [dies. Zbl. 30, 344, (dort Druckfehler im Namen)] gegeben. *K. Prachar.*



**Barnes, E. S.:** The construction of perfect and extreme forms. I. *Acta arithmetica* **5**, 57—79 (1959).

Die Ermittlung aller perfekten und extremen quadratischen Formen bietet erhebliche Schwierigkeiten, sobald die Anzahl  $n$  der Variablen größer als 4 ist. Bisher gelang dies vollständig nur für  $n \leq 6$ . Man bediente sich meist des Algorithmus von Voronoi oder der Reduktionstheorie von Minkowski. Beide Methoden eignen sich grundsätzlich für jede Anzahl von Variablen. Doch bedurfte es schon bei  $n = 6$  ganz besonderer Mühe, um durchzukommen. Ist die Anzahl der Variablen  $n > 6$ , so kennt man mehrere Klassen von perfekten oder extremen Formen, welche keinen Anspruch auf Vollständigkeit haben. In dieser Arbeit (I) wird eine neue Methode (Methode der Verfeinerung) entwickelt, um perfekte oder extreme Formen zu erhalten. (In Teil II wird noch eine weitere Methode gebracht.) Es wird stets von einer bereits bekannten perfekten oder extremen Form ausgegangen und durch Verallgemeinerung daraus werden neue perfekte oder extreme Formen abgeleitet. Der Grundgedanke der neuen Methode ist einfach. Ist ein Gitter  $A$  in einem Gitter  $A'$  enthalten, so heißt  $A$  ein Teilgitter von  $A'$  und  $A'$  bildet eine Verfeinerung von  $A$ . Dem entsprechend heißt eine quadratische Form  $f'$  eine Verfeinerung einer quadratischen Form  $f$ , wenn das zu  $f'$  gehörige Gitter  $A(f')$  eine Verfeinerung des zu  $f$  gehörigen Gitters  $A(f)$  ist. Dann gilt folgendes Theorem: Es sei  $f'$  eine Verfeinerung von  $f$  mit demselben Minimum  $M$ . Ist  $f$  perfekt, so auch  $f'$ , und ist  $f$  extrem, so auch  $f'$ . Auf diesem Prinzip beruht die neue Methode. Mit ihr gelingt es dem Verf., viele der bereits bekannten perfekten oder extremen Formen abzuleiten, aber auch neue perfekte oder extreme Formen zu finden.

*N. Hofreiter.*

**Kneser, Martin:** Klassenzahlen quadratischer Formen. *J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein.* **61**, 76—88 (1958).

Kurze Zusammenstellung der Methoden, die bei allgemeiner Variablenzahl  $n$  zur Bestimmung der Klassenzahl quadratischer Formen gegebener Diskriminante oder gegebenen Geschlechts benutzt werden können. Es sind dies die Reduktionstheorie, die Minkowski-Siegelsche Maßformel und die Theorie der Spinorgeschlechter.

*M. Eichler.*

**Varnavides, P.:** Antisymmetrie Markoff forms. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **61**, 463—469 (1958).

Verf. betrachtet die Formen (1)  $f_n(x, y) = u_n x^2 - v_n x y - u_n y^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , wo  $u_n, v_n$  positive ganzzahlige Lösungen von  $v_n^2 - 5 u_n^2 = (-1)^{n-1} \cdot 4$  sind, und (2)  $g_n(x, y) = u_n x^2 - v_n x y - u_n y^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , wo  $u_n, v_n$  positive ganzzahlige Lösungen von  $v_n^2 - 2 u_n^2 = (-1)^{n-1}$  sind. Für gerade  $n$  sind (1) und (2) Markoff'sche Formen; für ungerade  $n$  wird der im Titel angegebene Name verwendet. Verf. gibt einige Sätze über (1) und (2) und über ihren Zusammenhang mit der Gleichung (3)  $x^2 + y^2 + (-1)^n z^2 = 3 x y z$ . Der Zusammenhang zwischen (3) und den Markoff'schen Formen ist für gerade  $n$  schon von L. E. Dickson (*Studies in the Theory of numbers*, Chicago 1930, S. 79—107) untersucht worden.

*B. Stolt.*

**Hua, Loo-keng:** On exponential sums. *Science Record, n. Ser.* **1**, Nr. 1, 1—4 (1957).

Verf. beweist die Formel

$$\sum_{x=1}^P \exp\left(2\pi i \frac{h}{q} x^k\right) = \frac{P}{q} \sum_{x=1}^q \exp\left(2\pi i \frac{h}{q} x^k\right) + O(q^{1/2+\epsilon}),$$

wobei  $k$  eine natürliche Zahl  $\geq 2$  ist,  $(h, q) = 1$ ,  $\epsilon > 0$  beliebig; die Konstante in  $O(\ )$  hängt nur von  $k$  und  $\epsilon$  ab. Die gegenüber früheren Resultaten wesentlich bessere Abschätzung des Restgliedes wird durch Verwendung eines Ergebnisses von A. Weil [*Proc. nat. Acad. Sci. USA* **27**, 345—347 (1941)] erhalten.

*K. Prachar.*

**Hua, Loo-keng:** On the major arcs of Waring problem. *Science Record, n. Ser.* **1**, Nr. 3, 17—18 (1957).

Verf. verwendet das Ergebnis seiner vorstehend referierten Arbeit, um (mit Hilfe der Eulerschen Summenformel) zu beweisen

$$T(\alpha) = \sum_{x=1}^P \exp(2\pi i x^k \alpha) = \frac{1}{q} \sum_{x=1}^q \exp\left(2\pi i \frac{h}{q} x^k\right) \int_0^P \exp(2\pi i \beta x^k) dy + O(q^{1/2+\epsilon})$$

für  $\alpha \in \mathfrak{M}_{h,q}$ , wobei  $\mathfrak{M}_{h,q}$  das folgende Intervall ist:

$$|\alpha - h/q| < 2/q\tau, \quad \tau = N^{1-1/k+\epsilon}, \quad 1 \leq h \leq q \leq N^{1/k-\epsilon}, \quad (h, q) = 1,$$

( $k$  ist eine natürliche Zahl  $\geq 3$ ). Damit kann bewiesen werden, daß die asymptotische Formel von Hardy und Littlewood

$$\sum_{\mathfrak{M}_{h,q}} \int_{\mathfrak{M}_{h,q}} T(\alpha)^s \exp(-2\pi i N\alpha) d\alpha \sim \mathfrak{S}(N) \frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(s/k)} N^{s/k-1}$$

(wobei über alle  $\mathfrak{M}_{h,q}$ , die zu Brüchen  $h/q$  des Intervalls  $(0, 1)$  gehören — „major arcs“ — summiert wird und  $\mathfrak{S}(N)$  die singuläre Reihe bedeutet) schon für natürliches  $s \geq k+1$  richtig ist; von Hardy und Littlewood wurde sie für  $s \geq 2k+1$  bewiesen.

K. Prachar.

**Yüh, Ming-i:** On the differences between squarefree numbers. Science Record, n. Ser. 1, Nr. 3, 13—16 (1957).

Verf. verbindet die van der Corputschen Methode der Abschätzung von Exponentialsummen mit einer Vinogradovschen Abschätzung, um ein Ergebnis des Ref. (dies. Zbl. 55, 40) über die Differenz  $s_{n+1} - s_n$  zweier aufeinanderfolgender quadratfreier Zahlen zu verbessern. Inzwischen hat jedoch Rankin (dies. Zbl. 65, 278) in seiner Arbeit über die (eindimensionale) van der Corputschen Methode gezeigt, daß diese zu  $s_{n+1} - s_n = O(n^{\gamma+\epsilon})$ ,  $\gamma = 0,22198215 \dots$ , führt, was besser als das vom Verf. hergeleitete Resultat ist.

H.-E. Richert.

**Knapowski, S.:** On new “explicit formulas” in prime number theory. I. Acta arithmetica 5, 1—14 (1959).

P. Turán hat entdeckt, daß die Riemannsche Vermutung auch mit den Nullstellen der Partialsummen  $U_N(s) = \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s}$  der  $\zeta$ -Reihe zusammenhängt. Der

Verf. beweist nun eine „explizite Formel“, in der die Nullstellen von  $U_N$  vorkommen: Seien  $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$  ( $\Lambda(n) = \log p$  für  $n = p^m$ ,  $p$  Primzahl,  $\Lambda(n) = 0$  sonst),  $\psi_0(x) = \frac{1}{2} \{\psi(x+0) + \psi(x-0)\}$ ;  $\varrho = \beta + i\gamma$  die Nullstellen von  $U_N(s)$ . Dann gilt für  $2 \leq x \leq N$ ,  $N \geq N_0$

$$\psi_0(x) = \frac{\log N!}{N} - \sum \frac{x^\varrho}{\varrho}, \quad \sum \frac{x^\varrho}{\varrho} = \lim_{|y| \leq T} \sum \frac{x^\varrho}{\varrho} \quad \text{für } T \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt: Für  $x \geq 2$  gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\substack{\beta \geq -1 \\ |\gamma| \leq x^{1/2}}} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\log x),$$

wobei die  $\varrho$  hier die Nullstellen von  $U_N$  mit  $N = [e^x]$  sind. Bem. d. Ref.: In der vom Verf. aus dem Inghamschen Buch (dies. Zbl. 6, 397) zitierten Formel kann  $O(\log^2 x)$  durch  $O(\log x)$  ersetzt werden (s. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Band, Leipzig 1927, S. 122).

K. Prachar.

**Hlawka, Edmund:** Zum Hauptsatz der Theorie der Gleichverteilung. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1957, 313—317 (1957).

Sei  $f(t)$  eine stetige Funktion auf der Menge der reellen Zahlen mit der Periode Eins,  $\{\sigma_m(f)\}$  eine Folge von Verteilungsmaßen, ferner

$$r_n(f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1 + \dots + x_n) d\sigma_1(x_1) \dots d\sigma_n(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$



Verf. beweist folgenden Satz: „Eine Folge  $\{x_i\}$  von reellen Zahlen ist gleichverteilt mod 1, wenn für jedes natürliche  $n$  die Folge  $\{x_{i+n} - x_i\}$  gleichverteilt mod 1 zum Maß  $\nu_n$  ist und für jedes natürliche  $m$  die Gleichung  $\prod_{j=1}^{\infty} \sigma_j(e^{2\pi i m x}) = 0$  gilt.“

Der Satz wird sodann auf Elementfolgen aus kompakten Gruppen  $G$  mit abzählbarer Basis verallgemeinert, wobei an die Stelle der Exponentialfunktionen die nichttrivialen irreduziblen Klassen unitärer Darstellungen von  $G$  treten. Einige wichtige Spezialfälle werden gesondert betrachtet.

B. Volkmann.

**Knapowski, S.:** Über ein Problem der Gleichverteilungstheorie. *Colloquium math.* **5**, 8—10 (1958).

The question of uniform distribution is considered for a sequence  $\{u_n\}$  of form

$$(1) \quad \frac{1}{a_1}, \frac{2}{a_1}, \dots, \frac{a_1-1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{a_2-1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots, \frac{a_n-1}{a_n}, \dots,$$

where  $\{a_n\}$  is a strictly increasing sequence of natural numbers. Let  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$  and let  $A(n)$  be the number of  $u_i$  with  $i \leq n$  and  $\alpha \leq u_i < \beta$ . Let  $S$  be a continuous monotone function on  $x \geq 1$  such that whenever  $x$  is an integer  $S(x) = \sum_{v=1}^x a_v - x$ .

Then we have the theorem  $A(n) = (\beta - \alpha)n + O(a_k)$ , where  $k = \langle S^{-1}(n) \rangle$ . If  $a_k/k \rightarrow \infty$  and  $[\alpha, \beta] \neq [0, 1]$  then  $A(n) = (\beta - \alpha)n + \Omega(a_k)$ . Here  $\langle \delta \rangle$  denotes the smallest integer  $l \geq \delta$ ,  $S^{-1}$  the inverse function to  $S$ , and  $\Omega$  the negation of  $o$ . With the aid of two corollaries, we have the following criteria for uniform distribution. I. If there is a function  $f$  such that  $S(f(n)) \geq n$  ( $n \geq n_0$ ),  $a_{f(n)} = o(f(n))$ , then the sequence (1) is uniformly distributed. II. If  $a_k/k \rightarrow \infty$  and there is a function  $f$  with  $S(f(n)) \leq n$  ( $n \geq n_0$ ),  $a_{f(n)} \neq o(n)$ , then (1) is not uniformly distributed. The examples  $a_n = n$ ,  $a_n = a^n$  ( $a > 1$ , integral) and  $a_n = p_n$  ( $n$ -th prime) are considered.

J. P. Tull.

**Deseombes, Roger et Georges Poitou:** Sur certains problèmes d'approximation. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 581—583 (1952).

An eine Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **38**, 188) anknüpfend, schätzen Verff. den Approximationsgrad einer Irrationalzahl  $\xi$  durch Brüche  $u/v$  mit  $v > 0$  ab, wo  $u$  und  $v$  den zusätzlichen Bedingungen  $u \equiv a \pmod{s}$ ,  $v \equiv b \pmod{s}$  mit vorgegebenen natürlichen  $a, b$  und  $s$  unterworfen sind. Unter der Voraussetzung  $(a, b, s) = 1$  wird behauptet und skizzenweise bewiesen, daß

$$K(s, a, b) = \sup_{\xi} \lim_{v \rightarrow \infty} |v(v\xi - u)| \leq \frac{1}{2} s(s-1)$$

gilt. Andererseits wird  $K(s, a, b)$  durch einen Ausdruck, der asymptotisch gleich  $\frac{1}{4} s^2$  ist, von unten abgeschätzt.

S. Hartman.

**Poitou, Georges et Roger Deseombes:** Sur certains problèmes d'approximation. II. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 1522—1524 (1952).

Fortsetzung der vorstehend besprochenen Arbeit. Es wird nun  $K(s, a, b) = K(s) \leq \frac{2}{3} s^2$  behauptet. Die Konstante  $\frac{2}{3} s^2$  soll noch nicht die beste sein, es wird aber andererseits eine unendliche Folge von  $s$ -Werten angegeben, für welche  $K(s) > \frac{1}{3} s^2$ . Es findet sich  $K(s)$  für  $s = 2, 3, \dots, 10$  ermittelt. Verff. betrachten auch  $\sup_{\xi} \lim_{|v| \rightarrow \infty} |v(v\xi - u)| = K(s, a, b) = K(s)$ , wo wie früher  $u \equiv a \pmod{s}$ ,  $v \equiv b \pmod{s}$ , jedoch die Bedingung  $v > 0$  fallen gelassen wird. Gefunden wurde die Abschätzung  $K(s) \leq \frac{1}{4} s^2$ , mit dem scharfen Koeffizienten  $\frac{1}{4}$ , in Übereinstimmung mit J. F. Koksma (dies. Zbl. **44**, 43), der aber sein Resultat unter einer schwächeren Voraussetzung als Teilerfremdheit von  $a, b$  und  $s$  herleitet.  $K(s)$  wurde für  $s = 2, 3$  und  $4$  ermittelt. Schließlich wird eine Verschärfung des klassischen Approximationssatzes von Hurwitz vorgeführt. Überlegungsskizzen — wo solche vorhanden sind — sind nicht leicht begreiflich.

S. Hartman.

**Raleigh, John:** The Fourier coefficients of the invariants  $j(2^{1/2}; \tau)$  and  $j(3^{1/2}; \tau)$ . Trans. Amer. math. Soc. **87**, 90—107 (1958).

Rademacher hat 1938 gezeigt (dies. Zbl. **18**, 246) daß für die Fourierkoeffizienten der Modularinvariante

$$j(\tau) = j(1; \tau) = e^{-2\pi i \tau} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \tau}$$

folgende Entwicklung gilt:  $c_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right)$  für  $n \geq 1$ , mit

$$A_k(n) = \sum'_{h \bmod k} e^{-2\pi i(nh + \bar{h}')/k}, \quad h \bar{h}' \equiv -1 \pmod{k}, \quad I_1(z) = \frac{J_1(iz)}{i}.$$

Verf. betrachtet die Invarianten  $j(2^{1/2}; \tau)$  und  $j(3^{1/2}; \tau)$  zu den Gruppen  $G(\lambda_4)$  und  $G(\lambda_6)$ . Er verwendet dabei dieselbe Methode wie Rademacher, nur muß er hier die Fareybogen zu  $(h, k)$  mit geradem bzw. ungeradem  $k$  unterscheiden. Das Ergebnis ist:

$$j(2^{1/2}; \tau) = e^{-2\pi i \tau / 2^{1/2}} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \tau / 2^{1/2}}$$

$$\text{mit} \quad c_n = \frac{2\pi}{n^{1/2}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{2\nu}(n)}{2\nu} I_1\left(\frac{2\pi n^{1/2}}{\nu}\right) + \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{2\nu-1}((1-\nu)n)}{2\nu-1} I_1\left(\frac{2\pi(2n)^{1/2}}{2\nu-1}\right) \right\}.$$

Für  $j(3^{1/2}; \tau)$  wird ein ähnliches Ergebnis gefunden. Verf. bemerkt noch, daß es für andere Gruppen  $G(\lambda_q)$  noch nicht gelungen ist, diese Betrachtungen durchzuführen, weil man dort die Gruppen nicht genau kennt und die geeignete Fareyzerlegung nicht finden kann. Zur Kontrolle der Ergebnisse werden Relationen bewiesen zwischen  $j(2^{1/2}; \tau)$  und  $j(\tau)$ , z. B.

$$j^2(2^{1/2}; \tau) - 3^3 \cdot 23 j(2^{1/2}; \tau) + 2^7 \cdot 3^3 = j(2^{1/2} \tau) + j(\tau/2^{1/2}),$$

$$\{j(2^{1/2}; \tau) + 2^4 \cdot 3^2\}^2 = j(2^{1/2} \tau) \cdot j(\tau/2^{1/2}).$$

Daraus ergibt sich  $j(2^{1/2}; \tau) = x^{-1} + 2^3 \cdot 13 + 2^2 \cdot 1093 x + 2^{11} \cdot 47 x^2 + \dots$  mit  $x = \exp(2\pi i \tau / 2^{1/2})$ . J. H. van Lint.

**Franklin, J. N.:** An enveloping series for the zeta function. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 505—507 (1958).

Man sagt, eine unendliche Reihe  $\sum_0^{\infty} a_n$  mit reellen Gliedern umhüllt die reelle Zahl  $A$ , wenn für  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $A - (a_0 + \dots + a_n) = \theta_n a_{n+1}$ , wo  $0 < \theta_n < 1$ . Verf. untersucht umhüllende Reihen für die Hurwitzsche Zetafunktion. Insbesondere bekommt er für die Riemannsche Zetafunktion bei reellem  $s > -1$ , daß  $\zeta(s) -$

$$-\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \text{ von der Reihe } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k B_k s(s+1) \dots (s+2k-2)}{(2k)!} \quad (B_k \text{ Bernoullische}$$

Zahlen) umhüllt wird.

H.-E. Richert.

## Analysis.

### Allgemeine Reihenlehre:

**Copping, J.:** Inclusion theorems for conservative summation methods. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 485—499 (1958).

Verf. betrachtet konvergenztreue (gewöhnliche) Matrixverfahren  $A$ . Bei diesen spielt bekanntlich der Ausdruck  $\chi(A) = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk}$  eine wichtige Rolle. Ist  $\chi(A) \neq 0$ , so heißt  $A$  koregulär, sonst konull. Zunächst löst er ein Problem von Wilansky-Zeller (dies. Zbl. **79**, 86) mit Satz 1: Ist  $C$  koregulär.  $A = BC$  konvergenztreu und  $\|B\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ , so gibt es ein konservatives  $E$  mit  $A = EC$ . Ist überdies  $C$  vom Typ  $M$ , dann ist  $B$  konvergenztreu. — Daraus folgt



natürlich, daß  $A$  jedenfalls für beschränkte Folgen nicht schwächer als  $C$  ist (Satz 2). Ist  $C$  konull, so limitiert es mindestens eine beschränkt-divergente Folge; und man kann dabei erreichen, daß diese Folge von einem vorgegebenen koregulären  $A$  nicht limitiert wird (Satz 3). Ist  $C$  konvergenztreu und reversibel, aber nicht vom Typ  $M$ , dann gibt es ein normales  $B$  mit  $\|B\| < \infty$ , so daß  $A = BC$  konvergenztreu ist, aber nicht  $A \supset C$  gilt (Satz 4). Weitere Ergebnisse betreffen reversible Matrizen (Vergleichs- und Verträglichkeitsfragen). K. Zeller.

**Orlicz, W.: On the summability of bounded sequences by continuous methods.** Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 549—556, russ. Zusammenfassg. XLVI (1958).

Verf. betrachtet konvergenztreue Limitierungsverfahren, die keine beschränkten divergenten Folgen  $x = \{t_n\}$  limitieren. Diese Verfahren lassen sich bekanntlich topologisch charakterisieren (Mazur-Orlicz, dies. Zbl. **64**, 56; Wilansky-Zeller, dies. Zbl. **65**, 44). Verf. geht nun diesem Zusammenhang weiter nach, indem er allgemeinere Verfahrensklassen heranzieht und die Beweise von nicht-funktional-analytischen Hilfsmitteln befreit. Er betrachtet „stetige“ Limitierungsverfahren vom Typ

$$\Phi(\tau; x) = \sum_v \varphi_v(\tau) t_v \quad (0 \leq \tau \rightarrow T),$$

bei denen die  $\varphi_v$  stetig sind und die Anwendbarkeit der Transformation die gleichmäßige Konvergenz der Reihen in jedem Intervall  $\langle 0, t \rangle$  (wo  $t < T$ ) nach sich zieht. Das Wirkfeld  $\Phi^*$  versteht er in üblicher Weise mit einer  $F$ -Topologie. Mit  $T_b$  bzw.  $T_c$  bezeichnet er die Menge der beschränkten bzw. konvergenten Folgen. Er zeigt, daß unter anderem folgende Bedingungen für ein konvergenztreues Verfahren  $\Phi$  äquivalent sind: (a)  $T_c$  ist abgeschlossen in  $\Phi^*$ ; (a'')  $T_b \wedge \Phi^*$  ist abgeschlossen in  $\Phi^*$ ; (c) Es gibt ein  $r$  und ein  $c > 0$ , so daß

$$\sup_{\langle 0, T \rangle} \left| \sum_{v=1}^p \varphi_v + r(\tau) \lambda_v \right| \geq C \sup |\lambda_n|$$

gilt für beliebige  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ; (c)  $\Phi^*$  enthält keine beschränkte divergente Folge.

K. Zeller.

**Ramanujan, M. S.: On products of summability methods.** Math. Z. **69**, 423—428 (1958).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **73**, 279). Es wird gezeigt, daß der bisherige Beweis der dortigen Sätze 1 und 2 eine allgemeinere Formulierung derselben erlaubt. Sodann werden diese Sätze in ihrer ursprünglichen Form erneut bewiesen nach einer Methode, die auch den folgenden Satz 3 liefert: Ist die Reihe (1)  $\sum a_n$  mit beschränkten Teilsummen Borel-summierbar zum Wert  $l$ , so ist die Transformation  $\sum b_n$  von (1) durch eine permanente quasi-Hausdorff-Matrix  $H_1^*$ , bei der in jeder Zeile eine Nullfolge steht, ebenfalls Borel-summierbar zum Wert  $l$ . Im zweiten Teil der Arbeit handelt es sich um die vom Verf. (dies. Zbl. **78**, 249) eingeführten  $(S^*, \mu)$ -Verfahren. (Das  $S_\alpha$ -Verfahren z. B. ist ein spezielles solches Verfahren.) Ist die Folge (2)  $\{s_n\}$  Abel-summierbar zum Wert  $l$ , so ist die Transformation  $\{t_n\}$  von (2) durch ein permanentes  $(S^*, \mu)$ -Verfahren ebenfalls Abel-summierbar zum Wert  $l$ , sofern (2) einer gewissen Bedingung genügt, die z. B. sicher erfüllt ist, wenn (2) beschränkt ist.

W. Meyer-König.

**Pati, T.: Products of summability methods and merceirian transformations.** Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **23**, 514—521 (1958).

Let  $T$  and  $H$  be two regular methods of limitability. By  $U_\alpha$  we denote the method  $U_\alpha = \alpha E + (1 - \alpha) H$ , where  $\alpha$  is any real number and  $E$  is the identity method. In two special cases the author proves the following theorem: If  $U_\alpha$  is equivalent to  $E$ , then  $TU_\alpha$  is equivalent to  $T$ , where  $(TU_\alpha)x$  denotes  $T(U_\alpha x)$ . In the first case we consider the sequences, and  $T$  may be the general Abel method  $A_k$ , which trans-

forms a sequence  $x = \{\xi_n\}$  into the function

$$A_k(t, x) = (1-t)^k \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{-k}{v} t^v \xi_v \quad (k > 0, t \rightarrow 1-),$$

or the Borel method, defined by the formula

$$B(t, x) = e^{-t} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} \xi_v \quad (t \rightarrow +\infty),$$

and  $H$  is the regular Hausdorff method  $H_\chi$ , which transforms  $x = \{\xi_v\}$  into

$$H_\chi(m, x) = \sum_{v=0}^m \lambda_{m,v} \xi_v \quad \text{where} \quad \lambda_{m,v} = \binom{m}{v} \Delta^{m-v} \mu_v, \quad \mu_n = \int_0^1 t^n d\chi(t),$$

$\chi(t)$  is a real function of bounded variation in  $0 \leq t \leq 1$ , and  $\chi(1) = 1$ ,  $\chi(0+) = \chi(0) = 0$ . In the second case we consider the functions, and  $T$  may be the regular integral transformation  $T_\psi$ , which transforms a function  $x = x(\tau)$  into the function

$$T_\psi(t, x) = \frac{1}{t} \int_0^\infty \psi\left(\frac{\tau}{t}\right) x(\tau) d\tau \quad (t \rightarrow +\infty)$$

where  $\psi(u)$  is a positive decreasing function of  $u$ , and  $H$  is the regular Hausdorff transformation  $H_\chi$  defined by the formula  $H_\chi(t, x) = \int_0^1 x(t\tau) d\chi(\tau)$ .

L. Włodarski.

**Endl, Kurt:** Sur une généralisation des procédés de sommation de Hausdorff et la solution d'un problème de moments. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 515—518 (1959).

A generalization of the well known Hausdorff Process of summation is announced.

Let  $\delta^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \geq 0$ , denote the matrix  $\left((-1)^n \binom{m+\alpha}{m-n}\right)$ . For a diagonal matrix  $\mu = (\mu_n)$ , let  $H^{(\alpha)}(\mu) = \delta^{(\alpha)} \mu \delta^{(\alpha)}$ . Then, as in the case  $\alpha = 0$ , a necessary and sufficient condition that there exists a function  $\chi$  of bounded variation in  $[0, 1]$  such that  $\mu_n = \int_0^1 x^{n+\alpha} d\chi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , is that

$$\sum_{n=0}^m \binom{m+\alpha}{m-n} \Delta^{m-n}(\mu_n) < k, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

The condition for the regularity of the process is that  $\chi(1) - \chi(+0) = 1$ . For different  $\alpha$ , the methods are permutable and compatible. V. Ganapathy Iyer.

**Aljančić, Slobodan:** Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 2567—2568 (1958).

Zur Bestimmung von Saturationsklassen benutzt Verf. im Anschluß an Favard (dies. Zbl. **80**, 47) limitierungstheoretische Sätze, die die Summierbarkeit der Reihe  $S = \sum u_n$  mit der der Reihe  $T = \sum n u_n$  in Verbindung bringen. Ein solches Ergebnis (Satz 1) lautet:  $C_n^{(k)}(S) - S = O((\log \beta n)/n^{\alpha+1})$  ist gleichbedeutend mit  $C_n^{(k)}(T) = O((\log \beta n)/n^\alpha)$  (wobei  $-1 < \alpha < k$ ). Ein ähnliches Resultat mit spezieller  $O$ -Bedingung gilt für Rieszmittel, während bei Höldermitteln noch ein Hilfsverfahren herangezogen wird. Anwendung auf Fourierreihen ergibt Satz 4: Die Saturationsklasse des Hölderverfahrens  $H^{(k)}$  besteht aus den Funktionen  $f$ , deren Konjugierte in Lip 1 liegt; die Approximation ist dabei von der Ordnung  $(\log^{k-1} n)/n$ . Satz 5 behandelt entsprechend Rieszmittel, bei denen die Gewichte  $\lambda_n$  eine konvexe Folge bilden. K. Zeller.

**Aljančić, S.:** Meilleure approximation et classes de saturation du procédé de Hölder dans les espaces  $C$  et  $L^p$ . Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **12**, 109—124 (1958).

Ausführliche Darstellung von Resultaten, die zum Teil schon in der oben besprochenen Note angeführt sind. Das Hauptresultat lautet: Die beste durch das



Hölderverfahren  $H^{(k)}$  bei Anwendung auf Fourierreihen zu erreichende Approximation ist von der Ordnung  $(\log n)^{k-1}/n$ . Die Saturationsklasse besteht 1. im Raum  $C$  aus den Funktionen  $x(t)$ , deren Konjugierte in Lip 1 liegt; 2. im Raum  $L$  aus den Funktionen  $x(t)$ , deren Konjugierte von beschränkter Schwankung ist; 3. im Raum  $L^p$ ,  $p > 1$ , aus den Funktionen  $x(t)$ , deren Konjugierte fast überall gleich dem Integral einer Funktion aus  $L^p$  ist. K. Zeller.

**Meyer-König, W. und K. Zeller:** Zum Vergleich der Verfahren von Cesàro und Abel. Arch. der Math. 9, Festschrift Hellmuth Kneser, 191—196 (1958).

Let  $\{w_n\}$  be an arbitrary positive sequence increasing to  $+\infty$ , and let  $\alpha$  and  $\beta$  be some positive numbers which satisfy the inequality  $0 < \alpha < \beta$ . The authors prove that there exists a sequence  $x = \{\xi_n\}$  which satisfies the following conditions: (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{w_n} = 0$ , (ii)  $x$  is  $C_\alpha$ -limitable, (iii)  $x$  is  $C_\beta$ -nonlimitable. The authors also prove that if  $x = \{\xi_n\}$  is uniformly limitable to the number zero by the Abel method, i. e.  $x$  is Abel-limitable to zero and

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t < 1} \left| (1-t) \sum_{k=m}^{\infty} t^k \xi_k \right| = 0,$$

then  $x$  is  $C_1$ -limitable to zero. Similarly if  $x = \{\xi_n\}$  is weakly uniformly limitable to the number zero by the Abel-method, i. e.  $x$  is Abel limitable to zero and

$$\sup_m \sup_{0 \leq t < 1} \left| (1-t) \sum_{k=0}^m t^k \xi_k \right| < +\infty,$$

then  $x$  is  $C_\alpha$ -limitable for every  $\alpha > 1$ .

L. Włodarski.

**Lang, Wolf-Dieter:** Über die Äquivalenz von diskreten und kontinuierlichen Cesàro-Verfahren bei Funktionen vom Exponentialtyp. Math. Z. 69, 280—294 (1958).

The author gives certain conditions in which the  $C_k$ -limitability of a sequence  $\{f(n)\}$  implies the  $C_k^*$ -limitability of the function  $\{f(t)\}$ , i. e. conditions in which

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{\Gamma(k+1)}{m^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m-n+k-1}{m-n} f(n) \right] = l \text{ implies } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{k}{x^k} \int_0^x (x-t)^{k-1} f(t) dt \right] = l,$$

and also conditions for the converse implication. For this purpose he considers functions  $f$  of the complex variable  $re^{i\varphi}$ , which have two properties: (i)  $f$  is holomorphic in  $\overline{W}_\alpha \{|\varphi| \leq \alpha, 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi\}$ , (ii)  $f$  satisfies the inequality  $|f(re^{i\varphi})| \leq Me^{ar}$  ( $M, a$  constants). This class of functions is called  $F_\alpha$ . The most important theorem is: For  $f \in F_\alpha$  and  $k > 0$  1°  $C_k$ -limitability of  $\{f(n)\}$  implies  $C_k^*$ -limitability of  $\{f(t)\}$  if  $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin \alpha$ ; 2°  $C_k^*$ -limitability of  $\{f(t)\}$  implies  $C_k$ -limitability of  $\{f(n)\}$  if  $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin \alpha$ , where  $h_f(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} [r^{-1} \log |f(re^{i\varphi})|]$ . The author also gives other theorems of this type. L. Włodarski.

**Vernotte, Pierre:** Sur la définition d'une intégrale définie quand l'intervalle d'intégration contient un point singulier. Application à la sommation des séries divergentes à termes positifs. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 1822—1824 (1958).

Falls  $a(t)$  in der Borel-Transformation (1)  $\int_0^\infty e^{-t} a(t) dt$  von  $\sum a_n$  keine ganze Funktion ist, werden verschiedene Versuche gemacht, dem Integral (1) doch einen Sinn zu geben, z. B. durch Verschieben des Integrationsweges oder durch Einstreuen von Nullen in  $\sum a_n$ . Als Beispiel dient  $\sum n!$ ; allgemeine Sätze werden nicht angegeben. D. Gaier.

**Krzyż, Jan:** An inequality concerning series with decreasing positive terms. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 9, 187—192 u. poln. u. russ. Zusammenfassg. 192—193 (1957).

$U_n$  seien die Teilsummen einer Reihe  $\sum u_n$  mit  $u_0 > 0$ ,  $u_n \geq 0$ . Verf. setzt  $\tau_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_{n-k}}{U_k}$  und beweist: Wenn  $\sum u_n$  konvergiert, ist  $\lim \tau_n = 1$ ; wenn die Reihe divergiert, kann  $(\tau_n)$  divergieren, falls die  $u_n$  aber monoton  $\rightarrow +0$  gehen, ist dann  $\tau_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + 1/(n+1)$ ; ein Beispiel zeigt, daß diese Abschätzung nicht verbessert werden kann; für  $0 < r < 1$  folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n r^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{U_n} \leq \frac{1}{r(1-r)^2} \log \frac{1}{1-r},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für  $U_n = n+1$  gilt.

*Th. Kaluza.*

**Samssonow, Victor: Suite récurrente à convergence rapide tendant alternativement par excès ou par défaut vers  $e^{2/n}$ .** C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 1152—1153 (1958).

Ausgehend von  $a_{-1} = 1$ ,  $a_0 = 1$  wird  $a_p$  für  $p \geq 1$  durch  $a_p = (2p-1)n a_{p-1} + a_{p-2}$ , wo  $n$  ein Parameter ( $> 0$ ) ist, erklärt; analog mit  $b_{-1} = -1$ ,  $b_0 = 1$  als Ausgangswerten  $b_p$  durch  $b_p = (2p-1)n b_{p-1} + b_{p-2}$ . Die nach der Vorschrift  $U_p = a_p/b_p$  gebildete Folge konvergiert dann sehr schnell nach  $e^{2/n}$ , wobei der Limes eingeschachtelt wird. Verf. verzichtet in seiner Note auf einen Beweis, und zeigt lediglich an einem Zahlenbeispiel für  $n = 2$ , daß  $U_2 < U_4 < U_5 < U_3 < U_1$  und schon  $U_5$  den Limes  $e$  auf 9 Dezimalen genau liefert. Ref. vermißt die enge Beziehung dieses Ergebnisses zu bekannten Resultaten aus der Theorie der Kettenbrüche; ist z. B.  $n$  natürlich, so ist der Kettenbruch

$$[c_0, c_1, c_2, \dots] = [n, 3n, 5n, \dots] = (e^{2/n} + 1)/(e^{2/n} - 1);$$

ist  $A_p/B_p$  der  $p$ -te Näherungsbruch, so ist die obige Folge  $U_p = a_p/b_p$  für  $p \geq 1$  einfach gleich  $(A_{p-1} + B_{p-1})/(A_{p-1} - B_{p-1})$ , genauer  $a_p = A_{p-1} + B_{p-1}$ ,  $b_p = A_{p-1} - B_{p-1}$ .  
*E. Mohr.*

**Riabouchinsky, Dimitri: Observations au sujet de la note de M. Victor Samssonow.** C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 1153 (1958).

Zu der vorstehend referierten Note von N. Samssonov bemerkt der Verf., daß aus den dort stehenden Rekursionsformeln für  $a_p$  und  $b_p$  leicht folgt:  $a_p(n) = \pm b_p(-n)$ ,  $b_p(n) = \pm a_p(-n)$ , wo das Zeichen  $+$  einem geraden Zeiger  $p$ , das Zeichen  $-$  einem ungeraden Zeiger  $p$  entspricht. Daraus wiederum folgt  $U_p(n) \cdot U_p(-n) = 1$ , was nach sich zieht, daß aus  $U_p(n) \rightarrow e^{2/n}$  für  $n > 0$  folgt:  $U_p(-n) \rightarrow e^{-2/n}$ .  
*E. Mohr.*

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

**Hsu, L. C. and L. P. Hsu: On a new class of approximating polynomials for real functions.** Science Record, n. Ser. **3**, 65—70 (1959).

Assegnata una funzione  $f(x)$  rispettivamente in  $[0, 1]$ ,  $(0, \infty)$ ,  $(-\infty, \infty)$  gli AA., ispirandosi alla ben nota formula di Bernstein, definiscono l' $n$ -esimo polinomio approssimante  $f(x)$  rispettivamente con le formule:

$$P_n^f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left[1 - \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^n,$$

$$S_n^f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{k}{n^\alpha} - \frac{x}{n^\beta}\right)^2\right]^n,$$

$$T_n^f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{v=-n}^n f\left(\frac{v}{n^\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{v}{n^\alpha} - \frac{x}{n^\beta}\right)^2\right]^n$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  numeri positivi fissi  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha > 1/2$ . Vale per questi polinomi la proprietà generale per ogni  $f(x)$  continua [e limitata] in  $[0, 1]$ ,  $[(0, \infty); (-\infty, \infty)]$



e per ogni  $x$  tale che  $0 < x < 1$  [ $0 < x < \infty$ ;  $-\infty < x < \infty$ ] si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(x) = f(x) \quad \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^f(x) = f(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^f(x) = f(x) \right].$$

Sono pure dimostrate altre proprietà di questi polinomi approssimanti.

*G. Sansone.*

**Timan, A. F.:** On Jackson's theorems. Ukrain. mat. Žurn. **10**, 334—336 (1958) [Russisch].

Auf Grund der Ergebnisse einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **21**, 401), wird der folgende „verallgemeinerte Jacksonsche Satz“ sehr einfach bewiesen: Ist  $f(x)$  eine  $r$ -fach ( $r > 0$ , nicht notwendig ganz) differenzierbare,  $2\pi$ -periodische Funktion mit

$$\|f^{(r)}\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

so gilt für jedes Paar von natürlichen Zahlen  $k, n$ :

$$E_n(f)_p \leq (C_{k,r}/n^r) \cdot \omega_k(f^{(r)}; 1/n)_p,$$

wobei  $C_{k,r}$  eine nur von  $k$  und  $r$  abhängige Konstante ist. An der linken Seite steht hier die beste Annäherung von  $f$  durch trigonometrische Polynome  $n$ -ter Ordnung — in der Metrik  $L_p$  gemessen. Ferner ist

$$\omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right)_p = \sup_{|h| \leq 1/n} \left\| \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \binom{k}{\nu} f^{(r)}(x + \nu h) \right\|_p.$$

*B. Sz.-Nagy.*

**Glaeser, Georges:** Sur le théorème du prolongement de Whitney. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 617—619 (1957).

Let  $K$  be a compact  $n$ -interval (“pavé compact” in the Bourbaki's terminology) of the euclidian space  $R^n$ .  $\|AB\|$  denotes the euclidian distance of two points  $A, B$  in  $R^n$ . A Taylor's field (“champ taylorien” in author's terminology) of degree  $m$  defined on a compact subset  $F \subseteq K$  is a mapping of  $F$  into the space of polynomials with  $m$  indeterminates and of degree at most  $m$ . A continuity modul (“module de continuité”)  $\alpha(x)$  is a continuous, increasing and concave real-valued function defined on the non-negative reals, being zero at  $x = 0$ . Now the main theorem of the paper can be stated: a necessary and sufficient condition in order that exists a function  $\hat{f} \in \mathcal{D}^m(K)$  (= the set of all functions  $f$  on  $K$ , which have a derivative up to order  $m$ ) of which the Taylor's polynomials coincide for every  $A \in F$  with the polynomials of a given Taylor's field  $A \Rightarrow P_A$ , of degree  $m$ , is the existence of a continuity modul  $\alpha(x)$  such that,

$$|P_A(M) - P_B(M)| \leq (\|AB\| + \|AM\|)^m \alpha(\|AB\|)$$

for every  $A, B \in F$  and  $M \in R^n$ . This theorem constitutes a strengthened formulation of the known extension theorem of H. Whitney (this Zbl. **8**, 249). If  $J^m(F)$  is the closed ideal in  $\mathcal{D}^m(K)$  of all functions which are zero on  $F$  as well as their derivatives of order  $\leq m$ , then a Whitney algebra is the quotient space  $\mathcal{D}^m(K)/J^m(F)$ , which under a suitable norm is a Banach algebra. In the sequel the author formulates some properties of this special Banach algebra and gives some applications concerning the construction of certain functions.

*A. Mallios.*

**Timan, M. F.:** On the interrelation between the total and partial best approximations in the mean for functions of many variables. Doklady Akad. Nauk SSSR **112**, 24—26 (1957) [Russisch].

Untersucht wird der Raum  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) der in  $x_1, \dots, x_k$  mit  $2\pi$  periodischen Funktionen  $f$  bei Verwendung der Norm:

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_k)|^p dx_1 \dots dx_k \right\}^{1/p}.$$

Es werde

$$E_{n_1, \dots, n_k}(f)_{L_p} = \inf_T \|f(x_1, \dots, x_k) - T_{n_1 \dots n_k}(x_1, \dots, x_k)\|_{L_p}$$

als totales Maß für die beste Approximation von  $f \in L_p$  durch ein trigonometrisches Polynom  $T_{n_1 \dots n_k}$  des Grades  $\leq n_i$  in  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , genommen. Es sei  $r < k$ . Als partielle beste Approximation von  $f$  durch trigonometrische Polynome von  $x_1, \dots, x_r$  mit Koeffizienten, die periodisch mit  $2\pi$  von  $x_{r+1}, \dots, x_n$  abhängen, werde:

$$E_{n_1, \dots, n_r, \infty}(f)_{L_p} = \inf_T \|f(x_1, \dots, x_k) - T_{n_1, \dots, n_r}(x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_k)\|_{L_p}$$

definiert. Verf. beweist die beiden Ungleichungen: (1) Für beliebiges  $p > 1$  gibt es eine von  $f \in L_p$  unabhängige Konstante  $C_p$ , so daß

$$E_{n_1, \dots, n_k}(f)_{L_p} \leq C_p \min \{E_{n_{v_1}, \dots, n_{v_i}, \infty}(f)_{L_p} + E_{n_{v_{i+1}}, \dots, n_{v_k}, \infty}(f)_{L_p}\}$$

( $v_m = 1, 2, \dots, k$ ;  $m = 1, 2, \dots, i$ ). (2) Im Falle  $p = 1$ ,  $p = \infty$  gilt mit einer absoluten Konstanten  $C$ :

$$E_{n_1, \dots, n_k}(f) \leq C \min \{[E_{n_{v_1}, \dots, n_{v_i}, \infty}(f) + E_{n_{v_{i+1}}, \dots, n_{v_k}, \infty}(f)] \log n_{v_1} \dots \log n_{v_i}\}$$

( $v_m = 1, 2, \dots, k$ ;  $m = 1, 2, \dots, i$ ,  $i \leq [\frac{1}{2}k]$ ).

W. Thimm.

**Kaźmin (Kazmin), Ju. A. (Yu. A.):** On complete systems and bases in  $L_2$ . Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 1199—1202 (1957) [Russisch].

A typical result is: Let  $\{g_n\}$ ,  $\{h_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , form a bi-orthonormal system in  $L_2(a, b)$ , the  $\{g_n\}$  forming a basis. Let the system  $\{f_n\}$  be linearly independent and, writing  $R_n = f_n - g_n$ , let the double series  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (R_i, R_k)(h_i, h_k)$  converge (presumably absolutely). Then the system  $\{f_n\}$  is also a basis in  $L_2(a, b)$ , and expansions in terms of the  $\{f_n\}$  and in terms of the  $\{g_n\}$  generate the same coefficient-spaces. Earlier results of N. K. Bari [Mat. Sbornik, n. Ser. 14 (56), 51—108 (1944)], on the case when the  $\{g_n\}$  are orthonormal, are included. The proof depends on the integral equation

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) g(s) ds, \quad \text{where } K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(x) h_i(s).$$

The author gives further results of a similar character in which the  $\{g_n\}$  need not form a basis, but are complete and “minimal”, or else complete and bounded and “strongly minimal”; the latter means that there is  $\delta > 0$  such that no  $g_i$  can be approximated to within  $\delta$  by a linear combination of the remaining  $g_n$ . The final section considers conditions for the  $\{f_n\}$  to form a basis in the space of functions  $\sum c_k g_k$ , where  $\sum |c_k| < \infty$ . F. V. Atkinson.

**Pulatov, A. I.:** Über einige Klassen von Orthonormalsystemen. Izvestija Akad. Nauk UzSSR, Ser. fiz.-mat. 1958, Nr. 6, 57—64 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet die in  $[0, \pi]$  orthonormierten Systeme, die aus dem Cosinus-, bzw. Sinussystem durch die Orthogonalisierung relativ zu einer positiven, integrierbaren Gewichtsfunktion erhalten werden. Für die Entwicklungen nach diesen Systemen werden einige Konvergenzsätze, z. B. die Analoga der Sätze von A. N. Kolmogorov und I. P. Natanson für die orthogonalen Polynomreihen bewiesen.

K. Tandori.

**Gupta, D. P.:** Note on the convergence of series of ultraspherical polynomials. Amer. math. Monthly 65, 762—764 (1958).

Il teorema di Kolmogorov riguardante la convergenza delle serie trigonometriche  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ , allorquando la successione dei coefficienti  $(a_n)$  è quasi-con-  
vessa, ha stato trasportato da A. Zitarosa alle serie di polinomi di Legendre (questo Zbl. 32, 407). Una notevole generalizzazione dal teorema di Zitarosa al



caso delle serie di funzioni ultrasferiche di ordine  $\lambda$ :  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\lambda)}(x)$  è fatta dall'A. dimostrando la convergenza uniforme di queste serie nell'intervallo  $(-1 + \delta, 1 - \delta)$  sempre che  $a_n = o(n^\mu)$  e la successione  $\{a_n/(n + \lambda)^\mu\}$  è a variazione limitata per  $0 < \mu < \lambda$  essendo  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ . *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

**Ribarič, M. and A. Suhadolc:** On the completeness of orthogonal polynomials in infinite intervals. *Periodicum math.-phys. astron.*, II. Ser. **13**, 165—168 (1958).

Gli AA. dimostrano che, se  $q(x)$  è quasi ovunque differente da zero in  $(0, \infty)$  e se esiste un  $m > 0$  tale che

$$\int_0^{\infty} q^2(x) e^{m\sqrt{x}} dx < \infty,$$

allora i termini della successione  $\{x^n q(x)\}$  sono di quadrato sommabile in  $(0, \infty)$  e la successione è completa; se esiste un  $\alpha > 0$  ed un  $x_0 \geq 0$  tali che

$$\int_{x_0}^{\infty} q^{-2}(x) e^{-(\alpha\sqrt{x} \log^{-2} x)} dx < \infty,$$

la successione  $\{x^n q(x)\}$  non è completa in  $(0, \infty)$ . Due criteri di natura analoga si hanno per le successioni  $\{x^n q(x)\}$  definite in  $(-\infty, \infty)$ . *G. Sansone.*

**Yano, Shigeki:** Cesàro summability of Walsh-Fourier series. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. **9**, 267—272 (1957).

The author shows that Fine's lemma (N. J. Fine, this Zbl. **65**, 53) is completed in a form of maximal theorem. This remark seems to be important. From this he proves maximal theorems for Cesàro means of Walsh-Fourier series. *G. Sunouchi.*

● **Franklin, Philip:** An introduction to Fourier methods and the Laplace transformation. Unabridged and corrected ed. of the work first publ. in 1949 under the title „Fourier methods“. New York: Dover Publications, Inc. 1958. X, 289 p. \$ 1,75.

Das Buch gibt eine Einführung in die Fourierschen Reihen, Fourierschen Integrale, Separationsansätze und Laplace-Transformation. Die Darstellung ist außerordentlich elementar gehalten und durch viele einfache Aufgaben unterbrochen. Beweise fehlen ganz. Vorausgesetzt werden nur sehr bescheidene Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung, jedoch bei weitem nicht in dem Umfang, wie sie in einer Universitätsvorlesung vermittelt werden. *G. Hellwig.*

**Yano, Kenji:** On convergence criteria for Fourier series. I. *Proc. Japan Acad.* **34**, 331—336 (1958).

Hardy and Littlewood proved a new convergence criterion of Fourier series by the aid of Varignon summability, and Wang gave another proof by Riesz summability. The author shows the above criterion and related theorems by the use of delayed mean of de la Vallée Poussin. *G. Sunouchi.*

**Noble, M. E.:** On a convergence criterion of Hardy and Littlewood. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. **9**, 28—39 (1958).

Verf. verallgemeinert den klassischen Konvergenzsatz von G. H. Hardy und J. E. Littlewood (dies. Zbl. **5**, 394). Ist  $f(x) \in L$  mit

$$(*) \quad \int_0^t |f(x+u) - f(x)| du = o(t\Phi(|t|)),$$

wo  $\Phi(t)$  eine monoton wachsende, stetige Funktion mit  $\Phi(0) = 0$  und  $\Phi(t) = O((\log 1/|t|)^{-1})$  bezeichnet, und eine Folge von natürlichen Zahlen  $\{n_k\}$  ( $n_k \rightarrow \infty$ )

und eine reelle Folge  $\{\lambda_{n_k}\}$  ( $\lambda_{n_k} = o(n_k)$ ) mit  $(**)$   $\int_{n_k}^{\lambda_{n_k}^{-1}} u^{-1} \Phi(u) du = O(1)$  gegeben,

so daß

$$\liminf_k (\min (s_m(x) - s_n(x))) \geq 0 \quad (|m - n_k| \leq \lambda_{n_k}, \quad |n - n_k| \leq \lambda_{n_k}; m > n)$$

gilt, so ist  $s_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ , wo  $s_n(x)$  die  $n$ -te Partiellensumme der Fourierreihe von  $f(x)$  bezeichnet. Die Bedingung (\*\*) kann nicht abgeschwächt werden. Es wird noch der folgende Satz bewiesen: Besteht (\*) mit  $O(t(\log 1/|t|)^{-1})$  und gibt es eine Folge natürlicher Zahlen  $\{n_k\} (n_k \rightarrow \infty)$  derart, daß

$$\liminf_k (\min (s_m(x) - s_n(x))) \geq 0 \quad (|m - n_k|, |n - n_k| \leq n_k^{1-\delta}; \quad m > n)$$

für jedes  $\delta (> 0)$  gilt, so ist  $s_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ . K. Tandori.

Se, Din-fan: Über die absolute Konvergenz der Fourierreihen. Science Record, n. Ser. 2, 439—442 (1958).

Let  $\frac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  be the Fourier series of a function  $f$  with period  $2\pi$  and belonging to any class  $L_p (0, 2\pi)$  for  $p \geq 1$ . For a positive integer  $l$ , let

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(x + jh) \quad \text{and} \quad \omega_l(\delta, f) = \max_{|h| \leq \delta} \max_x |\Delta_h^l f(x)|.$$

Two results on the convergence of the series (')  $\sum (|a_n|^\beta + |b_n|^\beta) n^\gamma$  are stated without proof. Let

$$A_n^l(N, f)_p = \left\{ N^n \int_0^{2\pi} |\Delta_h^l f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad h = \frac{\pi}{N^n}, \quad N > 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

and let the series  $\sum_1^\infty [A_n^l(N, f)_p]^\beta n^{\gamma+1-\beta}$  converge for  $1 < p \leq 2$ , some  $N > 1$ , for some positive integer  $l$ ,  $\gamma \geq 0$ , and  $0 < \beta < p/(p-1)$ , then the series (') converges. Again, if  $f$  is of bounded variation and  $\sum_1^\infty [\omega_l(2^{-n}, f)]^\beta n^{\gamma+1-\beta}$  converges for  $\gamma \geq 0$  and  $0 < \beta < 2$ , then (') converges. Similar results are stated for Double Fourier series. V. Ganapathy Iyer.

Kennedy, P. B.: Remark on a theorem of Zygmund. J. London math. Soc. 33, 71—72 (1958).

Let  $\varphi(t) \downarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ . Then there exists an everywhere divergent series  $\sum_1^\infty (\alpha_k \cos n_k x + \beta_k \sin n_k x)$ , where  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $\beta_k \rightarrow 0$  and  $\{n_k\}$  is a sequence of integers such that  $n_{k+1}/n_k > 1 + \varphi(n_k)$ . This result should be compared with the announced theorem of Zygmund, which states convergence at a set, which is everywhere dense and everywhere of the power of the continuum, if  $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$ . A. Nordlander.

Hirokawa, Hiroshi: On a sequence of Fourier coefficients. Kōdai math. Sem. Reports 19, 1—8 (1958).

Criteria of Gergen type are given for summability  $(C, 1)$  of the sequence  $\{n B_n(x)\}$  or convergence of the conjugate series  $\sum_{n=1}^\infty B_n(x)$  of an integrable function  $f(x)$ . A typical result is: Put  $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$  and

$$\Psi_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-u)^{\beta-1} \psi(u) du.$$

Let  $\gamma \geq \beta > 0$ ,  $\Delta = \gamma/\beta$ , and  $0 < \xi < \pi$ . If  $\Psi_\beta(t) = o(t^\gamma)$  as  $t \rightarrow 0$  and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{y \rightarrow 0} \int_{(ky)^{1/\Delta}}^\xi |\psi(t+y) - \psi(t)| t^{-1} dt = 0,$$

then the sequence  $\{n B_n(x)\}$  is evaluable  $(C, 1)$  to the value  $l/\pi$ . A. Nordlander.

Efimov, A. V.: Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen der Klasse  $\tilde{H}_2^1$ . Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 303—311 (1957) [Russisch].



Eine stetige periodische Funktion  $f(x)$  gehört zur Klasse  $\tilde{H}_p^\alpha(K)$ , wenn für  $t > 0$

$$|\Delta_t^p f(x)| = \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(x + i t) \right| \leq K t^\alpha.$$

Wir setzen  $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n x dx$ . Für  $\tilde{H}_1^\alpha(1)$ , d. h. die Klasse  $\text{Lip}_1 \alpha$ , hat Lebesgue gezeigt, daß

$$\sup_{f \in \tilde{H}_1^\alpha(1)} |a_n(f)| = \frac{4}{\pi n^\alpha} \int_0^{\pi/2} t \sin t dt$$

gilt [Bull. Soc. math. France 38, 184—210 (1910)]. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß

$$\sup_{f \in \tilde{H}_1^\alpha(2)} |a_n(f)| = \frac{4}{\pi n} C_0, \quad \text{wo } 1,1335 < C_0 < 1,255.$$

Für  $f(x) \in \tilde{H}_2^1(2)$  betrachtet der Verf. die Funktion

$$f^*(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \left[ f\left(\frac{p\pi}{n} + x\right) + f\left(\frac{p\pi}{n} - x\right) \right].$$

Es ist  $a_n(f) = a_n(f^*)$  und  $f^* \in \tilde{H}_2^1(2)$ , daher

$$\sup_f |a_n(f)| = \sup_{f^*} |a_n(f^*)| = \frac{4}{\pi n} \sup_{f^*} \left| \int_0^{\pi/2} f^*(x) \cos x dx \right|.$$

$C_0$  wird dann nach Konstruktion von geeigneten Beispielen abgeschätzt.

A. Nordlander.

**Berg, Lothar:** Herleitung asymptotischer Ausdrücke für Integrale und Reihen. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 3, 5—7 (1957).

Die Arbeit stellt eine kurze Zusammenfassung der Habilitationsschrift des Verf. dar. Darin wird die berühmte Sattelpunktmethode von Laplace zur asymptotischen Auswertung bestimmter Integrale von der Form

$$G(s) = \int_a^b dt e^{-s h(t) - f(t)}$$

auf Integrale von dem allgemeinen Bau

$$G(s) = \int_0^\infty dt e^{-g(s,t)}$$

sinngemäß übertragen, wobei zunächst alles reell sei, und  $s \rightarrow +\infty$  angenommen wird. Unter der Voraussetzung, daß  $g(s, t)$  für jedes feste  $s > 0$  eine in  $t$  konvexe Funktion mit einem ausgeprägten Minimum an der Stelle  $t = \tau = \varphi(s)$  ist, wird der Hauptbeitrag von einer Umgebung  $|t - \varphi(s)| \leq \omega(s)$  ( $\omega(s) > 0$ ,  $\varphi(s) \leq \omega(s)$ ) geliefert, wofern die folgenden Bedingungen für  $s \rightarrow \infty$  erfüllt sind:

$$(1) \quad \omega^2(s) g_{tt}(s, \varphi(s)) \rightarrow \infty; \quad (2) \quad g_{tt}(s, \xi(s)) \sim g_{tt}(s, \varphi(s))$$

für  $|\xi(s) - \varphi(s)| \leq \omega(s)$ ;

$$(3a) \quad \sqrt{g_{tt}(s, \varphi(s))} \int_0^{\varphi(s) - \omega(s)} dt e^{-g(s,t) + g(s, \varphi(s))} \rightarrow 0,$$

und analog (3b) für das entsprechende Integral für das Intervall  $\varphi(s) + \omega(s) \dots \infty$ . Alsdann gilt:

$$(4) \quad G(s) \sim \sqrt{2\pi/g_{tt}(s, \varphi(s))} e^{-g(s, \varphi(s))}.$$

Falls die Umkehrfunktion  $s = \psi(\tau)$  von  $\tau = \varphi(s)$  existiert, kann man diese in (4) einführen, sofern  $\psi(\tau) \rightarrow \infty$  für  $\tau \rightarrow \infty$  und erhält

$$(5) \quad G(\psi(\tau)) \sim \sqrt{2\pi/g_{tt}(\psi(\tau), \tau)} e^{-g(\psi(\tau), \tau)}.$$

Zu diesem „Hauptsatz“ gibt Verf. noch eine Reihe von Ergänzungen und Verallgemeinerungen an: ist z. B.  $g(s, t)$  von der Form  $f(t) - \varrho(s)h(t)$ , so erhält er einfache hinreichende Bedingungen für die Voraussetzungen seines Hauptsatzes, wobei beachtenswert ist, daß  $-h(t)$  nicht notwendig ein endliches Minimum besitzen muß; als Beispiele hierfür gibt Verf. eine Mellin-Transformation an, bei der

$$g(s, t) = a t^\alpha - s \ln t - \chi(t) \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

ist, und für die er in dem Spezialfall  $a = \alpha = 1$  unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen die neue und bemerkenswerte Formel

$$(6) \quad \int_0^\infty dt e^{-t} t^{s-1} e^{\chi(t)} \sim \Gamma(s) e^{\chi(s) + \frac{1}{2}s\chi'(s)}$$

gewinnt, wobei  $\chi'(t) = o(t^{\gamma-1})$ ,  $1 \geq \gamma > 0$ ,  $\gamma \leq \frac{2}{3}$  vorausgesetzt ist. — Über die Eulersche Summenformel gewinnt Verf. das zu (4) analoge Ergebnis für Reihen

$$(7) \quad \sum_{\nu}^{0, \infty} e^{-g(s, \nu)} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_{tt}(s, \varphi(s))}} e^{-g(s, \varphi(s))},$$

falls  $g_{tt}(s, \varphi(s)) \rightarrow 0$  (immer für  $s \rightarrow \infty$ ); ist das nicht der Fall, und z. B.  $g_{tt}(s, \varphi(s)) \rightarrow k$  ( $k > 0$  eine Konstante), so tritt an Stelle von (7) die wesentlich andere Formel

$$(8) \quad \sum_{\nu}^{0, \infty} e^{-g(s, \nu)} \sim T_k(\varphi(s)) e^{-g(s, \varphi(s))},$$

wo

$$T_k(\varphi(s)) = \sum_{\nu}^{-\infty, \infty} e^{-\frac{1}{2}k(\nu - \varphi(s))^2}.$$

Unter weiteren zusätzlichen Voraussetzungen kann Verf. die Formel (5) auch auf komplexwertige Integranden ausdehnen.

*E. Mohr.*

**Berg, Lothar: Hinreichende Bedingungen zur asymptotischen Darstellung von Parameterintegralen.** Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 3, 85—88 (1957).

Die Arbeit schließt an die vorstehend referierte Abhandlung des Verf. an, die mit [1] zitiert wird. Die Betrachtung ist auf das Reelle beschränkt. In [1] folgt aus den dortigen Voraussetzungen (1), (2), (3a) und (3b) der „Hauptsatz“ (4). Von diesen Voraussetzungen sind i. a. (3a) und (3b) schwerer überprüfbar als (1) und (2). Verf. gibt nun in Form von zwei Hilfssätzen, von denen der erste von H. Schubert stammt, einfache hinreichende Bedingungen für das Erfülltsein von (3a) und (3b). Wir zitieren den ersten Hilfssatz: aus (1), (2) und der Voraussetzung:  $g_t(s, t)$  ist für jedes feste  $s \geq s_0$  monoton wachsend in  $t$ , folgt das Erfülltsein von (3a) und (3b). Verf. erläutert diesen Hilfssatz an dem Beispiel

$$g(s, t) = 4 \ln s \cdot e^{(\sqrt{t} - \sqrt{s})/\sqrt{\ln s}} - 4 \sqrt{t \ln s},$$

in welchem  $g(s, t)$  übrigens nicht die einfache Gestalt  $f(t) - \delta(s)h(t)$  hat, und zeigt daran auch, daß, wenn  $g_t(s, t)$  monoton wächst, der erste Hilfssatz weiterträgt als der zweite. Anschließend behandelt Verf. zwei weitere sehr lehrreiche Beispiele: im ersten, das sich auf die Betafunktion bezieht, ist im Gegensatz zu früher das Integrationsintervall endlich und demgemäß auch  $\tau = \varphi(s)$ ; im zweiten besitzt  $g_t(s, t) = 0$  drei Lösungen  $t = \tau = \varphi(s)$ . Am Schluß der Arbeit werden die Voraussetzungen für die Gültigkeit des „Hauptsatzes“ (4) in [1] wesentlich abgeschwächt: gegeben sei  $\gamma(s, t)$ ; es existiere eine Funktion  $g(s, t)$  mit  $\gamma(s, t) = g(s, t) + o(1)$  für  $t \rightarrow \infty$  gleichmäßig für alle hinreichend großen  $s$ ; es existiere weiter eine Funktion  $z(s)$  mit  $z(s) \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$  und

$$\sqrt{g_{tt}(s, \varphi(s))} e^{g(s, \varphi(s))} \int_0^{z(s)} dt e^{-\gamma(s, t)} \rightarrow 0 \quad \text{für } s \rightarrow \infty;$$

schließlich gelte für die zu  $g(s, t)$  gehörige Funktion  $\omega(s)$  in [1]:  $\varphi(s) - \omega(s) \rightarrow \infty$



für  $s \rightarrow \infty$ ; dann ist

$$\int_0^{\infty} dt e^{-\gamma(s,t)} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_{tt}(s, \varphi(s))}} e^{-g(s, \varphi(s))};$$

dabei braucht die Funktion  $\gamma(s, t)$  nicht differenzierbar zu sein. *E. Mohr.*

**Aljančić, S.: Quelques cas particuliers de passage à la limite dans les développements asymptotiques.** Centre Belge Rech. math., Colloque sur la Théorie des Suites, Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957, 96—108 (1958).

In einem fast eine Seite langen Satz werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß man den Operator  $\mathfrak{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{i\tau t} \psi(t) df(t)$  auf beide Seiten der asym-

ptotischen Entwicklung  $\Phi_{\lambda}(t) \sim \sum_{\mu} \frac{P_{\mu}(t)}{q_{\mu}(\lambda)}$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  anwenden darf und daß

wieder eine asymptotische Entwicklung entsteht. Dabei hat man die asymptotische Entwicklung für  $\Phi_{\lambda}(t)$  in dem Sinne  $\Phi_{\lambda}(t) = \sum_{\mu=0}^m \frac{P_{\mu}(t)}{q_{\mu}(\lambda)} + o\left\{\frac{1}{q_m(\lambda)}\right\}$  für alle  $m$

zu verstehen und die auftretenden Integrale gemäß  $\lim_{\sigma \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t + i\tau t} \psi(t) df(t)$ ,

wobei die  $q_{\mu}(\lambda)$  irgendwelche Funktionen mit den Eigenschaften  $q_{\mu}(\lambda) \rightarrow \infty$  und  $q_{\mu+1}(\lambda)/q_{\mu}(\lambda) \rightarrow \infty$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  sind. Als Folgerungen ergeben sich Bedingungen für die gliedweise Integration bzw. Summation asymptotischer Entwicklungen. Es werden auch einige Beispiele behandelt. *L. Berg.*

### Spezielle Funktionen:

● **Bowman, Frank: Introduction to Bessel functions.** Unabridged and unaltered republ. of the first ed. New York: Dover Publications, Inc. 1958. X, 135 p. \$ 1,35.

Eine verständliche Darstellung der Besselfunktionen, für den Gebrauch insbesondere in den Anwendungen. Im ersten und zweiten Kapitel werden die  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  ( $J_1(x) = -dJ_0(x)/dx$ ) und  $Y_0(x)$  (Differentialgleichung, Verhalten für große  $|x|$ , Nullstellen, Fourier- und Dini-Entwicklungen mit Anwendungen), im dritten die modifizierten Funktionen  $I_0(x)$  und  $K_0(x)$  mit Anwendungen, im 4. Kapitel die Integraldarstellungen und Integrale mit  $J_0(x)$  (Lipschitzsches und Webersches Integral), Gamma- und Beta-funktion, im 5. Kapitel asymptotische Entwicklungen für  $J_0(x)$  und  $H_0^{(j)}(x)$ ,  $j = 1, 2$  behandelt. Das sechste Kapitel bringt die Definition und Darstellung der  $J_n(x)$ ,  $Y_n(x)$  und  $H_n^{(j)}(x)$ ,  $j = 1, 2$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  und auch für beliebige reelle  $n$  (Integraldarstellungen, Differentialgleichung, Rekursionsformeln usw.). Im letzten Kapitel erfolgt Anwendung auf die Lösung der Keplerschen Gleichung u. a. (1. Aufl. s. dies. Zbl. 20, 112). *O. Volk.*

**Ragab, F. M.: Integration of E-functions and related functions with respect to their parameters.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 61, 335—340 (1958).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen (dies. Zbl. 79, 98) werden die Konturintegrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int w^{-\zeta} E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \alpha + \zeta, \beta - \zeta; q; \varrho_s; z) d\zeta,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int w^{-\zeta} E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \tfrac{1}{2}(\zeta + n), \tfrac{1}{2}(\zeta - n); q; \varrho_s; w^2) d\zeta,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int w^{-\zeta} (\pm e^{\pm i\pi(\zeta - n)/2}) E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \tfrac{1}{2}(\zeta + n), \tfrac{1}{2}(\zeta - n); q; \varrho_s; w^2 e^{-i\pi/2}) d\zeta,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\alpha + \zeta) \Gamma(\beta + \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta + \zeta)} w^{-\zeta} F\left(\alpha, \beta; \alpha + \beta + \zeta; \frac{z-1}{z}\right) d\zeta$$

durch  $E$ -Funktionen bzw. Produkte von Exponential-, Bessel- und  $E$ -Funktionen

dargestellt. Spezielle Wahl der Parameter

$$K_n(z) = (2\pi z)^{-1/2} e^{-z} \cos(n\pi) E\left(\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} - n; : 2z\right),$$

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^k e^{-z/2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)} E\left(\frac{1}{2} - k + m, \frac{1}{2} - k - m; : z\right),$$

ergibt entsprechende Integrale für die Besselschen und Whittakerschen Funktionen.

O. Volk.

**Olver, F. W. J.:** Uniform asymptotic expansions of solutions of linear second-order differential equations for large values of a parameter. Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A 250, 479—517 (1958).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (F. W. J. Olver, dies. Zbl. 70, 308; R. C. Thorne, dies. Zbl. 78, 58) leitet Verf. Bedingungen dafür ab, daß die Differentialgleichungen

$$w'' = (u^2 + f(u, \Theta, z)) w, \quad w'' = (u^2 z + f(u, \Theta, z)) w,$$

$$w'' = z^{-1} w' + (u^2 + (\mu^2 - 1) z^{-2} + f(u, \Theta, \mu, z)) w,$$

$u$  ein großer positiver Parameter,  $\mu$  ein reeller oder komplexer Parameter,  $\Theta \in \Theta$ ,  $z \in D(\Theta)$ , ein einfach zusammenhängender Bereich, bezüglich  $z, \Theta, \mu$  gleichförmige asymptotische Entwicklungen von der Form haben:

$$w = P(z) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s(\Theta, \mu, z)}{u^{2s}} + \frac{P'(z)}{u^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(\Theta, \mu, z)}{u^{2s}},$$

wo  $P(x) = e^{u^2}$  bzw.  $= \text{Ai}(u^{2/3} z)$  (Ai Airysche Funktion) bzw.  $= z \mathfrak{J}_\mu(u z)$  ( $\mathfrak{J}_\mu$  modifizierte Besselfunktionen der Ordnung  $\mu$ ). Die Koeffizienten  $A_s, B_s$  ergeben sich aus Rekursionen.

O. Volk.

**Meynieux, Robert:** Approximations de la fonction  $\Gamma$  appliquées aux solutions de l'équation de Weber. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 3312—3314 (1958).

Suite d'un travail antérieur (voir ce Zbl. 80, 276); l'A. donne des expressions approchées de solutions de  $u'' + (n - \frac{1}{4} u^2) u = 0$ , en partant d'expressions approchées de  $\Gamma$ , valables lorsque  $n$  a une partie imaginaire assez grande négative.

Ch. Blanc.

**Dörr, Johannes:** Mathieusche Funktionen als Eigenfunktionen gewisser Integralgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 38, 171—175 (1958).

Verf. gibt vor allem eine zweiparametrische Schar von Kernen für Integralrelationen zwischen Mathieuschen Funktionen an. Die Kerne stellen im wesentlichen die in einer beliebigen Richtung der Ebene fortschreitenden ebenen Wellen dar. Die beiden Parameter sind der Parameter der Mathieuschen Funktionen und ein Richtungsparameter. Die entsprechenden Integralrelationen für die Mathieuschen Funktionen ganzer Ordnung finden sich bereits vom Verf. unbemerkt — in Meixner-Schäpfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen (dies. Zbl. 58, 295), S. 184ff. Dort sind auch die Eigenwerte angegeben. Sie lassen sich — dies bleibt vom Verf. unbemerkt — einfach durch Mathieusche Funktionen ausdrücken. Mit Hilfe des Richtungsparameters leitet Verf. durch Überlagerung neue Kerne her. Dies sind im wesentlichen die von einem Brennpunkt des elliptischen Koordinatensystems ausgehenden Kreiszyylinderwellen. Auch diese finden sich, und zwar sogar allgemein für beliebiges Zentrum der Kreiszyylinderwellen, — vom Verf. unbemerkt — bei Meixner-Schäpfke, l. c. S. 182, bzw. schon bei J. Meixner, Integralbeziehungen zwischen Mathieuschen Funktionen (dies. Zbl. 43, 75). Von Interesse ist vielleicht die Bemerkung des Verf., daß gewisse dieser mit Zylinderfunktionen gebildeten Kerne iterierte Kerne zu den einfachsten Whittakerschen Kernen sind, so daß für die zugehörigen Eigenwerte entsprechende einfache Relationen bestehen. Wie Verf. dem Ref. brieflich mitteilt, hat er über die in der referierten Note veröffentlichten Ergebnisse bereits im Januar 1954 in einer Probe-Vorlesung an der TH Darmstadt vorgetragen.

F. W. Schäpfke.



**Bell, M.:** A note on Mathieu functions. Proc. Glasgow math. Assoc. **3**, 132—134 (1957).

Sind  $a_n, b_n$  die für  $q = 0$  auf  $n^2$  sich reduzierenden Eigenwerte der  $2\pi$ -Periodizität der Mathieuschen Differentialgleichung  $y'' + (a - 2q \cos 2z)y = 0$ , so ist für die Differenz  $a_n - b_n = q^n / 2^{2n-3} [(n-1)!]^2 + \dots$  das erste nicht verschwindende Glied der Potenzreihenentwicklung nach  $q$ . Der Beweis stützt sich auf die dreigliedrigen Rekursionsformeln für die Fourierkoeffizienten der Lösungen. Er wird für gerade und ungerade  $n$  getrennt geführt. Die einschlägige Literatur wird unvollständig und etwas einseitig zitiert. *F. W. Schäfke.*

**Chako, Nicholas:** On integral relations involving products of spheroidal functions. J. Math. Physics **36**, 62—73 (1957).

Die Ableitungen nach einer kartesischen Koordinate und die Ableitungen nach dem Winkel um eine feste Achse sind mit dem Laplaceschen Operator  $\Delta$  vertauschbar. Wendet man diese Operationen auf eine in rotationselliptischen Koordinaten separierte Lösung von  $\Delta u + k^2 u = 0$  an, so erhält man Lösungen derselben Differentialgleichung und damit in bekannter Weise Kerne, die Integralbeziehungen zwischen Sphäroidfunktionen liefern. Es erscheinen dabei Integrale über — abgesehen von elementaren Faktoren — Produkte von Sphäroidfunktionen (bzw. deren Ableitungen). Die Grenzübergänge zu den Kugelfunktionen und den Zylinderfunktionen werden ausführlich diskutiert. — Die von den Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten herrührenden Relationen finden sich — unabhängig — auch in einem Teil einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **80**, 274). *F. W. Schäfke.*

**Schmid, L. A.:** Explicit expression for spherical harmonics. Amer. J. Phys. **26**, 485—489 (1958).

Es wird eine Ableitung der expliziten Ausdrücke der Kugelfunktionen als Funktionen der Winkelkoordinaten angegeben, die zugleich eine für physikalische Zwecke übliche Normierung liefert. Die Ableitung stützt sich auf die Darstellungstheorie der Drehgruppe. Es werden noch einige Operatorrelationen angegeben. *E. Thoma.*

**Peyser, Gideon:** Note on the derivatives of the Legendre polynomials. Math. Mag. **31**, 210 (1958).

**Felsen, L. B.:** Some new transform theorems involving Legendre functions. J. Math. Physics **37**, 188—191 (1958).

Es handelt sich um Lösungen der mit einem Beugungsproblem zusammenhängenden Differentialgleichung

$$(1) \left[ \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} - \left( \frac{1}{4} + x^2 \right) \sin \vartheta - \frac{\lambda}{\sin \vartheta} \right] G_\vartheta(\vartheta, \vartheta'; x, \lambda) = -\delta(\vartheta - \vartheta'), \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2.$$

mit Randbedingungen an den Randpunkten  $\vartheta_1, \vartheta_2$  ( $x$  ist ein reeller Parameter) mit dem Spektraltheorem:

$$\delta(\vartheta - \vartheta') \sin \vartheta' = \frac{1}{2\pi i} \oint_C G_\vartheta(\vartheta, \vartheta'; x, \lambda) d\lambda,$$

wo  $C$  alle Singularitäten von  $G_\vartheta$  im positiven Sinne einschließt. Die homogene Gleichung (1) hat die partikulären Integrale  $K_x^{\pm\mu}(\cos \vartheta)$  und  $K_x^\mu(\pm \cos \vartheta)$  mit  $K_x^\mu = P_{1/2-i\mu}^\mu$ ,  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . Verf. gibt für 1.  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , 2.  $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_2 < \pi$ , 3.  $0 < \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2 < \pi$ , je mit gewissen Randbedingungen, die dazu gehörigen  $G_\vartheta$  und  $\delta(\vartheta - \vartheta') \sin \vartheta'$ ; z. B. erhält er für 1. mit der Forderung der Endlichkeit in den Randpunkten:

$$G_\vartheta(\vartheta, \vartheta'; x, \lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + ix + \mu) K_x^{-\mu}(\cos \vartheta_<) K_x^{-\mu}(\cos \vartheta_>)}{2 \Gamma(\frac{1}{2} + ix - \mu) \cos(ix - \mu) \pi}, \mu = \sqrt{\lambda},$$

$$\delta(\vartheta - \vartheta') \sin \vartheta' = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mu \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + ix + \mu) K_x^{-\mu}(\cos \vartheta) K_x^\mu(-\cos \vartheta')}{\Gamma(\frac{1}{2} + ix - \mu) \cos(ix - \mu) \pi} d\mu;$$

dabei ist  $\Re \sqrt{\lambda} > 0$ ;  $\vartheta_>, \vartheta_<$  besagt:  $\vartheta$  größer bzw. kleiner  $\vartheta, \vartheta'$ . *O. Volk.*

**Popov, Blagoj S.:** Sur les fonctions de Legendre associées. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 912—914 (1959).

Verf. gibt eine Entwicklung des Produktes  $[d^r P_m(x)/dx^r] [d^s P_n(x)/dx^s]$  nach den  $d^s P_\nu(x)/dx^s$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  und wendet sie an zur Berechnung der Integrale

$$\int_{-1}^{+1} P_m^r(x) P_n^s(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} x^{n-m} P_m^r(x) P_n^s(x) dx,$$

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} d^m P_n(x)/dx^m, \quad -1 < x < +1.$$

Druckfehler in Reference (1). Betreffs der Anwendungen der  $P_n^m(x)$  erscheint dem Ref. ein Hinweis auf E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. 2. A. II (Berlin 1881) als angebrachter. Vgl. auch L. Kuipers, Monatsh. Math. **63**, 24—31 (1959).

*O. Volk.*

**Kuipers, L. and B. Meulenbeld:** Some properties of a class of generalized Legendre's associated functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 186—196 (1958).

**Kuipers, L. and B. Meulenbeld:** Related generalized Legendre's associated functions. Arch. der Math. **9**, 394—400 (1958).

Für die in zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. **79**, 95) von den Verff. eingeführten und untersuchten Funktionen  $P_k^{m,n}(z)$ ,  $Q_k^{m,n}(z)$ , die linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$(*) \quad (1-z^2) w'' - 2z w' + \left( k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)} \right) w = 0,$$

$k, m, n$  beliebige Parameter, sind, und für  $m = n$  in die zugeordneten Legendreschen Funktionen  $P_k^m(z)$ ,  $Q_k^m(z)$  übergeben, werden die weiteren partikulären Lösungen der Differentialgleichung (\*):  $P_k^{-m,n}(z)$ ,  $P_k^{m,-n}(z)$ ,  $P_{-k-1}^{m,n}(z)$ ,  $P_k^{-m,-n}(z)$ ,  $P_k^{n,m}(-z)$  und die entsprechenden  $Q_k^{-m,n}(z), \dots$  durch die  $P_k^{m,n}(z)$ ,  $Q_k^{m,n}(z)$  dargestellt, sowie für  $Q_k^{m,n}(z)$  eine weitere Integraldarstellung für  $\Re(k \pm \frac{1}{2}(m-n) + 1) > 0$  und neue Darstellungen durch hypergeometrische Funktionen in  $|z \mp 1| < 2$  gegeben.

*O. Volk.*

**Kuipers, L. and B. Meulenbeld:** Linear transformations of generalized Legendre's associated functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 328—329 (1958).

**Meulenbeld, B.:** Generalized Legendre's associated functions for real values of the argument numerically less than unity. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 557—563 (1958).

Es handelt sich um die im vorstehenden Referat genannten Funktionen  $P_k^{m,n}(z)$ ,  $Q_k^{m,n}(z)$ , die sich durch die Summe

$$A(k, m, n, z) {}_2F_1(a_1, b_1; c_1; \zeta) + B(k, m, n, z) {}_2F_1(a_2, b_2; c_2; \zeta),$$

$\zeta = \frac{1}{2}(1-z)$  usw.,  $|\zeta| < 1$ , darstellen lassen. In der ersten Arbeit wird mit Hilfe der Transformationsformeln der hypergeometrischen Funktion eine Tabelle der  $A, B; a_j, b_j, c_j$  ( $j = 1, 2$ ) analog zu der für die Legendreschen Funktionen bei Erdelyi, ... Higher transcendental functions. I. (dies. Zbl. **51**, 303) 3. 2; 124ff. gegeben; in der zweiten werden die  $P_k^{m,n}(z)$ ,  $Q_k^{m,n}(z)$  auf dem Querschnitt  $-1 < z = x < +1$ , definiert durch

$$P_k^{m,n}(x) = \frac{1}{2} \left( e^{\pi i m/2} P_k^{m,n}(x + 0i) + e^{-\pi i m/2} P_k^{m,n}(x - 0i) \right),$$

$$Q_k^{m,n}(x) = \frac{1}{2} e^{-\pi i m} \left( e^{-\pi i m/2} Q_k^{m,n}(x + 0i) + e^{\pi i m/2} Q_k^{m,n}(x - 0i) \right),$$

explizite in der obigen Form angegeben.

*O. Volk.*

**Maass, Hans:** Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen. Math. Ann. 135, 391—416 (1958).

$X = X^{(m, n)}$  mit  $m \geq 2n$  bedeute eine variable Matrix von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 72, 84) wurde gezeigt: die Operatoren  $\sigma(X' \partial/\partial X)$ ,  $\sigma(\Lambda^{2\nu})$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) mit  $\Lambda = X \partial/\partial X' - (X \partial/\partial X')$  ( $\sigma = \text{Spur}$ ) erzeugen den Ring aller bei  $X \rightarrow UXV$  mit  $U'U = 1$ ,  $|V| \neq 0$  invarianten Differentialoperatoren. Zwischen ihnen besteht eine Relation

$$(1) \quad 2n |X X'| |(\partial/\partial X')(\partial/\partial X)| + \sigma(\Lambda^{2n}) = P(\sigma(\Lambda^2), \dots, \sigma(\Lambda^{2n-2}), \sigma(X' \partial/\partial X))$$

mit einem gewissen Polynom  $P$ , dessen explizite Berechnung allerdings schwierig ist und nur für  $n = 1$  und  $2$  durchgeführt wird. Unter einer Kugelfunktion  $u(X)$  der Variablen  $X$  wird ein Polynom mit den drei Eigenschaften (2)  $u(XV) = u(X)$  für  $|V| = 1$ , (3)  $u(X)$  ist eine Eigenfunktion der genannten Operatoren, (4)  $u(X) \equiv 0 \pmod{|X'X|}$ ,  $u(X) \neq 0$  verstanden. Die dritte Eigenschaft hätte auch durch die äquivalente (5)  $|(\partial/\partial X')(\partial/\partial X)| u(X) = 0$  ersetzt werden können. Verf. stellt sich die Aufgabe, die Eigenwerte  $nk, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  dieser Operatoren zu berechnen. Was den ersteren betrifft, so muß  $k$  eine natürliche Zahl sein. Die Bestimmung von  $\lambda_1$  läßt sich auf ein Eigenwertproblem in  $n$  Variablen zurückführen. Das Verfahren ist recht kompliziert und kann hier nicht im einzelnen beschrieben werden. Es beruht im Prinzip auf der Verallgemeinerung des Begriffs der rotationssymmetrischen (Legendreschen) Kugelfunktionen im Falle  $n = 1$ . Im Falle  $n = 2$  läßt sich dieses Eigenwertproblem explizit lösen, und die Gleichung (1) liefert dann auch  $\lambda_2$ . Zum Schluß beweist Verf. einen Satz über die Entwickelbarkeit beliebiger Polynome in  $X$  nach Kugelfunktionen, der in der nachstehend referierten Arbeit durch ein hiervon unabhängiges Verfahren nochmals bewiesen wird. *M. Eichler.*

**Maass, Hans:** Zur Theorie der harmonischen Formen. Math. Ann. 137, 142—149 (1959).

Es sei  $F(x_i)$  eine irreduzible Form in  $n$  Variablen vom Grade  $g > 0$  mit reellen Koeffizienten. Zu jeder Form  $u(x_i)$  in diesen Variablen gibt es dann ganze rationale homogene Lösungen  $u_\nu(x_i)$  von den Graden  $k - g\nu$  ( $0 \leq \nu \leq k/g$ ) der Differentialgleichung  $F(\partial/\partial x_i) u_\nu(x_i) = 0$  so, daß  $u(x_i) = \sum F(x_i)^\nu u_\nu(x_i)$  ist. Die  $u_\nu(x_i)$  lassen sich als Linearkombinationen der speziellen Lösungen  $(\sum a_i x_i)^{k-g\nu}$  mit  $F(a_i) = 0$  darstellen. Als Spezialfall sind hierin bekannte Sätze über Kugelfunktionen enthalten. Aber auch die Kugelfunktionen einer Matrixvariablen  $X$  werden hiermit erfaßt, nämlich die Lösungen von  $|(\partial/\partial X')(\partial/\partial X)| u(X) = 0$ . *M. Eichler.*

**Orts, José Maria:** Analytische Darstellung hypergeometrischer Funktionen durch Polynomreihen. Collect. Math. 9, 145—151 (1957) [Spanisch].

Legendres Polynome  $P_n(x)$  lassen sich als Sonderfälle der hypergeometrischen Funktion (h. F.)  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  ausdrücken. Das Ziel des Verf. ist, umgekehrt die h. F. durch die  $P_n(x)$  darzustellen, was mittels der Reihe

$$(1) \quad F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 F(\alpha, \beta, \gamma; x) P_n(x) dx$$

möglich ist. Um die Koeffizienten  $a_n$  anders als durch diese Integrationen zu gewinnen, ersetzt Verf. die h. F. durch Eulers Integral

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 (1-tx)^{-\alpha} t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} dt [\Re \beta > 0, \Re(\gamma-\beta) > 0]$$

und den ersten Faktor des Integranden mit  $tx = u$  durch den bekannten Sonderfall der Reihe (1) für  $\beta = \gamma$ , die sog. Stieltjes-Neumannsche Reihe

$$\frac{1}{(1-u)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(u), \quad a_n = (2n+1) \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha+n)}.$$

Indem er dann unter der Annahme  $0 < \alpha < \frac{3}{4}$  gliedweise integriert, erhält er eine



nach gewissen Polynomen  $Q_n^{(\beta, \gamma)}(x)$   $n$ -ten Grades fortschreitende Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{2^\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n^{(\beta, \gamma)}(x);$$

sie verwandelt sich in die eingangs als Ziel des Verf. bezeichnete Reihe, wenn man jedes  $Q_n^{(\beta, \gamma)}(x)$  als lineare Verbindung der  $P_n(x)$ ,  $P_{n-2}(x)$ , ... darstellt. — Beispiel:  $\gamma = 1$ , auch mit den besonderen Werten  $\alpha = \frac{1}{2}$  und  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . — Auf S. 147, Z. 7 lies [4] statt [1]; in [7]  $dt$  statt  $dx$ .

*L. Koschmieder.*

**Toseano, Letterio:** Polinomi ortogonali o reciproci di ortogonali nella classe di Appell. *Matematiche* **11**, 168—174 (1957).

Unter den Orthogonalpolynomen sind die Hermiteschen die einzigen, die zugleich Appellsche Polynome sind; die Laguerreschen Polynome sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre „Reziproken“, d. h. die Bildungen  $x^n L_n(1/x)$ , Appellsche Polynome sind. — Diese schon mehrfach bewiesenen Ergebnisse lassen sich z. B. aus der in diesem Zbl. **11**, 62 besprochenen Note des Ref. entnehmen.

*W. Hahn.*

**Carlitz, L.:** A note on some special polynomials. *Revista mat. Hisp.-Amer.* **18**, 140—145 (1958).

Es handelt sich um die speziellen Lagrangeschen Polynome [siehe Erdelyi u. a., *Higher transcendental functions III* (dies. Zbl. **64**, 63) 267, (2)]

$$g_n(1, -1; -v, -u) = P_n^{(u-n, v-n)}(0) = c_n(u, v) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{u}{n-r} \binom{v}{r}.$$

Es wird die Umkehrung einer Formel von Kaluza (dies. Zbl. **7**, 344) gezeigt:

$$\binom{m+n}{n} c_{m+n}(u, v) = \sum_{r=0}^{\min(m, n)} K_r c_{m-r}(u, v) c_{n-r}(u, v),$$

$$K_r = (m+n-u-v-2r)_{2r}/r! (m+n-u-v-2r+1)_r;$$

sowie:

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{s}{r} ((r-s)m)! (n+sm)! c_{(r-s)m}(u, v) c_{n+sm}(u, v) \equiv 0 \pmod{r! m^r},$$

wenn  $u+v$  eine beliebige ganze Zahl ist; für  $u, v$  beliebig gilt eine schwächere Kongruenz.

*O. Volk.*

**Al-Salam, A.:** On some generating functions for the product of two Jacobi polynomials. *Revista mat. Hisp.-Amer.* **18**, 135—139 (1958).

Aus der Entwicklung [siehe A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi, *Higher transcendental functions III* (dies. Zbl. **64**, 63) 267, (26)]:

$$F_4(\gamma, \delta; 1+\alpha, 1+\beta, \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n (\delta)_n}{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

werden unter Anwendung der Batemanschen Darstellung von  $P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$  durch Produkte von zwei Jacobischen Polynomen  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  durch Spezialisierung der Parameter:  $\gamma = 1+\alpha$ ,  $\delta = 1+\beta$ ;  $\gamma = -m$ ,  $\delta = 1+\alpha+\beta-\gamma$  erzeugende Funktionen für Produkte von zwei Jacobischen Polynomen, und aus der Entwicklung [siehe loc. cit. 265, (11)]

$$(1-xt)^{-p} {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}p, \tfrac{1}{2}(p+1); 1+\alpha; t^2 \frac{x^2-1}{(1-xt)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{(2\alpha+1)_n} C_n^{\alpha+1/2}(x) t^n$$

in analoger Weise solche für die Produkte aus zwei Gegenbauer-Polynomen  $C_n^{\alpha+1/2}(x) = [(2\alpha+1)_n/(\alpha+1)_n] P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$  abgeleitet. Druckfehler in den „References“.

*O. Volk.*

**Al-Salam, W. A.:** Note on a  $q$ -identity. *Math. Scandinav.* **5**, 202—204 (1958).

Aus einer Formel von F. H. Jackson [Quart. J. Math., Oxford Ser. **12**, 176—172

(1941)] wird durch Spezialisieren die Identität gewonnen:

$$\sum_{s=0}^{2m} (-1)^s \begin{bmatrix} 2m \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2p_1 \\ p_1 - m + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2p_2 \\ p_2 - m + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2p_3 \\ p_3 - m + s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p + s \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p + 2m \\ s \end{bmatrix}^{-1} q^{s(3s-6m+1)/2} \\ = (-1)^m \frac{[2p_1]! [2p_2]! [2p_3]! [m+p]! (q^{m+1})_m q^{(p+1)m}}{[m+p_1]! [m+p_2]! [m+p_3]! [p+2m]! [p_1]! [p_2]! [p_3]!} \cdot \frac{[m+p_1+p_2]! [m+p_1+p_3]! [m+p_2+p_3]!}{[p_1+p_2]! [p_1+p_3]! [p_2+p_3]!} q^{-m(2p+3m+1)/2}$$

wo  $p = p_1 + p_2 + p_3$ ,  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_s = (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{s-1})$ ,  
 $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} = \frac{(q)_n}{(q)_s (q)_{n-s}}, \quad [n]! = (q)_n.$$

Hieraus werden für  $p_1 = p_2 = p_3$  und  $q \rightarrow 1$  weitere Identitäten gewonnen, die sich an solche von J. E. Fjeldstad (dies. Zbl. 55, 8) und L. Carlitz [Math. Scand. nav. 3, 281—282 (1955)] anschließen.

O. Volk.

### Funktionentheorie:

Bishop, Errett: Subalgebras of functions on a Riemann surface. Pacific J. Math. 8, 29—50 (1958).

L'A. étend aux surfaces de Riemann le théorème de S. N. Mergeljan sur l'approximation par polynômes des fonctions continues sur un ensemble compact du plan complexe et holomorphes aux points intérieurs (ce Zbl. 41, 385). La surface de Riemann  $\Sigma$  considérée n'est pas supposée connexe; elle est séparable.  $R'$  est une sous-algèbre de l'algèbre  $R$  des fonctions partout holomorphes sur  $\Sigma$ ;  $R'$  joue le rôle de l'algèbre des polynômes dans le théorème de Mergeljan. On fait sur  $R'$  les deux hypothèses suivantes: 1.  $R'$  sépare les points de  $\Sigma$ ; 2. pour tout  $p \in \Sigma$ ,  $R'$  contient une fonction univalente dans un voisinage de  $p$ . Soit un ensemble compact  $C \subset \Sigma$  tel que pour tout  $p \notin C$  il existe  $f \in R'$  telle que  $|f(p)| > \max_{q \in C} |f(q)|$ ; alors

$R'(C)$ , ensemble des limites uniformes sur  $C$  de fonctions de  $R'$ , est identique à  $\Phi(C)$ , ensemble des fonctions continues sur  $C$  et holomorphes aux points intérieurs. Si maintenant les hypothèses 1. et 2. sont vérifiées sauf peut-être aux points d'un ensemble singulier n'ayant qu'un nombre fini de points en commun avec tout compact,  $R'(C)$  a une codimension finie dans  $\Phi(C)$ . — La démonstration repose sur l'étude des fonctionnelles linéaires et bornées sur  $\Phi(C)$ , étendues par le théorème de Hahn-Banach à l'espace  $\Omega(C)$  des fonctions continues sur  $C$ , et représentées alors comme intégrales de Radon. Le théorème de Mergeljan est utilisé. G. Bourion.

Kočarjan, G. S.: Über die Approximation durch rationale Funktionen im Komplexen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija 11, Nr. 4, 53—77 (1958) [Russisch].

1. Evaluation de l'approximation de  $f(z)$ , donnée sur  $|z| = 1$ , par les sommes partielles de son développement de Fourier relativement à un système de fonctions rationnelles de Walsh à zéro  $\alpha_j$  et pôles  $\beta_k$  donnés; à la différence des recherches de M. M. Džerbasjan (ce Zbl. 73, 285), il n'est pas exclus que les  $\alpha_j$  et  $\beta_k$  aient des points-limites sur  $|z| = 1$ . 2. Extension à un domaine  $G$  à frontière suffisamment régulière des résultats donnés dans le cas du cercle par M. M. Džerbasjan et S. N. Mergeljan (ce Zbl. 56, 71) sur l'approximation par fonctions rationnelles de  $f(z)$  holomorphe dans  $G$  et satisfaisant dans  $G$  à une condition de Lipschitz.

G. Bourion.

Kažmin, Ju. A.: Einige Bemerkungen über die Vollständigkeit in  $E_1$  und  $L_2$ . Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 3 (81), 197—203 (1958) [Russisch].

1. Les  $f_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , avec  $f_0(z) \equiv 1$ , formant une base de l'espace  $H_2$  des fonctions holomorphes dans  $|z| < 1$  avec

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty,$$

l'A. examine à quelle condition leurs valeurs frontières donnent une base

$$\{1, \Re f_1(e^{i\theta}), \Im f_1(e^{i\theta}), \Re f_2(e^{i\theta}), \Im f_2(e^{i\theta}), \dots\}$$

pour l'espace  $L_2[0, 2\pi]$ . 2. Soit  $f(z) = \sum a_n z^n \in H_2$  avec  $a_n \neq 0$  pour tout  $n$ : l'A. donne des conditions sur les  $\zeta_n$  garantissant que les parties réelles et imaginaires des  $f(\zeta_n e^{i\theta})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  forment un système complet dans  $L_2[0, 2\pi]$ .

G. Bourion.

**Kabajla, V.:** Über die Interpolation von Funktionen in der Klasse  $H_\delta$ . Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 1 (79), 181—188 (1958) [Russisch].

On cherche  $f(z)$  holomorphe dans  $|z| < 1$  prenant aux points donnés  $\lambda_k$  des valeurs données  $c_k$ ; on suppose  $\sum (1 - |\lambda_k|) < \infty$ , on introduit le produit de Blaschke  $b(z)$  relatif aux points  $\lambda_k$ ;  $b_n(z)$  est le produit qui s'en déduit par suppression du facteur relatif à  $\lambda_n$ . Si  $0 < \delta \leq 1$ : l'inégalité  $|c_k/b_k(\lambda_k)|^\delta (1 - |\lambda_k|)^{1-\varepsilon} < +\infty$  pour un  $\varepsilon > 0$  garantit l'existence d'une solution  $f(z) \in H_\delta$ ; si  $\delta > 1$ : l'inégalité

$$|c_k/b_k(\lambda_k)| (1 - |\lambda_k|)^{1/\delta} < \infty$$

garantit l'existence d'une solution  $f(z)$  appartenant à toutes les classes  $H_{\delta'}$  pour  $\delta' < \delta$ . Des conditions nécessaires voisines sont données.

G. Bourion.

**Šuvalova, É. Z.:** Über eine hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit des Systems  $\{f^{(n)}(z)\}$ . Mat. Sbornik, n. Ser. 44 (86), 131—136 (1958) [Russisch].

L'A. énonce le théorème suivant: soit  $f(z)$  entière de type exponentiel, la densité des coefficients différents de zéro dans son développement  $\sum c_n z^n$  étant nulle: alors le système de ses dérivées  $\{f^{(n)}(z)\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  est complet dans tout cercle. — La démonstration présentée n'est pas en ordre (l'expression des coefficients  $a_n$ , début de la page 134, étant inexacte).

G. Bourion.

**Gleason, Andrew M.:** A metric for the space of function elements. Amer. math. Monthly 65, 756—758 (1958).

Im Raum  $E$  aller komplexen Zahlenfolgen  $e = \{z; a_0, a_1, \dots\}$  mit  $\lim |a_n|^{1/n} < \infty$  wird eine Metrik  $\varrho(e_1, e_2)$  wie folgt eingeführt. Seien  $f_1(t) = \sum a_n^{(1)} (t - z_1)^n$  und  $f_2(t) = \sum a_n^{(2)} (t - z_2)^n$  die zu  $e_1$  und  $e_2$  gehörigen Funktionselemente mit den Konvergenzradien  $R_1(e_1)$  und  $R_2(e_2)$ . Überlappen sich die Konvergenzkreise und ist im Durchschnitt  $f_1(t) = f_2(t)$ , so sei  $\varrho(e_1, e_2) = |z_1 - z_2|$  gesetzt; andernfalls sei  $\varrho(e_1, e_2) = R_1(e_1) + R_2(e_2)$ .  $0 \leq \varrho(e_1, e_2) \leq \infty$  erklärt in  $E$  eine Metrik mit der besonderen Eigenschaft, daß die durch  $p(e) = z$  erklärte Projektion von  $E$  in die komplexe  $z$ -Ebene eine lokal isometrische Abbildung ist.

D. Gaier.

**Macintyre, A. J.:** An overconvergence theorem of G. Bourion and its application to the coefficients of certain power series. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/23, 11 p. (1958).

Un point frontière  $z_0$  du cercle de convergence  $|z| < 1$  de  $\sum_0^\infty c_n z^n$  est „virtuellement isolé“ si la somme de la série reste régulière dans un secteur (de surface de Riemann) de centre  $z_0$  et d'ouverture  $> 2\pi$ . La présence d'une telle singularité entraîne,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire, d'une part  $|c_n| > e^{-\varepsilon n}$ , d'autre part  $|c_{n+1}/c_n - 1/z_0| < \varepsilon$ , à condition dans l'un et l'autre cas d'exclure éventuellement une suite de valeurs de  $n$  de densité nulle. — Ce travail remplace une publication antérieure [A. J. Macintyre et R. Wilson, Some converses of Fabry's theorem, J. London math. Soc. 16, 220—229 (1941)] où une erreur s'était glissée.

G. Bourion.

**Davydov, N. A.:** Über einen fehlerhaften Satz von Daïovitch. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 295—296 (1957) [Russisch].



Unter Heranziehung von Ergebnissen von I. I. Privalov und A. Zygmund liefert Verf. ein Gegenbeispiel zu einem Satz von Daïovitch (vgl. dies. Zbl. **66**, 54; **70**, 295), zeigt aber gleichzeitig, daß der von Daïovitch geführte Beweis stichhaltig, der fehlerhafte Satz also richtig wird, wenn die Voraussetzung, daß  $f(z)$  einer Klasse  $H_\delta$  mit  $0 < \delta < 1$  angehören soll, ersetzt wird durch die schärfere Voraussetzung, daß  $f(z)$  der Klasse  $H_1$  angehört.

*S. Schottlaender.*

**Noble, M. E.:** A converse theorem on overconvergence of sequences of partial sums. Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 592—598 (1957).

Le mode d'ultraconvergence considéré ici est celui où, la fonction  $f(z)$  définie par la somme de la série de Taylor  $\sum a_n z^n$  restant continue sur un arc  $j$  de la frontière  $|z| = 1$  du cercle de convergence, une suite  $\{s_{n_k}(z)\}$  de sommes partielles converge vers  $f(z)$  sur  $j$ . Si cette convergence est suffisamment rapide, les coefficients du début des restes correspondants sont petits: soit  $|a_n| + 2 \leq \exp \varphi(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , avec  $\varphi(t)$  concave, et soit  $|f - s_{n_k}| = O[\varrho^{\varphi(n_k)}]$  sur  $j$  avec  $\varrho < \varrho_0(\delta) < 1$  ( $\delta$  longueur de  $j$ ); on a une majoration  $|a_{n_k+m}| \leq \tau^{\varphi(n_k)}$  valable pour  $k$  suffisamment grand et pour  $0 \leq m \leq \theta \varphi(n_k)$  avec  $\theta > 0$ ,  $0 < \tau < 1$ .

*G. Bourion.*

**Francia, Giovanni:** Un criterio di sommazione per le serie di potenze. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **13**, 372—382 (1958).

Si spone un nuovo metodo di prolungamento analitico della funzione definita da una serie de potenze  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  consistente in associare a questa, una serie de funzioni razionali:

$${}^{h,p}S(x) = \left(\frac{h}{h+x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} h_n {}^{h,p}b_n \left(\frac{x}{x+h}\right)^n$$

dipendente da due parametri numerici  $(h, p)$ , ( $h$  complesso  $\neq 0$ , e  $p$  intero non negativo), la quale converge e ha la stessa somma che la  $S(x)$  in un certo intorno dell'origine. L'A. fa vedere che il campo di convergenza  ${}^h\Gamma$  dalla  ${}^{h,p}S(x)$  non dipende da  $p$ , ed è costituito dalla regione interna o esterna a un cerchio — (in particolare un semipiano) — cha ha sempre una regione in comune col cerchio di convergenza della serie primitiva  $S(x)$ . L'analisi delle singolarità della funzione rappresentata dalla serie  ${}^{h,p}S(x)$  nel campo  ${}^h\Gamma$  porta all'A. a una estensione del concetto di convergenza di una serie di potenze allorquando esiste un valor  $h$  in corrispondenza al quale, la  ${}^{h,p}S(x)$  risulta convergente. La riunione di tutti i campi  ${}^h\Gamma$  di convergenza delle  ${}^{h,p}S(x)$  associate a  $S(x)$  costituisce secondo l'A. la regione di convergenza generalizzato, e questa regione si estende in molti casi fino alla stella rettilinea di Mittag-Leffler. Le considerazioni svolte sono illustrate da un esempio che fa vedere la rapidità della convergenza della serie associata  ${}^{h,p}S(x)$ . *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

**Krasnoščekova (Krasnoshechekova), T. I.:** Certain properties of series in Faber polynomials. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 38—41 (1957) [Russisch].

Verf. betrachtet die Reihe

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r_0},$$

wo  $\Phi_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  die zu einem einfach zusammenhängenden, beschränkten Ge-

biet  $B$  mit Rand  $C$  gehörigen Faberschen Polynome sind.  $\Phi(z)$  mit  $\Phi(\infty) = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1$  sei die Funktion, die das Äußere von  $C$  auf  $|w| > \varrho > r_0$  konform abbildet und  $C_r$  be-

zeichne das Urbild des Kreises  $|w| = r > \varrho$  bei der Abbildung  $w = \Phi(z)$ . Die Funktion  $f(z)$  sein  $B$  regulär. Man setze  $f(z)$  über eine jede normale Trajektorie von  $C_r$  analytisch fort. Die Gesamtheit der Punkte dieser Trajektorien, auf die  $f(z)$  analytisch fortsetzbar ist, zusammen mit  $B$ , nennt man den Stern  $D$  von  $f(z)$  bezüglich  $B$ . Als verallgemeinerter Stern  $D_r$  ( $r \geq r_0$ ) von  $f(z)$  bezüglich  $B$  bezeichnet man den

Durchschnitt von  $D$  und dem Inneren von  $C_r$ . Verf. beweist, (I) daß es positive Konstanten  $\gamma_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  gibt, so daß  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n \Phi_n(z)$  eine in  $D_r$  reguläre Funktion darstellt, die  $C_r$  als natürliche Grenze hat; (II) es wird der Ostrowski'sche Satz für Potenzreihen, die unendlich viele Lücken mit gegen unendlich wachsenden Quotienten besitzen, auf die Reihen (1) übertragen. Es wird bemerkt, daß mit Hilfe der Relation, die zwischen (1) und der Potenzreihe mit denselben Koeffizienten besteht, auch andere Sätze sich übertragen lassen. *L. Ilieff.*

Kočarjan, G. S.: Über eine Verallgemeinerung der Laurent- und Fourierreihen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz-mat. 11, Nr. 1, 3—14 (1958) [Russisch].

Les résultats de S. Ja. Al'per (ce Zbl. 65, 304) sont étendus à l'approximation par des polynômes en  $z$  et  $1/z$  d'une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe. *G. Bourion.*

Albrecht, Rudolf: Einige Ungleichungen für in einem Parallelstreifen holomorphe Funktionen. Monatsh. Math. 62, 146—162 (1958).

On sait que si la fonction  $w = f(z)$  est holomorphe dans le cercle  $|z| < 1$  et y remplit la condition  $|w| < 1$  alors a lieu l'inégalité de Pick

$$|dz|/(1 - |z|^2) \geq |dw|/(1 - |w|^2).$$

L'A. cherche une inégalité analogue lorsque la fonction  $w = f(z)$  est holomorphe dans la bande  $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$  et y remplit la condition  $\alpha' < \operatorname{Re} f(z) < \beta'$ . *F. Leja.*

Singh, Shri Krishna: Sur la densité du nombre des points où une fonction entière prend une valeur donnée. Bull. Sci. math., II. Ser. 82, 12—14 (1958).

For an entire function of positive finite order  $\rho$ , the author proves that

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a) + N(r, b)}{\log M(r, f)} \geq \frac{1}{e} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \varrho^2}} \right)^e \frac{\sqrt{1 + \varrho^2} + 1 - \varrho}{\sqrt{1 + \varrho^2} + 1 + \varrho},$$

where  $M(r, f) = \max |f(z)|$  on  $|z| = r$ ,  $N(r, a) = \int_0^r n(t, a) dt/t$  and  $n(r, a) =$  the number of zeros of  $f(z) - a = 0$  in  $|z| \leq r$ ,  $a$  and  $b$  being finite complex numbers. *V. Ganapathy Iyer.*

Singh, S. K.: On exceptional values of entire function. J. math. Soc. Japan 10, 217—220 (1958).

Let  $f(z)$  be an entire function of order  $\rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ). Let  $S$  denote the set of all increasing real functions  $\psi(x)$  such that  $\log x = o(\psi(x))$ . Then,  $\alpha$  is called an e. v.  $S$ , if

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{n(r, \alpha) \psi(r)} > 0 \text{ for some } \psi \in S.$$

Let  $E$  denote the set of increasing functions  $\Phi(x)$  such that  $\int_A^\infty \frac{dx}{x \Phi(x)}$  is convergent.

Then,  $\alpha$  is called an e. v.  $E$ , if

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{n(r, \alpha) \Phi(r)} > 0 \text{ for some } \Phi \in E.$$

The author proves: (1) If  $\alpha$  is an e. v.  $S$ , then it is also an exceptional value in Valiron's sense with  $\Delta(\alpha) = 1$ , where

$$\Delta(\alpha) = 1 - \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{N(r, \alpha)}{T(r, f)}.$$

(2) If  $f(z)$  is an entire function having 0 as an e. v.  $E$ , then  $\lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = 0$  where  $m(r, f) = m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$ . (3) If  $f(z)$  is an entire function having  $\alpha$  as an exceptional value in Nevanlinna's sense, then  $m(r) = O(1)$ . *K. Noshiro.*

Fuchs, W. H. J.: A theorem of the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order. *Ann. of Math.*, II. Ser. 68, 203—209 (1958).

Verf. zeigt, daß für die Defekte  $\delta_k$  einer meromorphen Funktion  $f(z)$  endlicher Wachstumsordnung  $\lambda$  die Ungleichung:  $\sum_k (\delta_k)^{1/2} < \infty$  gilt. Diese wird in einem weiteren Satz noch zu:

$$\sum_k (\delta_k)^{1/2} < (A_1 q + A_2 \varkappa q \log q)^{1/2} < (A_3 q \log q)^{1/2}$$

verschärft. Dabei bedeuten  $A_1, A_2, A_3$  positive Konstanten, die nicht von  $f(z)$  abhängen,  $q$  das Maximum der Zahlen  $\lambda$  und 2, während  $\varkappa$  für  $\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{N(r, f) + N(r, 1/f)}{T(r, f)} \right)$  steht. Zum Beweis werden im wesentlichen die Formel von Poisson-Jensen und ein Satz benutzt, demzufolge die Gesamtlänge aller Intervalle der reellen Achse, auf denen für ein beliebiges Polynom  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  die Ungleichung:  $|p(z)| < h^n$  gilt, kleiner als  $4h$  ist. Abschließend wird ein Satz bewiesen, aus dem hervorgeht, daß es zu einer vorgegebenen Defektsumme  $s$  immer Defekte  $\delta$  gibt, die der Ungleichung  $\delta < s^2/4 A_3 q \log q$  genügen.

Hans Schubart.

Fan, Wui-kwok: [Sur quelques classes de fonctions méromorphes quasi exceptionnelles. *Science Record*, n. Ser. 3, 1—5 (1959).

Es sei  $f(z)$  meromorph und nehme für jedes ganze  $n$  im Ring  $2^{n-1} \leq |z| \leq 2^{n+1}$  die Werte 0, 1,  $\infty$  je höchstens  $p$ -mal an; dann muß  $f$  quasiexceptionell endlicher Totalordnung sein (vgl. Verf., dies. Zbl. 17, 408). Jedes  $f(z)$  jener Art läßt sich in der Form  $\varphi(z)/\psi(z)$  schreiben, wo  $\varphi$  und  $\psi$  Weierstraßprodukte der Ordnung 0 sind. Auch wenn nur die Nullstellen und Pole in jedem Ringgebiet obiger Art in beschränkter Anzahl vorliegen, ferner aber gewisse Zusatzbedingungen gelten, schließt Verf., daß  $f$  quasiexceptionell endlicher Totalordnung ist.

G. af Hällström.

Collingwood, E. F.: Addendum: On sets of maximum indetermination of analytic functions. *Math. Z.* 68, 498—499 (1958).

A correction is given to the proof of Theorem 7 of the paper in the title (this Zbl. 77, 285); the continuity is now not required. A theorem of Bagemihl (this Zbl. 65, 66) is referred to in this connexion.

M. Ohtsuka.

● Golusin (Goluzin), G. M.: Geometrische Funktionentheorie. (Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 31.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957. XII, 438 S. 23 Abb. Ln. DM 39,60.

This book is a translation of the author's Geometric theory of functions of a complex variable from the Russian (this Zbl. 49, 59), and begins with the basic theorems on the theory of conformal mapping of both simply connected and multiply connected domains. The author then discusses extremal problems for the mapping functions associated with such domains; distortion theorems and bounds for coefficients receive considerable treatment. The author devotes a chapter to a number of majorant principles and to the various function-theoretic null-sets, following which the stage is set for a detailed discussion of the boundary behaviour of analytic functions. In this area one finds a treatment of the Poisson-Stieltjes integral representation and of functions of class  $H_p$ , all of which is later applied to the problem of boundary correspondence in conformal mapping. The book gives a complete and lucid introduction to that part of the theory of functions to which the author devoted his life, and this translation does much to preserve the excellent spirit of the original text.

A. J. Lohwater.

Tammi, Olli: Note on Gutzmer's coefficient theorem. *Revue Fac. Sci., Univ. Istanbul*, Sér. A 22, 9—12 (1957).



On sait que si la série  $f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n$  converge dans le cercle  $|z| < R$  et y remplit la condition  $|f(z)| < \varrho$ , où  $\varrho > 0$ , alors les coefficients  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  satisfont à l'inégalité de Gutzmer:  $\sum_1^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq \varrho^2$ . L'A. montre que si les valeurs de  $f(z)$  remplissent la condition:  $-\frac{1}{2}\delta < \operatorname{Re} f(z) < \frac{1}{2}\delta$ , où  $\delta > 0$ , alors les coefficients  $a_n$  satisfont à l'inégalité  $\sum_1^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq \frac{1}{2}\delta^2$ . F. Leja.

**Lohwater, A. J.:** The boundary behavior of meromorphic functions. Ann. Acad. Sci. Fennica, Ser. A I **250/22**, 6 p. (1958).

The main theorem is as follows: Let  $w = f(z)$  be analytic and bounded in  $|z| < 1$ , and let  $|f(re^{i\theta})|$  have radial limit 1 for all  $e^{i\theta}$  of an arc  $A$  [ $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ] except possibly for a set of capacity zero. Then every value of  $|w| < 1$  with at most one exception is taken in any neighbourhood of each singularity of  $f(z)$  on  $A$ . A sharpening of certain techniques in his former paper (this Zbl. **71**, 69) is used in the proof.

M. Ohtsuka.

**Alenicyan (Alenitsyn), Ju. E. (Yu. E.):** On functions having no values in common and on the outer boundary of the function's domain. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 1055—1057 (1957) [Russisch].

Verf. teilt ohne Beweis zahlreiche neue Ergebnisse für analytische, nicht-schlichte Abbildungen mit. Es bezeichne  $B$  ein endlich zusammenhängendes Gebiet ohne entartete Grenzkontinua, welches den Punkte  $z = \infty$  nicht enthält. Hier heißt eine Funktion meromorph resp. regulär in  $B$ , falls sie in  $B$  eine eindeutige meromorphe resp. eindeutige analytische Funktion ist.  $R_a(B)$  bedeute die Gesamtheit von Funktionen  $f(z)$ , die in  $B$  regulär sind und den Bedingungen  $|f(z)| < 1$ ,  $f(a) = 0$  genügen, worin  $a$  einen festen,  $z$  einen beliebigen Punkt aus  $B$  bezeichnet. Es bedeute weiter  $F(z, a)$  die Funktion aus  $R_a(B)$ , für die  $|f'(a)| \leq F'(a, a)$  ist, falls  $f(z) \in R_a(B)$ . Die Funktionen  $f_\nu(z)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , die resp. in den (beliebigen) Gebieten  $B_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , definiert sind, nennt man ohne gemeinsame Werte in  $B_\nu$ , falls  $f_\nu(z_\nu) \neq f_\mu(z_\mu)$  für jedes  $z_\nu \in B_\nu$  und jedes  $z_\mu \in B_\mu$ ,  $\nu \neq \mu$ ,  $\nu, \mu = 1, 2, \dots, n$  ist. Es gelten die Sätze: (I) Wenn die Funktionen  $f_\nu(z)$ ,  $\nu = 1, 2$  meromorph und ohne gemeinsame Werte in  $B$  sind, so ist für die Punkte  $z_\nu \in B$ , wo die  $f_\nu(z)$  regulär sind:

$$|f'_1(z_1) f'_2(z_2)| \leq |f_1(z_1) - f_2(z_2)|^2 F'(z_1, z_1) F'(z_2, z_2).$$

Die Schranke ist scharf. (II) Die Funktion  $f(z)$ ,  $f(0) = 0$  sei für  $|z| < 1$  regulär, dagegen sei  $F(\zeta)$  für  $|\zeta| > 1$  meromorph.  $f(z)$  und  $F(\zeta)$  seien in diesen Gebieten ohne gemeinsame Werte. Dann ist für  $|z| < 1$ ,  $|\zeta| > 1$

$$\left| \frac{f^2(z) f'(z) f'(0) F'(\zeta)}{(f'(z) - F'(\zeta))^2 F^2(\zeta) F'(\infty)} \right| \leq \frac{|z|^2}{|\zeta|^2 (1 - |z|^2) (|\zeta|^2 - 1)},$$

$$|f'(z) f'(0) F'(\zeta) / F(\zeta) F'(\infty)| \leq 1 / (1 - |z|^2) (|\zeta|^2 - 1).$$

Die Schranken sind scharf. (III) Es seien  $f_\nu(z)$ ,  $\nu = 1, 2$  für  $|z| < 1$  meromorphe Funktionen ohne gemeinsame Werte, die den Bedingungen  $f_1(0) = 0$  und  $f_1(\infty) = 0$  genügen. Dann ist

$$|\log(1 - f_1(z_1)/f_2(z_2))| \leq -\frac{1}{2} \log(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2),$$

$$|f_1(z_1)/f_2(z_2)| \leq |z_1 z_2| \sqrt{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)},$$

worin  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$  ist. Die Schranken sind scharf. Es bezeichne  $C_a(B)$  die Klasse der Funktionen  $f(z)$ , die in  $B$  regulär sind und den Bedingungen  $f(a) = 0$ ,  $a \in B$  und  $f(z_1) f(z_2) \neq 1$ ,  $z_1, z_2 \in B$  genügen. Speziell ist  $C_0(|z| < 1)$  die Klasse  $C$  von Bieberbach-Eilenberg. (IV) Jeder Funktion  $f(z) \in C_a(B)$  entspricht eine schlichte Funktion  $\tilde{f}(z) \in C$ , so daß  $f(z)$  die Werte in  $B$  nicht annimmt, welche

$\tilde{f}(z)$  in  $|z| < 1$  nicht annimmt. (V) Ist  $f(z) \in C_a(B)$ , so besteht die scharfe Schranke  $|f'(z)| \leq |1 - f^2(z)| F'(z, z)$ .

Es werden einige Ergebnisse für Funktionen, die in einem Kreisring definiert sind, gegeben. L. Ilieff.

**Strelic, Š. I.:** Über den Zusammenhang zwischen typisch-reellen und schlichten Funktionen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 211—220 (1957) [Russisch].

Das Gebiet  $G$  enthalte eine Strecke der reellen Achse. Wie bekannt, nennt man die in  $G$  analytische Funktion  $f(z)$  typisch-reell in  $G$ , wenn dort die Ungleichung  $\text{Im}(z) \cdot \text{Im}(f(z)) \geq 0$  besteht. Es bezeichne  $T_r$  die Klasse der im Einheitskreis typisch reellen Funktionen  $f(z)$ , welche den Bedingungen  $f(0) = 0$  und  $f'(0) > 0$  genügen. Man bezeichne mit  $S_0$  die Gesamtheit der schlichten Funktionen aus  $T_r$ , für die jede zur imaginären Achse parallele Gerade das Bild  $C_r$  von  $|z| = r < 1$  mittels der Abbildung  $w = f(z)$  in maximal zwei Punkten trifft. Es sei ferner  $D$  ein in der  $w$ -Ebene gelegenes einfach zusammenhängendes Gebiet, das die folgenden Eigenschaften hat: ist  $w \in D$ , so ist auch  $\bar{w} \in D$  und  $w_1 = tw + (1-t)\bar{w} \in D$  für jedes  $t$  aus dem Intervall  $0 \leq t \leq 1$ . Verf. beweist: (I) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $f(z) \in T_r$  gilt, ist  $\int_0^z \frac{f(z)}{z} dz = g(z) \in S_0$ ; (II) Eine

Funktion  $f(z)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ , die den Kreis  $|z| < 1$ , schlicht und analytisch auf  $D$  abbildet, gehört zur Klasse  $S_0$ . L. Ilieff.

**Lebedev, N. A.:** On the domain of values of a certain functional in the problem of non-overlapping domains. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 1070—1073 (1957) [Russisch].

Es seien  $B$  und  $B^*$  zwei einfach-zusammenhängende, in der  $w$ -Ebene gelegene Gebiete, die keine gemeinsamen Punkte haben; ferner enthalte  $B$  den Punkt  $w = 0$  und  $B^*$  den Punkt  $w = \infty$ . Die Funktion  $w = f(z)$ ,  $f(0) = 0$  sei im Kreise  $|z| < 1$  schlicht und regulär und bilde diesen Kreis auf  $B$  ab. Die Funktion  $w = F(\zeta)$ ,  $F(\infty) = \infty$  sei für  $1 < |\zeta| < \infty$  schlicht und regulär und bilde das Gebiet  $|\zeta| > 1$  auf  $B^*$  ab. Die Gesamtheit der Paare von Funktionen  $(f(z), F(\zeta))$  bezeichne man mit  $\mathfrak{M}$ . Mit Hilfe der in der Theorie der schlichten Funktionen bekannten Variationsmethode stellt Verf. das Minimum von  $|\{f(r)/F(\varrho)\} - a|$  bei festen  $a, r$  und  $\varrho$ ,  $0 < r < 1$ ,  $\varrho > 1$  falls  $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$ , dar, wobei er das Gebiet der Werte von  $\xi = f(z_0)/F(\zeta_0)$  bei festen  $z_0$  und  $\zeta_0$ ,  $0 < |z_0| < 1$ ,  $1 < |\zeta_0| < \infty$  für  $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$  bekommt. Als Folgerungen bekommt der Verf. manche bekannte, sowie neue scharfe Schranken. L. Ilieff.

**Dundučenko, L. E.:** Über eine Klasse von Funktionen, welche im Kreise  $|z| \leq 1/\sqrt{2}$  schlicht sind. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 37—38, deutsche Zusammenfassg. 38 (1957) [Russisch].

Für die von L. Tchakaloff (dies. Zbl. 70, 74) betrachteten, im Kreise  $|z| \leq 1/\sqrt{2}$  schlichten Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z d\alpha(t)}{1 - e^{-it} z},$$

worin  $\alpha(t)$  eine im Intervall  $[0, 2\pi]$  beschränkte, nichtabnehmende und nichtkonstante Funktion bedeutet, stellt Verf. die genauen Abschätzungen für  $|f(z)|$ ,  $|f'(z)|$ ,  $|\arg f(z)|$ ,  $|\arg f'(z)|$ , und  $|a_v|$ ,  $v = 2, 3, \dots$ , sowie die entsprechenden extremalen Funktionen fest. L. Ilieff.

**Aleksandrov (Alexandrov), I. A.:** On convexity and starlikeness boundaries for functions that are schlicht and regular within a circle. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 903—905 (1957) [Russisch].

Es bezeichne  $S$  die Gesamtheit der im Einheitskreise regulären und schlichten Funktionen  $z = f(w)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ . Verf. teilt mit, daß aus der bekannten Werteverteilung von  $(w - \omega) f''(w)/f'(w)$ , wo  $f(w) \in S$  und  $|w| < 1$ ,  $|\omega| < 1$  ist,

der folgende Satz folgt: Jeder Kreis mit Durchmesser  $2\rho \leq 2R_k$ ,  $R_k = 2 - \sqrt{3 + |\omega|^2}$  und Mittelpunkt  $\omega$ ,  $|\omega| < 1$  wird durch  $z = f(w)$ ,  $f(w) \in S$  konvex abgebildet. Die Konstante  $R_k$  kann man durch keine größere ersetzen. Verf. teilt weiter mit, daß man mit Hilfe einer Variationsmethode die Werteverteilung von  $\ln \frac{(w-\omega)f'(w)}{f(w)-f(\zeta)}$ ,  $f(w) \in S$ ,  $|w| < 1$ ,  $|\omega| < 1$ ,  $|\zeta| < 1$  bekommen kann, woraus zahlreiche Ergebnisse folgen. Ein solches ist z. B. der folgende Satz: Jeder nichteuklidische Kreis mit nichteuklidischem Durchmesser nicht größer als  $\pi$  und nichteuklidischem Mittelpunkt  $\zeta$ ,  $|\zeta| < 1$ , wird durch  $z = f(w)$ ,  $f(w) \in S$  sternartig gegenüber  $f(\zeta)$  abgebildet. Die Schranke ist scharf. *L. Ilieff.*

**Gabriel, R. F.:** A generalized Schwarzian derivative and convex functions. *Duke math. J.* **24**, 617—626 (1957).

Verf. verallgemeinert ein früheres Resultat, nach dem aus der Beschränktheit der Schwarzschen Ableitung für  $f(z) = z^{-1} + \dots$  in  $0 < |z| < 1$  die Konvexität der Funktion folgt, in folgender Richtung:  $f(z) = z^{-n} + \dots$  sei holomorph in  $0 < |z| < 1$  und dort  $f'(z) \neq 0$ . Als verallgemeinerte Schwarzsche Ableitung wird die Größe  $\{w, z\}_n = (w''/w')' - (n+1)^{-1}(w''/w')^2$  eingeführt. Dann folgt aus  $|\{f, z\}_n| \leq (n+1)c_n/|z|$ , daß  $f(z)$  den Kreis  $|z| = r$ ,  $0 < r < 1$ , in eine konvexe Kurve der Ordnung  $(-n)$  abbildet. Gilt außerdem noch  $f(z) \neq w_0$  in  $0 < |z| < 1$ , dann ist  $f(z)$  bezüglich dieses Wertes  $w_0$   $n$ -wertig und sternförmig.  $c_n$  bestimmt sich aus der kleinsten positiven Wurzel  $x_n$  der Gleichung  $(n+1)xJ_1'(x) + (n-1)J_1(x) = 0$ ,  $J_1(x)$  = Besselsche Funktion erster Ordnung, zu  $c_n = \frac{1}{4}x_n^2$ . Durch ein Beispiel wird belegt, daß  $c_n$  durch keine größere Zahl ersetzt werden kann. *H. Wittich.*

**Tong, Kwang-chang:** On the Riemann-Hilbert problem in multiply-connected domain. *Science Record*, n. Ser. **2**, 149—153 (1958).

Let  $D$  be a finite multiply-connected region bounded by the union  $L$  of smooth contours  $L_0, L_1, \dots, L_m$ , of which  $L_0$  contains all the others. The following Riemann-Hilbert problem is considered: To find a function  $F(z)$  analytic in  $D$  and continuous in  $D + L$  and which satisfies the following boundary condition  $\operatorname{Re} \{[\alpha(t) - i\beta(t)]F(t)\}_{t \in L} = 0$ , where  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  are real functions of the point  $t$  and satisfy a Hölder condition. Once the problem is reduced to the equivalent problem of finding a function  $G(z)$  analytic in  $D$  and satisfying the boundary condition  $\operatorname{Im} \{e^{i\theta(t)}t^{-n}G(t)\}_{t \in L} = 0$ , where  $\theta(t) = \theta_k$  ( $t \in L_k$ ,  $0 \leq \theta_k < 2\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ) are real constants determined uniquely by  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  and  $\theta_0 = 0$ , with  $n$  being the index of the Riemann-Hilbert problem [see N. I. Muskhelishvili, Singular integral equations (this Zbl. **51**, 332), p. 88] it is then shown by induction that if  $0 \leq n < m$ , then  $p(n) \leq n+1$ , where  $p(n)$  is the maximum number of linear independent solutions of the Riemann-Hilbert problem [In the proof of the lemma, p. 151, formula (19) should read  $G_{p(n)-1}(z) + G_{p(n)}(z) \equiv 0$ .] *C. Uluçay.*

**Heins, Maurice:** On the principle of harmonic measure. *Commentarii math. Helvet.* **33**, 47—58 (1959).

Auf einer Riemannschen Fläche  $F$  soll  $u$  ein verallgemeinertes harmonisches Maß heißen, falls  $u$  harmonisch ist,  $0 \leq u \leq 1$  gilt und ferner die größte harmonische Minorante von  $\min(u, 1-u)$  identisch verschwindet. Wird nun  $F$  (nicht notwendig einwertig) in eine Fläche  $G$  abgebildet, so unterliegen die auf  $F$  und  $G$  erklärten verallgemeinerten harmonischen Maße einer Beziehung, die das klassische Prinzip des harmonischen Maßes als Spezialfall enthält. Verf. betrachtet danach auf  $G$  positive superharmonische Funktionen  $P$ , harmonische Funktionen  $h$  mit  $0 < h \leq 1$  und verallgemeinerte harmonische Maße  $v$ . In denjenigen Teilmengen dieser Klassen, die, im Sinne der Abbildung von  $F$  in  $G$ ,  $u$  majorieren, gibt es immer eine kleinste Funktion,  $P, h, v$ . Es werden Bedingungen gefunden, unter welchen diese Minimalfunktionen paarweise übereinstimmen. So ergibt sich  $P = v$ , sobald der Bildpunkt sich für  $u \rightarrow 1$  dem idealen Rand vom (hyperbolischen)  $G$  nähert. *G. af Hällström.*



**Oğuztöreli, M. Namik:** Un exemple de fonctions de la classe de Mr. Elfving. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **22**, 13—24 (1957).

Untersuchung der Riemannschen Fläche für die Lösung  $w(z)$  der Schwarzschen Differentialgleichung  $z^2 \{w, z\} = A + Bz^n + Cz^{2n}$  mit geeignet eingeschränktem  $A$ .  
H. Tietz.

**Temljakov, A. A.:** Eine Integraldarstellung der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **21**, 89—92 (1957) [Russisch].

Es sei  $D$  ein Reinhardtischer Kreiskörper, der Teilgebiet eines Regularitätsbereichs sei und durch die Hyperfläche:  $|w| = r_1(\tau)$ ,  $|z| = r_2(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , begrenzt werde, wobei  $r_1(0) = 0$ ,  $0 < r'_1(\tau) \leq r_1(\tau)/\tau$ ,  $r_1(1) < \infty$ ,

$$r_2(\tau) = \exp - \left[ \int_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau} d \ln r_1(\tau) \right]$$

sei. Die Funktion  $F(w, z)$  sei analytisch in  $D$ , und die Funktionen  $F(w, z)$ ,  $F'_w(w, z)$ ,  $F'_z(w, z)$  seien definiert und stetig in der abgeschlossenen Hülle  $\bar{D}$  von  $D$ . Dabei ist  $F'_w(w, z)$  in einem Randpunkte  $(w_0, z_0)$  von  $\bar{D}$  als  $\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{F(w_0 + \Delta w, z_0) - F(w_0, z_0)}{\Delta w}$  erklärt, wenn  $(w_0 + \Delta w, z_0) \in \bar{D}$  ist; analog  $F'_z(w, z)$ . Dann gilt für  $(w, z) \in D$ :

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi(r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta)}{\zeta - u} d\zeta.$$

Hier ist  $C$  der Kreis  $|\zeta| = 1$ ,  $\eta = \zeta e^{-it}$ ,  $u = \frac{\tau}{r_1(\tau)} w + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)} z e^{it}$ ,

$$\Phi(w, z) = L(F) = F(w, z) + w F'_w(w, z) + z F'_z(w, z).$$

Diese Formel besagt, daß die Funktionswerte von  $F$  in  $D$  durch die Werte des linearen Differentialoperators  $L(F)$  auf dem Rande von  $\bar{D}$  bestimmt werden.

W. Thimm.

**Shimoda, Isae:** Notes on the functions of two complex variables. *J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math.* **8**, 1—3 (1957).

Zur Ergänzung des klassischen Satzes, daß  $f(w, z)$  holomorph ist, wenn die partiellen Ableitungen existieren, beweist Verf.:  $f(w, z)$  sei in  $(D, D')$  erklärt und unterliege den Bedingungen: 1.  $g_\zeta(w) = f(w, \zeta)$  sei holomorph in  $D$  für jedes  $\zeta \in D'$ . 2. Wenn  $\xi_n \rightarrow \xi \in D$ , so sei  $h_n(z) = f(\xi_n, z)$  holomorph in  $D'$ . Dann gibt es eine Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten  $E_m \subset D'$ , so daß  $f(w, z)$  holomorph in  $(D, E_m)$  ist. Die  $E_m$  liegen in  $D'$  dicht und die Vereinigung der Ränder der  $E_m$  ist in  $D'$  nirgends dicht.  
W. Rothstein.

**Okuda, Hidesuke and Eiichi Sakai:** On the continuation theorem of Levi and the radius of meromorphy. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A* **11**, 65—73 (1957).

Die Verf. glauben irrtümlich, der Knesersche Beweis des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen (vgl. H. Kneser, dies. Zbl. **4**, 358, erste Mitteilung) sei nicht einwandfrei, „weil es nicht streng ist, unendlich viele simultane analytische Gleichungen mit Hilfe des zweiten Satzes von Weierstraß über implizite Funktionen zu lösen“. Die Kritik ist unberechtigt, da Kneser ausführlich gezeigt hat, daß es genügt, endlich viele Gleichungen zu lösen. Verf. geben einen anderen Beweis des Satzes und folgern aus ihm die bekannte Tatsache, daß der Logarithmus des Meromorphieradius superharmonisch ist.  
W. Rothstein.

**Sakai, Eiichi:** A note on meromorphic functions in several complex variables. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A* **11**, 75—80 (1957).

Verf. formuliert und beweist für meromorphe Funktionen das Analogon zu dem Satz:  $f(w_1, \dots, w_n)$  ist holomorph in  $|w_j| < 1$ ;  $j = 1, \dots, n$ , wenn  $f$  überall partielle Ableitungen besitzt. Der Beweis ist ganz analog dem bei holomorphen Funk-

tionen und benutzt wesentlich ein Resultat des Ref. (vgl. W. Rothstein, dies. Zbl. 37, 183, erstes Referat). Ref. hält die Kritik an seiner Arbeit für unberechtigt und die angegebene Änderung der Hilfssätze für überflüssig. *W. Rothstein.*

**Smith, R. C. T.:** Bounded groups of transformations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 831—833 (1958).

Sei  $T(x)$  eine beschränkte Gruppe innerer Transformationen eines  $n$ -dimensionalen komplexen Raumes in sich:

$$y_j = C_1^j x_1 + \dots + C_n^j x_n + \sum C_{m_1 \dots m_n}^j x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n};$$

$|C_{m_1 \dots m_n}^j(\alpha)| < K_{m_1 \dots m_n}^j$ ,  $L(T) \doteq C_1^j x_1 + \dots + C_n^j x_n$ , die von dem Parameter  $\alpha$  abhängt. Bochner und Martin haben bewiesen [vgl. S. Bochner and W. T. Martin, Several complex variables (dies. Zbl. 41, 52), p. 19, Theorem 8]:  $T(\alpha)$  ist ähnlich zur Gruppe ihrer Linearteile. D. h. Es gibt eine Transformation  $S$ :  $x_j' = x_j +$  höhere Potenzen, so daß für alle  $\alpha$  gilt:  $T(\alpha) = S^{-1} \cdot L(T(\alpha)) \cdot S$ . — Verf. gibt einen Beitrag zu der Frage, wann  $S$  eindeutig bestimmt ist. *W. Rothstein.*

**Gheorghiu, Octavian Em.:** Extensions de la monogénéité au sens de V. S. Féodoroff. Comun. Acad. Republ. popul. Române 2, 673—676, russ. und französ. Zusammenfassg. 676 (1952) [Rumänisch].

Soit  $f(z) \doteq P(x, y) + iQ(x, y)$  et  $g(z) = R(x, y) + iS(x, y)$  deux fonctions complexes régulières dans un domaine  $D$ . L'A. définit comme  $n^{\text{me}}$   $F$ -dérivée généralisée de  $f(z)$  par rapport à  $g(t)$ , en  $D$ , la limite, dans le sens de Cauchy, du rapport

$$\frac{\Delta_n f}{(\Delta g)^n} = \frac{f(x + n\Delta x, y + n\Delta y) - C_n^1 f(x + (n-1)\Delta x, y + (n-1)\Delta y) + \dots + (-1)^n f(x, y)}{[g(x + \Delta x, y + \Delta y) - g(x, y)]^n}$$

et trouve qu'elle existe si  $f(z)$  a toutes ces dérivées d'ordre  $n-1$ ,  $\partial^{n-1} f / \partial x^p \partial y^q$ ,  $F$ -monogènes par rapport à  $g(z)$ . L'A. obtient des résultats analogues pour les fonctions complexes de plusieurs variables réelles qui admettent des dérivées globales.

*M. N. Roşculeţ.*

**Ionescu-Cazimir, V.:** La définition des variétés caractéristiques pour certains systèmes d'équations à dérivées partielles. Comun. Acad. Republ. popul. Române 1, 323—324, russ. und französ. Zusammenfassg. 325 (1951) [Rumänisch].

L'A. cherche les caractéristiques des systèmes complètement intégrables

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \sum_j a_{kij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} \quad \text{ou} \quad (2) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \sum_j \left( a_{kij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{n+1}} + b_{kij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{n+2}} \right)$$

avec  $a_{kij}$ ,  $b_{kij}$  constantes. Les caractéristiques sont définies comme les courbes ou les surfaces sur lesquelles les théorèmes d'existence ne sont plus valables. Pour (1) les caractéristiques sont les intégrales d'une équation de Monge et pour (2) elles sont les intégrales d'une équation algébrique entre les produits extérieurs de différentielles. Comme exemples pour (1) l'A. donne les systèmes qui expriment les conditions de monogénéité dans des algèbres linéaires, associatives et commutatives, particulières, (définies par les équations  $\theta^3 = 1$ ,  $(1 + \theta)^2 = 0$  etc.) et trouve dans tous les cas que les variétés caractéristiques sont les variétés des diviseurs de zéro. Pour (2) l'A. considère les systèmes attachés aux fonctions monogènes de deux variables  $x + iy$ ,  $s + it$  avec  $i^2 = -1$  ou  $i^2 = 1$ . Dans le premier cas ( $i^2 = -1$ ) les surfaces caractéristiques sont données par  $x + iy = f(s + it)$  ( $f$ , monogène en  $s + it$ ) Quand  $i^2 = 1$  les surfaces caractéristiques sont situées sur les variétés  $x + y = f(s + t)$  ou  $x - y = g(s - t)$ .

*M. N. Roşculeţ.*

**Ionescu-Cazimir, Viorica:** Sur les caractéristiques de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. Comun. Acad. Republ. popul. Române 1, 909—914, russ. und französ. Zusammenfassg. 913—914 (1951) [Rumänisch].

L'A. réprend les systèmes étudiés dans la note analysée ci-dessus et cherche les solutions discontinues, avec discontinuités de première espèce. Les solutions sont

définies comme les intégrals de certains systèmes qui sont en général incompatibles. Pour le système

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

attaché aux fonctions monogènes  $f(w) = U + \theta V + \theta^2 W$ ,  $w = x + \theta y + \theta^2 z$ ,  $\theta^3 = 1$ , les solutions discontinues sont données par  $f(x + y + z) = 0$  c. a. d. des planes parallèles aux plans des diviseurs de zéro. Pour le système

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial s}$$

attaché aux fonctions monogènes  $f(u, v) = P + iQ$ ,  $u = x + iy$ ,  $v = s + it$ ,  $i^2 = -1$ , les hypersurfaces de discontinuité sont  $f(x + y, s + t) = 0$  ou  $\varphi(x - y, s - t) = 0$  qui sont les supports des variétés caractéristiques. *M. N. Roşculeţ.*

**Iacovache, Maria:** Sur certaines intégrales curvilignes. *Comun. Acad. Republ. popul. Române* 1, 899—904, russ. und französ. Zusammenfassg. 904 (1951) [Rumänisch].

Soit  $f(w) = U(x, y, z) + \theta V(x, y, z) + \theta^2 W(x, y, z)$  une fonction monogène de variable hypercomplexe  $w = x + \theta y + \theta^2 z$  où  $\theta^3 = 1$ . Les fonctions conjuguées  $U, V, W$  sont les solutions du système

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

(Roşculeţ, ce Zbl. 58, 66). L'A. montre que les solutions du système (1) vérifient les relations intégrales:

$$\oint_C \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz = 0, \quad \oint_C \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz = 0$$

$$\text{et } \oint_C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dz = 0, \quad \oint_C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} dz = 0,$$

$$\oint_C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} dz = 0.$$

*M. N. Roşculeţ.*

## **Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:**

**Koecher, Max:** Die Geodätischen von Positivitätsbereichen. *Math. Ann.* 135, 192—202 (1958).

Die Arbeit setzt eine frühere des Verf. voraus (s. dies. Zbl. 78, 12). Sei  $Y$  ein Positivitätsbereich im  $R^n$  mit der als positiv definit vorausgesetzten symmetrischen Matrix  $S$  als Charakteristik. A. a. O. waren die positive reell analytische Funktion  $N(y) = \omega \left( \int_Y e^{-y' S t} dt \right)^{-1}$  mit einer geeigneten Konstanten  $\omega$ , die gegenüber der Automorphismengruppe  $\Sigma(Y)$  von  $Y$  invariante Metrik

$$ds^2 = \sum h_{ik}(y) dy^i dy^k, \quad h_{ik}(y) = -\partial^2 \log N(y) / \partial y^i \partial y^k$$

und die involutorische Abbildung  $y \rightarrow y^* = S^{-1} \text{grad}_y \log N(y)$  eingeführt worden. Es wird hier zunächst gezeigt, daß die letztere einen Fixpunkt  $c^* = c$  besitzt. Hierauf wird eine im allgemeinen nicht assoziative Multiplikation der Punkte des  $R^n$  mit den Multiplikationskonstanten  $h_{ijk} = [\partial^3 N(y) / \partial y^i \partial y^j \partial y^k]_{y=c}$  eingeführt, d. h. es sei  $(u \circ v)_k = \sum_{i,j} h_{ijk} u_i v_j$ . Man setze nun induktiv  $x^0 = e$ ,

$$x^{i+1} = x \circ x^i \quad \text{und bilde die symbolische Exponentialfunktion } e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i.$$

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die Resultate wie folgt beschreiben: 1. Die geodätischen Linien in  $Y$  durch den Punkt  $y = c$  sind gegeben durch  $y(\tau) = e(\tau x)$



mit  $|x| = 1$ ; hier bezeichnet  $\tau$  die Bogenlänge. 2. Jeder Punkt  $a \neq c$  ist mit  $c$  durch genau eine geodätische Linie verbindbar. 3. Es gilt  $N(y(\tau)) = e^{\beta\tau}$  mit  $\beta = [\dot{y}' y^*]_{\tau=0}$ . 4.  $y^*(\alpha + \tau) = K(y(\alpha)) y(\alpha - \tau)$  mit der Matrix  $K(y) = S \cdot (\partial^2 N(y) / \partial y^i \partial y^k)$ . 5. Die Abbildung  $x \rightarrow e(x)$  bildet  $R^n$  eineindeutig auf  $Y$  ab. 6. Die Abbildung  $x \rightarrow x^2$  bildet  $R^n$  in  $\bar{Y}$  und  $Y$  eineindeutig in sich ab. 7.  $c$  ist der einzige Fixpunkt von  $y \rightarrow y^*$ . 8. Besitzt  $y = e(x)$  im Sinne obiger Algebra ein inverses Element, so ist dieses  $y^{-1} = y^* = e(-x)$ . 9.  $Y$  besteht aus genau den Punkten  $y$  von  $R^n$ , für welche die Matrix  $2L^2(y) - L(y^2)$  positiv definit ist ( $L(y) = (\partial^2 N(y) / \partial y^i \partial y^k)$ ). 10.  $N(y) = |2L^2(y) - L(y^2)|^{1/2}$ , und für jedes  $m$  gilt  $N(y^m) = N(y)^m$ . 11. Die a. a. O. eingeführte Gammafunktion von  $Y$  hat die Gestalt  $\Gamma(Y, s) = A e^{\alpha s} \prod_{\mu=1}^m \Gamma(\frac{1}{2}s + \beta_\mu)$  mit reellen Zahlen  $A > 0, \alpha, \beta_\mu$  und einer geeigneten natürlichen Zahl  $m$ . 12. Endlich sind die folgenden drei Aussagen äquivalent: a) Die Multiplikation  $u \circ v$  ist assoziativ. b) Der Riemannsche Krümmungstensor der invarianten Maßbestimmung von  $Y$  verschwindet in  $y = c$ . c) Die Abbildung  $x \rightarrow e(x)$  ist eine isometrische Abbildung des Euklidischen Raumes  $R^n$  auf  $Y$ . — Bei den Beweisen werden u. a. abstrakte Schlüsse in der oben eingeführten nicht assoziativen Algebra herangezogen, welche an anderem Orte dargestellt werden (dies. Zbl. 83, 27).

M. Eichler.

**Herrmann, Oskar:** Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen beliebiger total-reeller Körper. Arch. der Math. 8, 322—326 (1957).

Verf. vereinfacht seine Methode, Fourierkoeffizienten Poincaréscher Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe nach unten abzuschätzen (dies. Zbl. 73, 305) und beweist folgenden Satz: Ist  $r(\mathfrak{N}, \Gamma, -k)$  der Rang der Schar der ganzen Spitzenformen der Dimension  $-k$  zu einer Hilbertschen Modulgruppe  $\Gamma$  des total-reellen algebraischen Zahlkörpers  $\mathfrak{N}$  vom Grad  $n$ , so ist  $(k$  ganzzahlig,  $k$   $n$  positiv gerade vorausgesetzt)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\mathfrak{N}, \Gamma, -k)/k^n \geq R |\sqrt{d}|/2 (\pi e)^n,$$

wobei  $R$  der Regulator und  $d$  die Diskriminante von  $\mathfrak{N}$  ist. K.-B. Gundlach.

**Blij, F. van der and J. H. van Lint:** On some special theta functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 61, 508—513 (1958).

Sei  $\Gamma$  die elliptische Modulgruppe und  $\Gamma[N]$  die Hauptkongruenzgruppe der Stufe  $N$ . Verf. betrachten Thetareihen der Gestalt

$$\vartheta\left(\tau \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right) = e^{-\Pi i(a'Sb + 2a'Sw + w'Sw)} \sum_{x \equiv a + w \pmod{1}} e^{\Pi i x' S x} e^{2\Pi i x' S(b+w)}.$$

Hier ist  $x'Sx$  eine ganzzahlige positiv definite quadratische Form von  $n$  Variablen,  $|S| = 1$  und  $w$  so bestimmt, daß  $x'Sx \equiv 2x'Sw \pmod{2}$  für alle ganzen  $x$  gilt. Die Transformationsformel der Thetareihe zeigt dann, daß sich  $\vartheta\left(\tau \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right)$  bei folgenden Änderungen der Argumente  $a \rightarrow a + g$ ,  $b \rightarrow b + h$ ,  $g, h$  ganz;  $a \rightarrow -a$ ,  $b \rightarrow -b$ ;  $\tau \rightarrow \tau + 1$ ,  $b \rightarrow b - a$  mit einem (angegebenen) Faktor vom Betrage 1 multipliziert. Zusammen mit der Transformationsformel für  $\tau \rightarrow -1/\tau$  erhält man bei

$$\varphi\left(\tau \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right) = \vartheta\left(\tau \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right) \eta^{-n}(\tau), \quad \eta(\tau) \text{ Dedekindsche } \eta\text{-Funktion,}$$

eine in der oberen Halbebene holomorphe und bei  $\infty$  meromorphe Funktion mit

$$\varphi\left(L\tau \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right) = \varepsilon(L) \varphi\left(\tau \begin{vmatrix} \alpha a + \gamma b \\ \alpha b + \delta a \end{vmatrix}\right), \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Geeignete Wahl von  $a, b$  in  $\varphi$  ergibt Modulfunktionen zu Hauptkongruenzgruppen mit Charakteren. Durch weitere Spezialisierung werden Relationen zwischen den Thetareihen hergeleitet.

M. Koecher.

**Gel'fer, S. A.:** On the maximum of the conformal radius of the fundamental region of a doubly-periodic group. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 241—244 (1957) [Russisch].

Let  $\{D\}$  be a family of simply connected domains  $D$  in the  $w$ -plane containing  $w = 0$  and possessing the properties (1)  $D$  contains no points which are congruent under a group  $T_n$  of mappings  $w' = w + n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2$ , where  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are constants having a non-real ratio; (2)  $D$  does not contain a given set of points  $a_1, \dots, a_m$  nor points congruent to this set under  $T_n$ . The author poses the problem of determining which domain in the class  $\{D\}$  has the largest conformal radius, sets up a differential equation involving the Weierstraß functions, and shows that the solution is unique.

A. J. Lohwater.

● Eagle, Albert: The elliptic functions as they should be. An account, with applications, of the functions in a new canonical form. Cambridge: Galloway and Porter, Ltd. 1958. XXVIII, 508 p. with extensive tables. 45/— net.

Verf. beginnt die Einleitung mit den Worten: "This book effects the second major revolution in the history of the Elliptic Functions. The first, and the one of more fundamental importance, was effected by Abel . . ." Außer den vielen neuen Namen und Bezeichnungen, die er einführt, besteht diese Revolution vor allem in einer neuen Normierung der elliptischen Funktionen (es werden nur solche mit rechteckigem Periodenparallelogramm betrachtet, und sie werden so weit als möglich als reelle Funktionen reeller Argumente behandelt): Die Pole bilden Rechtecke mit den Seitenlängen  $\pi$  und  $\mu \pi$  (statt  $K$  und  $K'$ ), die Residuen der Pole haben den Betrag 1, und für kleine positive Argumente sind die Funktionen positiv. Für die so normierten Funktionen verwendet Verf. die Jacobi-Glaisherschen Bezeichnungen, aber mit großen Anfangsbuchstaben.  $q, k, k', K, E$  haben dieselben Bedeutungen wie in der gewöhnlichen Theorie. Für das oft vorkommende  $\frac{1}{2} \pi$  führt Verf. die Bezeichnung  $\tau$ , gesprochen  $hi = h$  (all p)  $i$ , ein, durch die entschieden viele Formeln ein einfacheres Aussehen bekommen. Weiter setzt er  $2K/\pi = K/\tau = h$  und  $E/\tau = g$ . Zwischen den neuen und den alten Funktionen bestehen natürlich einfache Beziehungen, so ist z. B.  $\text{Sn } z = h k \text{sn}(hz)$  und  $\text{Dn } z = h \text{dn}(hz)$ . Einige Formeln schreiben sich in den neuen Funktionen einfacher, andere komplizierter als in den alten. Verf. führt noch einige Linearkombinationen der 12 Grundfunktionen ein, die sich für die Auswertung mancher elliptischer Integrale praktisch erweisen. An Stelle der Zetafunktion führt er vier neue Funktionen ein, die sich im wesentlichen nur durch die Lage der Pole zum Koordinatensystem unterscheiden und verwendet acht „Weierstraßsche“ Funktionen mit Polen zweiter Ordnung. Im ersten Kapitel werden für die Funktionen Fourierentwicklungen und entsprechende Entwicklungen nach hyperbolischen Funktionen hergeleitet, im zweiten werden der Verlauf bei reellem Argument, die Beziehungen zwischen den Quadraten und die Ableitungen untersucht. Im dritten Kapitel bringt Verf. die Thetafunktionen, für die er die offensichtlich sehr zweckmäßigen Bezeichnungen  $T_s, T_c, T_n$  und  $T_d$  verwendet. Aus ihnen ergibt sich sofort, welche Thetafunktionen man dividieren muß, um eine der Grundfunktionen zu bekommen. So ist etwa  $Ds z = c \cdot Td z / Ts z$ , worin  $c$  eine Konstante ist. Das vierte Kapitel bringt die Additionstheoreme, die nächsten drei elliptische Integrale (Verf. polemisiert gegen die Einteilung in Gattungen und führt noch eine vierte Gattung ein). Kapitel 8 bringt Reihenentwicklungen von  $h, g$ , den Thetanullwerten und einigen verwandten Funktionen, Kapitel 9 behandelt die „Weierstrass' poleless Functions“, die den Sigmafunktionen entsprechen. Es folgt ein Kapitel über Anwendungen in der Geometrie und ein reichhaltiges über Anwendungen in der Mechanik. Das 12. Kapitel bringt die Formel von Schwarz-Christoffel und hydrodynamische sowie elektrotechnische Deutungen der konformen Abbildung, das 13. Anwendungen der elliptischen Funktionen auf konforme Abbildung. Zahlreiche vier- und fünfstellige Tafeln erleichtern den Gebrauch der neuen Funktionen. Trotz großer Mühe konnte sich Ref. nicht davon überzeugen, daß die neuen Funktionen wirklich vorteilhafter für die Anwendungen seien als die bisherigen. Auch die meisten der neuen Bezeichnungen scheinen ihm weder vorteilhaft noch notwendig.

Bei der konformen Abbildung führt Verf. z. B. für den gestreckten Winkel das deutsche Wort „Wechsel“ ein, das er wsl abkürzt. Die vom Verf. vorgeschlagene Bezeichnung  $!n$  statt  $n!$  scheint Ref. nur geeignet, Verwirrung zu stiften. Die Meinung des Verf., die Stirlingsche Formel sei ohne praktischen Wert, dürfte nicht unwidersprochen bleiben. Auf folgende Unstimmigkeiten sei hingewiesen. Der Beweis in 1. 4, daß  $S_n$ ,  $C_n$  und  $D_n$  doppelt periodisch sind und die definierenden Reihen konvergieren, enthält einen *circulus vitiosus*. Die Reihe für  $D_n$  divergiert sogar. Der Beweis in 2. 11, daß  $D_n 0 = D_c 0$  ist, blieb dem Ref. unverständlich. Das Koeffizientengesetz der entsprechenden Reihen ist aber nicht so undurchsichtig, wie Verf. meint, und aus ihm ergibt sich der Beweis leicht. Der Beweis in 3. 21 $\frac{1}{2}$ , daß  $Td 0 = \sqrt{h}$  ist, ist nicht stichhaltig.

G. Lochs.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Picone, Mauro e Wolf Gross: *Intervallo d'esistenza e limitazioni per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 225—230 (1958).

Gli AA. dimostrano il seguente teorema di esistenza e di unicità: Supposto che  $f_h(x, u_1, \dots, u_r)$ ,  $g_h(x, u_1, \dots, u_r)$ , ( $h = 1, \dots, r$ ) siano funzioni continue nel dominio  $I \times D$ , ove  $I$  è un intervallo (finito o infinito) dell'asse  $x$  e  $D$  è un dominio dello spazio euclideo a  $r$  dimensioni, si considera il sistema di equazioni differenziali ordinarie (1)

$$du_h(x)/dx = f_h(x, u_1(x), \dots, u_r(x)) - u_h(x) g_h(x, u_1(x), \dots, u_r(x)), \quad (h = 1, \dots, r),$$

con le condizioni iniziali (2)  $u_h(x_0) = u_h^{(0)}$ , ( $h = 1, \dots, r$ ). Chiamato  $J$  l'intervallo di  $I$  alla destra di  $x_0$ , si suppone, in  $J \times D$ , che sia  $g_h(x, u_1, \dots, u_r) \geq 0$ , ( $h = 1, \dots, r$ ) e che esistano  $2r$  numeri  $m_h$ ,  $M_h$  in modo che valgano le disuguaglianze

$$m_h \leq f_h(x, u_1, \dots, u_r)/g_h(x, u_1, \dots, u_r) \leq M_h, \quad (h = 1, \dots, r).$$

Se l'insieme  $R$ , definito dalle disuguaglianze  $\min [m_h, u_h^{(0)}] \leq u_h \leq \max [M_h, u_h^{(0)}]$ , ( $h = 1, \dots, r$ ), è contenuto in  $D$  e ad ogni numero  $a > 0$  corrisponde un numero  $L_a \geq 0$ , in modo che, detto  $J_a$  l'intervallo di  $J$  luogo dei punti, per i quali è  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ , si abbia sempre, qualunque siano i punti  $(x, u_1, \dots, u_r)$ ,  $(x, u'_1, \dots, u'_r)$  di  $J_a \times R$ ,

$$\begin{aligned} |f_h(x, u'_1, \dots, u'_r) - f_h(x, u_1, \dots, u_r)| &\leq L_a |u' - u|, \\ |g_h(x, u'_1, \dots, u'_r) - g_h(x, u_1, \dots, u_r)| &\leq L_a |u' - u|, \end{aligned} \quad (h = 1, \dots, r),$$

ove  $|u' - u|$  è il massimo dei numeri  $|u'_h - u_h|$ , ( $h = 1, \dots, r$ ), allora esiste in tutto  $J$  un'unica soluzione del problema (1), (2), la quale verifica le limitazioni

$$\min [m_h, u_h^{(0)}] \leq u_h(x) \leq \max [M_h, u_h^{(0)}], \quad (h = 1, \dots, r).$$

Seguono alcuni complementi, per i quali rinviamo alla Nota in questione.

S. Cinquini.

Fer, F.: *Résolution de l'équation matricielle  $dU/dt = pU$  par produit infini d'exponentielles matricielles*. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 818—829 (1958).

An Stelle der üblichen Reihenlösung  $U = I + U_1 + U_2 + \dots$ ,  $U_1 = P = \int_0^t p dt$ ,  $U_2 = \int_0^t p U_1 dt, \dots$ , welche im Falle der Vertauschbarkeit von  $p$  und  $P$  in  $U = e^P$  übergeht, wird hier auf die Möglichkeit einer (allerdings nicht für alle  $t$  konvergenten) Produktdarstellung für die Lösung der angegebenen Matrizen-differentialgleichung hingewiesen. Man schreibe formal  $U = e^P V$ , stelle die entsprechende Differentialgleichung für  $V$  auf und mache denselben Ansatz für diese,



usf. So ergibt sich  $U = e^P e^{P_1} e^{P_2} \dots$ , wobei  $P_n = \int_0^t p_n dt$ ,  $p_0 = p$ ,  $P_0 = P$  und

$$p_n = e^{-P_{n-1}} p_{n-1} e^{P_{n-1}} + \int_0^{-1} e^{sP_{n-1}} p_{n-1} e^{-sP_{n-1}} ds.$$

Zum Beweis werden die Kommutatoren  $X_1 = Pp - pP$ ,  $X_2 = PX_1 - X_1P$ ,  $X_3 = PX_2 - X_2P, \dots$  eingeführt, und die folgenden formalen Relationen benutzt:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n X_n}{(n+1)!} = -e^{-P} p e^P - \int_0^{-1} e^{sP} p e^{-sP} ds, \quad \frac{de^P}{dt} = p e^P + e^P q.$$

Die Konvergenz des unendlichen Produkts wird bewiesen und die Verwendbarkeit im Falle eines Systems zweiter Ordnung gezeigt. Literatur wird nicht zitiert.

*H. Schwerdtfeger.*

**Samuél, O. I.:** On the structure of the solutions of automorphous systems of linear differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 37—40 (1958) [Russisch].

In dem System  $dx/dz = Px$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  seien die Elemente  $p_{ij}(z)$  der Matrix  $P$  meromorphe Funktionen und  $Tz$  sei eine lineare Transformation mit  $\det T = 1$ . Verf. nennt das System automorph, wenn es sich bei Übergang von  $z$  zu  $Tz$  nicht ändert. Der Fall  $Tz = z + w$  wurde von Floquet in Anlehnung an die Fuchssche Theorie eingehend untersucht. Ganz analoge Überlegungen ermöglichen bei beliebigem  $T$  einen Einblick in die Struktur der Lösungen. Eine Fundamentalmatrix  $X$ ,  $X(0) = E$ , geht bei Anwendung von  $T$  in  $AX$  über. Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $\det(A - \rho E) = 0$  alle einfach, dann gibt es einen Lösungsvektor des Systems mit Komponenten der Form

$$x_i = \sum_{j=1}^n \varrho_j^{\sigma(z)} a_{ij}(z), \quad a_{ij}(Tz) = a_{ij}(z),$$

und  $\sigma(Tz) = \sigma(z) + 1$ . Bei mehrfachen Wurzeln ist die Struktur der entsprechenden Lösungen weniger einfach, was nach der Theorie von Floquet nicht überrascht.

*H. Wittich.*

**Chang, H. M.:** On the invariableness of characteristic exponents under small perturbations. Science Record, n. Ser. 2, 351—354 (1958).

Es werden Bedingungen angegeben, unter denen die Systeme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k \quad \text{und} \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n [a_{ik}(t) + l_{ik}(t)] y_k$$

dieselben charakteristischen Exponenten besitzen (vgl. das Ergebnis von D. M. Grobman, dies. Zbl. 47, 86).

*P. Sagirow.*

**Saito, Tosiya:** A note on the linear differential equation of Fuchsian type with algebraic coefficients. Kōdai math. Sem. Reports 10, 58—63 (1958).

Verf. betrachtet die Klasse der linearen Differentialgleichungen  $d^n v/dx^n + p_1(x) d^{n-1} v/dx^{n-1} + \dots + p_n(x) v = 0$ , deren Koeffizienten einem algebraischen Funktionenkörper einer Variablen vom Geschlecht  $g$  angehören, und fragt nach den Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ in dieser Klasse. Es wird gezeigt, daß mit  $m$  als der Anzahl der (ein für allemal fixierten) singulären Punkte die Menge dieser Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ einen  $C$ -Vektorraum der Dimension  $\frac{1}{2} n^2 (m + 2g - 2) + \frac{1}{2} m n$  bilden.

*H. Röhrli.*

**Wintner, Aurel:** On a linear differential equation of Briot-Bouquet. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 7, 42—47 (1958).

L'A. établit le théorème: l'équation  $x^2 y' + y = f(x)$  a une et une seule solution totalement monotone pour  $0 < x < \infty$  si l'on a simultanément:  $f(x)$  indéfini-

ment dérivable pour  $0 < x < \infty$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ ,  $x^2 f''(x) \leq (1 + 2x) f'(x)$ ,  
 $(-1)^k f^{(k)}(x) \leq 0$  pour  $k \geq 3$ , et  $\int_{+0}^{\infty} f(x^{-1}) e^{-x} dx < \infty$ . Ch. Blanc.

**Opial, Z.:** Sur les intégrales oscillantes de l'équation différentielle  $u'' + f(t)u = 0$ .  
 Ann. Polon. math. 4, 308—313 (1958).

Es werden hinreichende und notwendige Bedingungen für die Oszillation der  
 Lösungen der Differentialgleichung (1)  $u'' + f(t)u = 0$ ,  $f(t)$  stetig in  $J = \langle 0, \infty \rangle$ ,  
 abgeleitet. 1. Ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(s) ds = M$ ,  $-\infty < M < \infty$ , und  $G(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds \geq 0$ ,  
 $G(t) \neq 0$  für  $t \geq t_0 \geq 0$ , so ist die Bedingung  $(\frac{1}{4} + \varepsilon) G(t) \leq \int_t^{\infty} G^2(s) ds$  hin-  
 reichend dafür, daß alle Lösungen von (1) in  $J$  oszillatorisch sind. 2. Ist  $G(t) \geq 0$   
 und  $\int_t^{\infty} G^2(s) ds \leq \frac{1}{4} G(t)$  für  $t \geq t_0 \geq 0$ , dann ist die Differentialgleichung (1)  
 in  $J$  nichtoszillatorisch. M. Ráb.

**Putnam, C. R.:** On the first stability interval of the Hill equation. Quart. appl.  
 Math. 16, 421—422 (1959).

The author considers the Hill equation (1)  $d^2x/dt^2 + (f(t) + \lambda)x = 0$  ( $f$  real-  
 valued, continuous, periodic of period 1). Let  $\lambda_0$  and  $\lambda_1$  be respectively the left and  
 the right end-points of the first stability interval of (1). It is shown that if  $\int_0^1 f^+ dt \leq 4$   
 $(f^+ = \sup(f, 0))$ , then  $\lambda_1 \geq \pi^2 \left(1 - \frac{1}{4} \int_0^1 f^+ dt\right)$ , where equality holds if and only  
 if  $f = 0$ . J. Peetre.

**Wintner, Aurel:** A comparison theorem for Sturmian oscillation numbers of  
 linear systems of second order. Duke math. J. 25, 515—518 (1958).

A l'équation vectorielle (1)  $x'' + F(t)x = 0$ , où  $F(t)$  est une matrice réelle,  
 $n \times n$ , continue pour  $t$  variant dans l'intervalle  $\theta$ , borné ou non, l'A. associe l'équation  
 scalaire (2)  $u'' + f(t)u = 0$ , où  $f(t)$  désigne, pour  $t$  fixé,  $t \in \theta$ , la plus grande  
 valeur propre de la composante hermitienne de  $F$ . Soit  $F_\theta$  [resp.  $f_\theta$ ] la plus petite  
 valeur (entier positif ou  $+\infty$ ) telle qu'aucune solution, non triviale,  $x(t)$  de (1)  
 [resp.  $u(t)$  de (2)] soit nulle en plus de  $F_\theta$  [resp.  $f_\theta$ ] points de l'intervalle  $\theta$ . On  
 montre que  $F_\theta \leq f_\theta$ . Th. Lepage.

**Levinson, Norman:** Remark about Wintner's comparison theorem. Duke math.  
 J. 25, 519—520 (1958).

L'A. apporte un complément à la démonstration de A. Wintner dans la Note  
 précédente (voir la récénsion précédente). Th. Lepage.

**Wintner, Aurel:** A stability criterion for quasi-harmonic vibrations. Quart.  
 appl. Math. 16, 423—426 (1959).

Es sei  $\omega(t)$  eine mod  $\pi$  periodische stetige Funktion. Dann ist nach Ljapunov  
 jede Lösung von (1)  $x'' + \omega^2(t)x = 0$  stabil, falls (2)  $\int_0^\pi \omega^2(t) dt < \frac{4}{\pi}$  ist.  
 Falls  $\omega(t)$  zusätzlichen Bedingungen unterworfen wird, ist verschiedentlich diese  
 Ungleichung verschärft worden. Verf. zeigt: Ist  $\omega(t) \neq 0$  und mod  $\pi$  periodisch,  
 so bleiben alle Lösungen von (1) für  $|t| \rightarrow \infty$  beschränkt, wenn

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \omega^2(t) dt < Q(1 - \vartheta^2)^{1/2}$$

gilt. Dabei ist  $Q = 0,8043 \dots$ ,  $\vartheta = \frac{(M-m)}{(M+m)}$ ,  $m = \min_{0 \leq t \leq \pi} \omega^2(t)$  und  $M = \max_{0 \leq t \leq \pi} \omega^2(t)$  bei  $0 \leq m \leq M < \infty$ ,  $M > 0$ . Es wird gezeigt, daß (3) unter Umständen schärfer als (2) sein kann.

W. Haacke.

**Perčinkova-V'čková, Danica:** Sur un problème de Sturm-Liouville. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 9, 33—36, français. Zusammenfassg. 36 (1958) [Serbo-kroatisch].

L'A. avait calculé les valeurs caractéristiques et les fonctions caractéristiques de l'équation linéaire  $y''' + \lambda y = 0$ , sous les conditions  $y^{(p)}(a) = y^{(q)}(a) = y^{(r)}(b)$ . Les résultats obtenus sont présentés par un tableau à neuf lignes. N. Saltykow.

**Rabenstein, Albert L.:** Asymptotic solutions of  $u^{IV} + \lambda^2(z u'' + \alpha u' + \beta u) = 0$  for large  $|\lambda|$ . Arch. rat. Mech. Analysis 1, 418—435 (1958).

Lo studio dell'equazione di Orr-Sommerfeld sulla stabilità idrodinamica può collegarsi con quello dell'equazione

$$(*) \quad u^{(4)} + \lambda^2 [z u'' + \alpha u' + \beta u] = 0, \quad (\beta \neq 0)$$

dove  $z$  indica la variabile complessa indipendente, e  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri complessi dipendenti da  $\lambda$ , tali che essi risultino uniformemente limitati per  $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$ . Questa equazione, che nel caso  $\alpha = 0$  è stata considerata da W. Wasow (questo Zbl. 38, 246), è in questo lavoro discussa dall'A. con i procedimenti di R. E. Langer (questo Zbl. 41, 59). La discussione si impenna sulla rappresentazione delle soluzioni della (\*) con l'integrale di Laplace

$$u = \int_C t^{\alpha-2} \exp\left(\frac{1}{3} \lambda^{-2} t^3 - \beta t^{-1} + z t\right) dt$$

esteso ad un cammino  $C$  tale che

$$[t^{\alpha} \exp\left(\frac{1}{3} \lambda^{-2} t^3 - \beta t^{-1} + z t\right)]_C = 0$$

e per questa via l'A. si costruisce dei sistemi fondamentali di integrali. G. Sansone.

**Švec, Marko:** Sur le comportement asymptotique des intégrales de l'équation différentielle  $y^{(4)} + Q(x)y = 0$ . Czechosl. math. J. 8 (83), 230—244, russ. Zusammenfassg. 244—245 (1958).

Trattasi di un interessante studio dell'equazione (\*)  $y^{(4)} + Q(x)y = 0$  dove  $Q(x)$  è continua e non negativa in  $(-\infty, \infty)$ , non si annulla identicamente in nessun intervallo, nell'ipotesi che gli integrali di (\*) siano tutti oscillanti. L'A. chiama classe  $S$  l'insieme di tutti gli integrali della (\*) che godono della proprietà che se  $y(x) \in S$  allora in ogni zero  $\varrho$  di  $y(x)$  si ha

$$y'(\varrho) y''(\varrho) y'''(\varrho) \neq 0, \quad \operatorname{sgn} y'(\varrho) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho) \neq \operatorname{sgn} y''(\varrho)$$

e generalizzando una congettura di M. Biernacki (questo Zbl. 52, 313) dimostra che la classe  $S$  non è vuota ed è identica agli insiemi degli integrali della (\*) che ammettono una derivata limitata per  $x$  sufficientemente grande. L'insieme  $S$  ammette anche due integrali indipendenti e ogni altro integrale appartenente ad  $S$  è una combinazione lineare di questi due. L'A. studia anche gli integrali non appartenenti ad  $S$  nelle ipotesi  $0 < m \leq Q(x)$ ,  $0 < m \leq Q(x) \leq M$ .

G. Sansone.

● **Hahn, Wolfgang:** Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 22.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1959. VII, 142 S. DM 28.—.

Inhalt: Kapitel I. Die Grundbegriffe (1—12). Kapitel II. Hinreichende Bedingungen für die Stabilität oder Instabilität der Ruhelage (12—18). Kapitel III. Anwendungen der Stabilitätssätze auf konkrete Probleme (18—51). Kapitel IV. Die Umkehrungen der Hauptsätze (51—72). Kapitel V. Ljapunovsche Funktionen mit bestimmtem Wachstumsverhalten (72—87). Kapitel VI. Die Empfindlichkeit des Stabilitätsverhaltens gegen Störungen (87—96). Kapitel VII. Die kritischen Fälle (96—109). Kapitel VIII. Verallgemeinerungen des Stabilitätsbegriffs (109—127).



Nachträge bei der Korrektur (127—128). Literatur (129—138). Namensverzeichnis. Sachverzeichnis. — Bei der Betrachtung des Buches sollen zwei besondere Umstände berücksichtigt werden. Erstens: Lange Zeit nach dem Erscheinen der klassischen Werke von A. M. Ljapunov über die Stabilität der Bewegung mechanischer Systeme (Problème général de la stabilité du mouvement. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 9, 203—474 (1907), französische Übersetzung der Publikation in Comm. Soc. math. Kharkow (1893) in russischer Sprache; Untersuchung eines singulären Falls des Problems der Stabilität einer Bewegung, Mat. Sbornik 17, 252—333 (1893)) sind diese Arbeiten isoliert geblieben. Ljapunov hat seine Methoden in der analytischen Mechanik verwendet; erst in den letzten 25 Jahren wurde festgestellt, daß mit diesen Methoden auch verschiedene Probleme der Physik und Technik behandelt werden können. Seitdem wurden Ljapunovs Ideen grundsätzlich studiert und bearbeitet, nämlich von verschiedenen sowjetischen Mathematikern und Mechanikern, die ihre Untersuchungen in den russischen Zeitschriften: Priklad. Mat. Mech., Doklady Akad. Nauk SSSR und Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. fiz.-mat. estestv., und zwar hauptsächlich in russischer Sprache publiziert haben. In der mathematischen Literatur sind außer in der UdSSR der Ljapunovschen Theorie wenige Werke gewidmet. Dieser Umstand behindert den Leser stark, der kein Russisch versteht oder dem die Originalarbeiten fehlen, der sich aber mit den Ergebnissen dieser Arbeiten zu beschäftigen wünscht. In diesem Sinne ist das Buch eine wichtige Erscheinung in der westlichen mathematischen Literatur. Zweitens und besonders wichtig ist die Tatsache, daß Verf. eine kurze, inhaltsreiche und systematische Darstellung der betrachteten Fragen gibt, wobei er außer allgemeinen mathematischen Kenntnissen kaum etwas voraussetzt. Die Definitionen, die vor den Ausführungen stehen, erleichtern die Orientierung des Lesers in einer Materie, bei der die rasche Entwicklung in den letzten Jahren und der erwähnte Mangel an Literatur in westlichen Sprachen diese Orientierung fast unmöglich machen. Die besonderen Definitionen und Sätze sind kursiv gedruckt. Das Material ist sowohl sachlich, als auch formal systematisiert. Man muß gestehen, daß in diesem verhältnismäßig neuen Gebiete, in welchem ähnliche Versuche für eine vollständige und konsequente Darstellung fehlen, hauptsächlich darum, weil sich die Forscher mehr mit der Behandlung konkreter Themen beschäftigen, das Werk des Verf. rechtzeitig erschienen und von Nutzen ist, seine Lektüre aber auch eine recht schwierige Aufgabe darstellt. Im Buche werden Fragen betrachtet, die die direkte Methode von Ljapunov betreffen. Verf. hat den Versuch gemacht, die Literatur bis 1957 möglichst vollständig zu erfassen. Es wird die Stabilitätstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Euklidischen Phasenraum behandelt, ohne auf topologische und andere Methoden einzugehen. Das spezielle Kapitel, welches den konkreten Problemen gewidmet ist, zeigt den Zusammenhang der Ljapunovschen Theorie mit der Praxis und kommt dem Interesse des Ingenieurs entgegen; es hat jedoch keinen technischen Charakter. Wichtig für die Anwendungen sind noch die §§ 26, 28, 32, 33 der Kapitel VI und VII. Von Interesse ist auch das abschließende Kapitel VIII wegen seines allgemeineren Charakters, welches zeigt, daß sich die direkte Methode nicht nur auf Differentialgleichungen beschränkt. Das Buch des Verf., nebst der neuerschienenen Monographie von V. I. Zubov: Die Methoden von A. M. Ljapunov und ihre Anwendungen (dies. Zbl. 78, 79), stellt einen kostbaren Führer auf dem Gebiete der Stabilitätstheorie dar.

I. Tschobanow.

**Hahn, Wolfgang:** Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen. Math. Ann. 136, 430—441 (1958).

Verf. überträgt die Begriffe und Methoden der Ljapunovschen Theorie, die sich mit der Stabilität der trivialen Lösung einer Vektordifferentialgleichung  $dx/dt = f(x, t)$ ;  $f(0, t) \equiv 0$  befaßt, auf Differenzengleichungen vom Typ  $x(t+1) = f(x, t)$ , worin speziell  $f(x, t) = A(t)x(t)$  oder  $f(x, t) = A(t)x(t) + g(x, t)$  mit

konstanter oder zeitlich variabler Matrix  $A$  angenommen wird. Die unabhängige Variable  $t$  durchläuft die Folge  $(t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots)$ , und der Anfangswert  $t_0$  kann aus einer Folge  $(t^*, t^* + 1, t^* + 2, \dots)$  gewählt werden. Eine skalare Funktion  $v(x, t)$  nennt der Verf. positiv-definit, wenn  $v(0, t) = 0$  für  $t \geq t^*$  und wenn  $v(x, t) \geq \varphi(|x|)$  für  $|x| \leq h$ ,  $t = t^*, t^* + 1, \dots$ , wobei  $\varphi(r)$  eine stetige, monoton wachsende Funktion von  $r$  und  $\varphi(0) = 0$  ist. Existiert eine ähnliche Funktion  $\psi(r)$ , so daß  $v(x, t) \leq \psi(|x|)$ , so nennt der Verf. die Funktion  $v$  zudem dekreszent (besser wäre: gleichmäßig klein). Er bringt folgende Stabilitätsdefinitionen, in denen die Lösung der Differenzengleichung mit dem Anfangswert  $q$  zur Zeit  $t_0$  als  $p(t, q, t_0)$  bezeichnet wird: 1. Die triviale Lösung heißt stabil, wenn man bei beliebigem  $t_0 \geq t^*$  für  $t \geq t_0$  die Ungleichung  $|p(t, q, t_0)| < \varepsilon$  durch die Einschränkung  $|q| < \delta$  erzwingen kann. 2. Die stabile triviale Lösung heißt darüber hinaus asymptotisch stabil, wenn  $p(t_0 + n, q, t_0) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $|q| < h$ . 3. Die triviale Lösung heißt instabil, wenn es zu jedem  $t_0 \geq t^*$  ein  $\varepsilon > 0$ , eine gegen 0 konvergierende Folge von Anfangswerten  $q_n$  und eine Folge von Zeitpunkten  $t_n \rightarrow \infty$  gibt, so daß  $|p(t_n, q_n, t_0)| \geq \varepsilon$  für hinreichend große  $n$  wird. Gilt diese Aussage für jede Lösung mit  $|q| < \varepsilon$ , so spricht der Verf. von totaler Instabilität. Er beweist nun eine Reihe wichtiger Sätze mit hinreichenden Kriterien für die verschiedenen Stabilitäts- oder Instabilitätsarten. Als Beispiele seien angeführt: Satz 1. Wenn zur Gleichung  $x(t+1) = f(x, t)$  eine positiv-definite Funktion  $v(x, t)$  existiert, so daß  $v(x, t) = v(x(t+1), t+1) - v(x, t)$  in einem Bereich  $|x| \leq h$ ;  $t = t^*, t^* + 1, \dots$  nicht positiv ausfällt, so ist die triviale Lösung stabil. Satz 2. Sie ist asymptotisch stabil, wenn  $v$  zudem dekreszent und  $w$  sogar negativ definit ist. Weitere Sätze betreffen die Stabilitätseigenschaften bei linearen Differenzengleichungen, insbesondere die exponentielle Stabilität oder Instabilität. *R. Reißig.*

Chin, Yuan-shun: On the equivalence problem of differential equations and difference-differential equations in the theory of stability. Science Record, n. Ser. 1, 287—289 (1957).

Verf. stellt einige Sätze über die Stabilität bei Differenzialdifferenzengleichungen erster Ordnung auf; zum Vergleich wird diejenige Differentialgleichung betrachtet, die durch Nullsetzen der Verzögerungsspanne entsteht. Beweise werden nicht mitgeteilt, was auch nicht nötig ist, da es sich nur um Umformulierungen bekannter Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen Stabilität und den Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Linearteils handelt. *W. Hahn.*

Lakshmikanth, V.: On the boundedness of solutions of nonlinear differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 1044—1048 (1958).

A function  $h(x, r)$  is, according to the author, said to possess the  $I$  property if  $h(x, r) \geq 0$  for the specified range of values of  $x$  and  $r$ , if it is measurable in  $x$  for fixed  $r \geq 0$ , continuous in  $r$  for fixed  $x$ ,  $x_0 \leq x < +\infty$ ,  $r \geq 0$ . Let if  $r(x)$  be the maximal solution (in the sense of Kamke) of the differential equation  $r' = h(x, r)$  passing through the point  $(x_0, 0)$ . The author then proves the following lemma: Suppose that  $h(x, r)$  has the property  $I$ . Let  $y(x)$  be continuous on  $x_0 \leq x < +\infty$  and satisfy the inequality

$$|\Delta y(x)| \leq \int_x^{x+\Delta x} h(t, y(t)) dt, \Delta x \geq 0;$$

then  $y(x) \leq r(x)$  for  $x_0 \leq x \leq +\infty$ . This constitutes a generalization of Bellman's lemma (this Zbl. 22, 357). By means of this lemma he proves some theorems concerning the boundedness of solutions of systems of non-linear differential equations. *G. G. Legatos.*

Mikolajska, Z.: Remarque sur la possibilité d'un passage continu conservant la stabilité entre deux systèmes d'équations différentielles quelconques ayant une solution périodique et stable. Ann. Polon. math. 5, 45—53 (1958).



Soient  $\dot{X} = F_i(t, X)$ , ( $i = 0, 1$ ) deux systèmes d'équations différentielles qui admettent chacun une solution périodique de la même période  $X = \Phi_i(t)$ , asymptotiquement stable. Il existe une déformation  $F(t, X, \lambda)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , des seconds membres, telle que le système  $\dot{X} = F(t, X, \lambda)$  admette une solution périodique de période  $T$ ,  $X = \Phi(t, \lambda)$ , asymptotiquement stable et qui constitue une déformation de  $\Phi_0(t)$  à  $\Phi_1(t)$ . La propriété reste vraie si l'on remplace la stabilité asymptotique par la stabilité simple. Une propriété similaire (Th. 2) est établie dans le cas de la stabilité simple de la solution banale d'un système, la déformation ayant en plus une propriété d'uniformité par rapport à  $\lambda$ , que l'A. appelle „passage équirégulier par rapport à la stabilité simple“. On peut passer équirégulièrement d'un système ayant la solution banale stable au système  $\dot{X} = 0$ . Nous remarquerons que les propriétés établies sont valables pour des équations différentielles dans un espace de Banach et qu'il serait peut-être intéressant d'examiner la déformation des fonctions de Liapounoff construites par le procédé de J. L. Massera (ce Zbl. 70, 310).

I. Barbălat.

● Bogoljubov, N. N. und Ja. A. Mitropol'skij: Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen. [Asimptotičeskie metody v teorii nelinejnych kolebanij.]. 2. verb. und erg. Aufl. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1958. 408 S. R. 17,55 [Russisch].

Die Verff. des vorliegenden Buches, die durch zahlreiche wertvolle Beiträge zur Theorie der nichtlinearen Schwingungen bekannt sind, setzen sich das Ziel, die numerischen Verfahren zum Studium der Eigenschaften und des Verhaltens nichtlinearer dynamischer Systeme bis zum heutigen Entwicklungszustand darzulegen. Da solche Systeme auf verschiedenen Gebieten der modernen Physik und Technik eine große Rolle spielen, wird das Buch zahlreiche Interessenten finden. Die darin enthaltenen Methoden beruhen auf asymptotischen Entwicklungen nach Potenzen kleiner Parameter, die den Grad der Nichtlinearität der betrachteten dynamischen Systeme charakterisieren. Sie haben sich in einer Reihe praktisch wichtiger Fälle als sehr wirksam erwiesen, um den Verlauf von Schwingungen zu berechnen; jedoch darf man nicht verkennen, daß sie sich nur in einem schmalen Randbezirk der nichtlinearen Mechanik anwenden lassen. Nach einer Einführung, in der verschiedene nichtlineare Schwingungsprobleme skizziert werden, behandeln die Verff. im 1. Kapitel freie Schwingungen in quasilinearen Systemen. Sie erläutern im Fall der quasiharmonischen Differentialgleichung 2. Ordnung die Konstruktion asymptotischer Lösungen und studieren danach einfache Schwinger mit konservativen Kräften, mit nichtlinearer Reibung und schließlich mit Selbsterregung. Sie widmen sich Stabilitätsfragen und stationären Lösungen, bringen das Verfahren der äquivalenten Linearisierung und untersuchen Systeme mit langsam veränderlichen Parametern. Zur Erläuterung findet man zahlreiche durchgerechnete Beispiele. Kapitel 2 enthält die Phasenebenenmethode und beginnt mit den grundlegenden Begriffen (Phasenbahn, singulärer Punkt, Grenzzyklus) und Überlegungen (Klassifizierung der singulären Punkte, Index-Betrachtungen). Ausführlich wird die Liénardsche Konstruktionsmethode erörtert und auf das Beispiel der van der Polschen Gleichung angewandt. Abschließend werden Relaxationsschwingungen und die Methode von Dorodnicyn zum Studium der van der Polschen Gleichung bei großen Parameterwerten erörtert. In Kapitel 3 gehen die Verff. dazu über, den Einfluß einer periodischen Fremderregung zu betrachten. Erst werden asymptotische Entwicklungen im Nichtresonanzfall und danach im Resonanzfall durchgeführt; dabei beziehen sich die Verff. immer auf den einfachen quasiharmonischen Schwinger. Der Einfluß einer sinusförmigen Erregung wird eingehend behandelt, und zwar auch für den Fall, daß die Federkennlinie aus Geradenabschnitten besteht. Es folgen noch die wichtigen Probleme der parametrischen Resonanz und der Einwirkung periodischer Kräfte auf



Relaxationssysteme sowie auf Systeme mit langsam veränderlichen Parametern. Systeme  $n$ -ter Ordnung und ihre Schwingungen mit einer einheitlichen Frequenz studieren die Verff. im 4. Kapitel. Erst werden freie Schwingungen nichtlinearer Systeme, danach erzwungene Schwingungen und zuletzt Schwingungen bei langsam veränderlichen Parametern betrachtet. Kapitel 5 ist einem Verfahren gewidmet, das sich immer dann wirksam anwenden läßt, wenn man die Differentialgleichungen durch geeignete Variablentransformationen in die Gestalt eines Systems 1. Ordnung mit rechten Seiten, die einem kleinen Parameter proportional sind, bringen kann. Das Verfahren beruht auf Mittelbildung in bezug auf die Zeit. Das letzte Kapitel (6.) befaßt sich mit den Grundlagen der asymptotischen Methoden und wendet sich in erster Linie an den Mathematiker, während die übrigen Kapitel auch für mathematisch interessierte Physiker und Techniker bestimmt sind.

R. Reißig.

**Mitropol'skij (Mitropolsky), Ju. A. (Y. A.): On the investigation of an integral manifold for a system of nonlinear equations with variable coefficients.** Ukrain. mat. Žurn. 10, 270—279, engl. Zusammenfassg. 279 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet ein Differentialgleichungssystem, zu dem nichtstationäre Schwingungen in der nichtlinearen Mechanik Anlaß geben können:  $dh/dt = H(t)h + Q(t, g, h, \varepsilon)$ ;  $dg/dt = \omega(t) + P(t, g, h, \varepsilon)$ . Darin ist  $h$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Vektor,  $H(t)$  eine beschränkte quadratische Matrix  $(n-1)$ -ter Ordnung,  $\omega(t)$  eine beschränkte Funktion. Den Fall, daß  $H$  und  $\omega$  konstant,  $P$  und  $Q$  fastperiodische Funktionen von  $t$  und periodische Funktionen von  $g$  sind, hat N. N. Bogoljubov behandelt. Er wies eine Lösungsschar nach, die der Beziehung  $h = f(t, g, \varepsilon)$  genügt, wobei  $f$  in  $g$  periodisch und in  $t$  fastperiodisch ist, und untersuchte ihre Eigenschaften. Die Resultate von Bogoljubov werden in der vorliegenden Arbeit verallgemeinert. Über die Differentialgleichungen wird folgendes vorausgesetzt: 1. Die Funktion  $P(t, g, h, \varepsilon)$  und die  $(n-1)$ -dimensionale Vektorfunktion  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  sind im Bereich  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < g < \infty$ ,  $|h| \leq \varrho_0$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  beschränkt. — 2. Im Bereich  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < g < \infty$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  gilt  $|P(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon)$ ,  $|Q(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon)$ ;  $M(\varepsilon) \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . — 3. Für ein beliebiges  $\varrho$ ,  $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ , gelten im Bereich  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < g' < \infty$ ,  $|h'|, |h''| \leq \varrho$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  die Lipschitzbedingungen

$$|P(t, g', h', \varepsilon) - P(t, g'', h'', \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \varrho) \{|g' - g''| + |h' - h''|\},$$

$$|Q(t, g', h', \varepsilon) - Q(t, g'', h'', \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \varrho) \{|g' - g''| + |h' - h''|\},$$

in denen  $\lambda(\varepsilon, \varrho) \rightarrow 0$  für  $|\varepsilon| + |\varrho| \rightarrow 0$ . — 4. Die  $(n-1)$ -reihige quadratische Matrix  $H(t)$  ist auf der ganzen reellen  $t$ -Achse definiert, genügt den Bedingungen  $|H(t)| \leq N$ ,  $|H(t') - H(t'')| \leq d|t' - t''|$ , und ihre Eigenwerte  $p_i(t)$  sind so beschaffen, daß  $\operatorname{Re} \{p_i(t)\} \leq -\gamma < 0$ . Es wird der Satz bewiesen: Wenn das vorgelegte Differentialgleichungssystem die Bedingungen 1.—4. erfüllt, dann lassen sich immer solche positiven Konstanten  $\varrho^*$  und  $\varepsilon^*$  angeben, daß für  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$  eine eindeutige einparametrische Lösungsschar existiert, die durch die Beziehung  $h = f(t, g, \varepsilon)$  explizit dargestellt werden kann. Darin ist  $f$  als Funktion von  $t$  und  $g$  über  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < g < \infty$  definiert und gehorcht den Ungleichungen  $|f(t, g, \varepsilon)| \leq D(\varepsilon) \leq \varrho^*$ ,  $|f(t, g', \varepsilon) - f(t, g'', \varepsilon)| \leq \Delta(\varepsilon) |g' - g''|$ ;  $|\Delta(\varepsilon)| + |D(\varepsilon)| \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Diese Lösungsschar besitzt insofern Stabilitätseigenschaften, als zu ihr jede beliebige Lösung  $h = h_t$ , deren Anfangswert in den Bereich  $|h| \leq \varrho^*$  fällt, nach dem Gesetz  $|h_t - f(t, g, \varepsilon)| \leq K(\varepsilon, D) e^{-(t-t_0)/T}$  im Laufe der Zeit hinstrebt.

R. Reißig.

**Mitropol'skij (Mitropolsky), Ju. A. (Y. A.): On the stability of a one-parameter family of solutions of a system of equations with variable coefficients.** Ukrain. mat. Žurn. 10, 389—393, engl. Zusammenfassg. 393 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet eine Differentialgleichung der Gestalt  $dx/dt = X(\varepsilon t, x) + \varepsilon X^*(\varepsilon t, \theta, x, \varepsilon)$ , worin  $x$  ein  $n$ -dimensionaler Vektor im Euklidischen Raum,

$X, X^*$   $n$ -dimensionale Vektorfunktionen,  $t$  die Zeit,  $\varepsilon$  ein kleiner positiver Parameter und  $d\theta/dt = \nu(\varepsilon t) > 0$  ist. Er setzt folgende Bedingungen voraus: 1. Für die „ungestörte Gleichung“  $dx/dt = X(\tau, x)$ , in der man  $\tau$  als konstanten Parameter ansieht, gibt es eine Schar stabiler periodischer Lösungen  $x = x^0(\tau, \psi)$ ,  $\psi = \omega t + \varphi$ , mit der Periode  $2\pi$  in  $\psi$ , so daß unter den charakteristischen Exponenten der Variationsgleichung  $du/dt = \text{grad } X(\tau, x^0) \cdot u$  genau  $n - 1$  [etwa  $\alpha_1(\tau), \dots, \alpha_{n-1}(\tau)$ ] negative Realteile haben. — 2. Für beliebige nicht-negative ganze Zahlen  $m_1, \dots, m_{n-1}$ ,  $m_1 + \dots + m_{n-1} \geq 2$ , gelten die  $n - 1$  Bedingungen  $m_1 \text{Re } \alpha_1(\tau) + \dots + m_{n-1} \text{Re } \alpha_{n-1}(\tau) \neq \text{Re } \alpha_n(\tau)$ . — 3. Es existieren solche positiven Konstanten  $\varrho, \varepsilon_0$ , daß für  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  zu allen Zeiten in einer  $\varrho$ -Umgebung der Phasenbahn  $x^0(\tau, \psi)$  die Vektorfunktion  $X(\varepsilon t, x) + \varepsilon X^*(\varepsilon t, \theta, x, \varepsilon)$ ;  $d\theta/dt = \nu(\varepsilon t)$  periodisch in  $\theta$  mit der Periode  $2\pi$ , beschränkt und nach  $x, t, \varepsilon$  bis zu einer genügend hohen Ordnung differenzierbar ist. Unter den Bedingungen 1.—3. beweist Verf., daß sich positive Konstanten  $\varrho^* < \varrho$ ,  $\varepsilon^* < \varepsilon_0$  finden lassen, für die folgende Behauptungen gelten: 1. Die vorgelegte Differentialgleichung hat eine eindeutig bestimmte einparametrische Lösungsschar, die man (wenn 2. gilt) in der Form  $x(\varepsilon t, \theta, \psi) = f(\varepsilon t, \psi, h(\varepsilon t, \theta, \psi, \varepsilon))$  oder (falls 2. nicht zutrifft) in der Gestalt

$$x(\varepsilon t, \theta, \psi) = x^0(\varepsilon t, \psi) + \frac{1}{2} \{A(\varepsilon t, \psi) h(\varepsilon t, \theta, \psi, \varepsilon) + \bar{A}(\varepsilon t, \psi) h(\varepsilon t, \theta, \psi, \varepsilon)\}$$

darstellen kann. Darin ist  $h(\varepsilon t, \theta, \psi, \varepsilon)$  die Parameterdarstellung einer einparametrischen Lösungsschar eines Differentialgleichungssystems vom Typ

$$dh/dt = \lambda(\varepsilon t) h + \varepsilon Q_1(\varepsilon t, \theta, \psi, h, \varepsilon), \quad d\psi/dt = \omega(\varepsilon t) + \varepsilon P_1(\varepsilon t, \theta, \psi, h, \varepsilon)$$

$$\text{bzw.} \quad dh/dt = H(\varepsilon t) h + Q(\varepsilon t, \theta, \psi, h, \varepsilon), \quad d\psi/dt = \omega(\varepsilon t) + P(\varepsilon t, \theta, \psi, h, \varepsilon)$$

(s. das vorstehende Referat). — 2. Für Lösungen dieser einparametrischen Schar ist die betrachtete Differentialgleichung einer Gleichung vom Typ

$$d\psi/dt = \omega(\varepsilon t) + \varepsilon P_1(\varepsilon t, \theta, \psi, h(\varepsilon t, \theta, \psi, \varepsilon), \varepsilon)$$

$$\text{bzw.} \quad d\psi/dt = \omega(\varepsilon t) + P(\varepsilon t, \theta, \psi, h(\varepsilon t, \theta, \psi, \varepsilon), \varepsilon)$$

äquivalent. — 3. Die beschriebene Lösungsschar ist in dem Sinne stabil, daß eine beliebige Lösung  $x(t)$  mit Anfangsbedingungen aus einer hinreichend engen Nachbarschaft der Lösungsschar im Laufe der Zeit nach dem Gesetz  $|x(\varepsilon t, \theta, \psi) - x(t)| \leq C \exp(-(t - t_0)/T)$  hinstrebt; darin sind  $C$  und  $T$  positive Konstanten.

*R. Reiffig.*

**Skowroński, Janisław and Stefan Ziemba:** Some complementary remarks on the delta method for determining phase trajectories of systems with strong non-linearity. Arch. Mech. stosow. 10, 699—706, russ. Zusammenfassg. 706 (1958).

Es sei  $\ddot{x} + F(x, \dot{x}, t) = 0$  die Schwingungsgleichung. Sie wird in der Form  $\ddot{x} + x + \delta(x, \dot{x}, t) = 0$  geschrieben. Die entsprechende Gleichung  $dy/dx = -(x + \delta)/y$  wird dann auf graphischem Wege näherungsweise gelöst; dabei wird  $\delta$  abschnittsweise als konstant angesehen. Zur Prüfung der Genauigkeit dieser „ $\delta$ -Methode“ differenzieren die Verf. die Ausgangsgleichung, ersetzen die entstehende Differentialgleichung durch zwei Systeme erster Ordnung und führen sodann für diese beiden Systeme simultan die  $\delta$ -Methode durch. Dem Ref. ist nicht klar, wieso ein Vergleich der beiden Ergebnisse zu einer Fehlerabschätzung führen soll; es ist nicht ohne weiteres einzusehen, daß der zweite Weg zu einem „besseren“ Resultat führt als der erste.

*W. Hahn.*

**Skowroński, Janisław:** A method of qualitative analysis of vibrating discrete systems with strong non-linearity in the phase space. Arch. Mech. stosow. 10, 715—726, russ. Zusammenfassg. 726 (1958).

Die im vorstehenden Referat skizzierte Methode wird in folgender Weise auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden übertragen: Man führt im  $2n$ -dimensionalen Phasenraum ein rechtwinkliges Koordinatensystem derart ein, daß die Projektion der Phasentrajektorie auf  $n$  bestimmte Koordinatenebenen eindeutig ist. Man kann

sich dann in jeder Ebene die  $\delta$ -Methode durchgeführt denken und erhält dementsprechend  $n$  Größen  $\delta^1, \dots, \delta^n$ . Die Diskussion des Hodographen, der zu dem Vektor mit den Koordinaten  $(\delta^1, \dots, \delta^n; 0, \dots, 0)$  gehört, liefert eine Reihe von qualitativen Aussagen über das Ausgangssystem. W. Hahn.

**Bushaw, D.: Optimal discontinuous forcing terms.** Ann. Math. Studies **41**, 29—52 (1958).

$g(x, y)$  sei eine Funktion mit überall stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung. Gesucht sei eine Funktion  $\varphi(x, y)$  mit folgenden Eigenschaften: 1.  $\varphi(x, y) = \pm 1$ . 2. Ist  $(x_0, y_0)$  ein Punkt eines gewissen Bereichs  $R$  der  $(x, y)$ -Ebene, der auch  $(0, 0)$  enthält, so gebe es eine Lösung  $x(t)$  der Differentialgleichung  $(1) \ddot{x} + g(x, \dot{x}) = \varphi(x, \dot{x})$  mit  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  so, daß wenigstens ein  $t_0 > 0$  existiert, für das  $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$  gilt. 3. Für alle Punkte von  $R$  ist  $t_0$  ein Minimum bezüglich der Klasse der Funktionen  $\varphi$ , die 1. und 2. genügen. — Die Lösungen von (1) bei  $\varphi \equiv +1$  ergeben „P-Kurven“ in der Phasenebene, für  $\varphi \equiv -1$  „N-Kurven“. Die Lösungen setzen sich aus P- und N-Bogen zusammen. Verf. reduziert zunächst das Problem, indem er zeigt, daß nur spezielle „Wege“ für das Minimum in Frage kommen (kanonische Wege). Der größte Teil der Arbeit bezieht sich auf den linearen Fall  $g(x, y) = Ax + By$  mit reellen  $A, B$ . Für die verschiedenen Lösungstypen der charakteristischen Gleichung wird die Lage der Umschaltunkte diskutiert. W. Haacke.

**Minorsky, Nicolas: Sur l'action asynchrone.** C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 631—633 (1959).

Verf. geht von der Differentialgleichung  $x'' + x + \mu f(x, x') = e \sin \omega t$  aus, die in der nichtlinearen Mechanik eine große Rolle spielt. Er bemerkt, daß sie verschiedene Schwingungserscheinungen darzustellen vermag, je nach dem Wert von  $\omega$ . Ganzzahlige Werte  $\omega = i$  entsprechen der exakten Resonanz; Werte  $\omega_i = i \pm \varepsilon_i$  begrenzen Resonanzzonen, in denen Synchronisation (Frequenzmitnahme) bewirkt wird; außerhalb dieser Zonen unterscheiden sich die Frequenzen der Selbstschwingungen und der erzwungenen Schwingungen, und es entstehen fastperiodische Zustände. Unter bestimmten Bedingungen ist es auch möglich, daß die Selbstschwingungen durch die erzwungenen Schwingungen unterdrückt werden, und zwar dann, wenn die Frequenz der letzteren genügend groß ist; diese Erscheinung wurde von Appleton experimentell nachgewiesen. Verf. untersucht sie am Beispiel der van der Polschen Gleichung  $u'' - \mu(\alpha - \beta u^2)u' + u = e \sin \omega t$ , die mit  $u = ex, \gamma = \beta e^2$  die Gestalt  $x'' - \mu(\alpha - \gamma x^2)x' + x = \sin \omega t$  annimmt. Für  $x(t)$  und  $y(t) = x'(t)$  bildet er die ersten Näherungen  $x_0(t) + \mu x_1(t)$  bzw.  $y_0(t) + \mu y_1(t)$  und stellt mit ihnen die Bedingungsgleichungen für die heteroperiodischen Schwingungen  $x(2\pi/\omega) - x(0) = 0, y(2\pi/\omega) - y(0) = 0$  auf. Aus den darin vorkommenden Koordinatendifferenzen bildet er die stroboskopischen Differentialgleichungen, die er durch Übergang von der Zeitskala  $\tau = 2\pi/\omega$  zur Zeitskala  $T = 2\pi$  abändert, um das Selbstschwingungsregime zu untersuchen. Er bestimmt nun den singulären Punkt des entstehenden Gleichungssystems und findet unter der Voraussetzung  $1/\omega = O(\mu)$ , daß seine Koordinaten von der Größenordnung des kleinen Parameters  $\mu$  sind. Daraus schließt er, daß in Anwesenheit einer hochfrequenten heteroperiodischen Schwingung keine endliche autoperiodische Schwingung existieren kann. R. Reißig.

**Johnson, Elgy S. and Choy-Tak Taam: On the solutions of nonlinear differential equations. II.** J. Math. Mech. **6**, 383—392 (1957).

(Teil I und III, Taam, dies. Zbl. **77**, 90, **80**, 74.) Während in Teil I der Arbeit die Differentialgleichung  $x'' + p(t)x + 2q(t)x^3 = 0$  behandelt wird, untersuchen die Verff. im vorliegenden Teil II die Gleichung  $x'' + p(t)x - 2q(t)x^3 = 0$ , die sich



durch Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung einer weichen Feder ergibt. Die Koeffizienten  $p(t)$ ,  $q(t)$  sollen positive obere und untere Schranken besitzen  $[a \leq p(t) \leq A, b \leq q(t) \leq B]$  und auf  $[0, \infty)$   $L$ -meßbar sein. Zunächst beweisen die Verff. einen für die weiteren Überlegungen grundlegenden Satz über die Lösungen  $x(t, 0, E)$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = E > 0$ . (I) Sei  $0 < E_1 < E_2$ . Dann gilt  $x(t, 0, E_1) < x(t, 0, E_2)$  für alle positiven  $t$ , solange  $x(t, 0, E_1)$  nicht-negativ bleibt. Das Ergebnis wird benutzt, um (II) zu beweisen: Es existiert eine positive Konstante  $E_0$ , so daß für  $0 < E < E_0$  jede Lösung  $x(t, 0, E)$  eine erste positive Nullstelle  $T(E)$  und ein positives absolutes Maximum  $M(E)$  im Intervall  $[0, T(E)]$  besitzt.  $M$  und  $T$  wachsen über  $(0, E_0)$  streng monoton und streben zu einem positiven Grenzwert bzw. gegen Unendlich, wenn sich  $E$  dem Wert  $E_0$  von links nähert. Sie streben nach Null bzw. zu einem positiven Grenzwert, wenn  $E$  von rechts gegen Null geht. Der Punkt  $t$ , wo  $x(t, 0, E)$  zuerst das absolute Maximum  $M(E)$  erreicht, wächst ebenfalls mit  $E$ . (III) die Lösung  $x(t, 0, E_0)$  existiert für alle positiven  $t$ -Werte und ist beschränkt, während  $x(t, 0, E)$ ,  $E_0 < E < \infty$ , für  $t \rightarrow I(E)$  gegen  $\infty$  strebt;  $I(E)$  wächst nicht mit  $E$ , und für jede Zahl  $r > 0$  gibt es einen Wert  $E$ ,  $E_0 < E < \infty$ , so daß  $I(E) = r$ . Der nächste Satz bezieht sich auf Lösungen  $x(t, k, E)$ , für die  $x(0) = k$ ,  $x'(0) = E$ . (IV)  $x(t, k_1, E) = x_1(t) < x_2(t) = x(t, k_2, E)$  für  $t \geq 0$ , falls  $0 \leq k_1 < k_2 < (a/2b)^{1/2}$ . Ferner  $x_2(t) - x_1(t) \rightarrow 0$ ,  $x'_2(t) - x'_1(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Die darauffolgenden Sätze betreffen die Lösungen der betrachteten Gleichung, wenn die Koeffizienten  $p, q > 0$  gerade periodische Funktionen der Zeit  $t$  sind. Dabei wird zum Vergleich die Differentialgleichung  $w'' + p(t)w = 0$  herangezogen, bei der man die erste positive Nullstelle der Lösung  $w(t, k, E)$  im Fall  $k = 0$ ,  $E \rightarrow +0$  mit  $T_w$  und im Fall  $k \rightarrow +0$ ,  $E = 0$  mit  $t_w$  bezeichnet. (V) Die kleinste gemeinsame Periode von  $p$  und  $q$  sei  $L$ . Ist  $n$  eine positive ganze Zahl, für die  $nL > 2T_w$ , so existiert eine periodische Lösung  $x(t)$  mit der kleinsten Periode  $nL$  und genau drei Nullstellen im abgeschlossenen Periodenintervall  $[0, nL]$ :  $0, \frac{1}{2}nL, nL$ . (VI) Wenn  $2m\pi < nLa^{1/2}$ , so existiert eine periodische Lösung  $x(t)$  mit der Periode  $nL$  und genau  $2m + 1$  Nullstellen (darunter  $0, \frac{1}{2}nL, nL$ ) im abgeschlossenen Intervall  $[0, nL]$ . (VII) Wenn  $nL > 2t_w$ , dann existiert eine periodische Lösung  $x(t, k, 0)$  mit der kleinsten Periode  $2nL$ , die im abgeschlossenen Periodenintervall  $[0, 2nL]$  genau zwei Nullstellen ( $\frac{1}{2}nL, \frac{3}{2}nL$ ) hat, während ihre Ableitung Nullstellen in  $0, nL, 2nL$  besitzt. (VIII) Wenn  $(2m - 1)\pi < nLa^{1/2}$ , dann existiert eine periodische Lösung vom Typ  $x(t, k, 0)$  mit der Periode  $2nL$ , so daß  $x$  im abgeschlossenen Periodenintervall  $[0, 2nL]$  genau  $2(2m - 1)$  Nullstellen (einschließlich  $\frac{1}{2}nL, \frac{3}{2}nL$ ) und  $x'$  Nullstellen in  $0, nL, 2nL$  hat. Nach diesen aufschlußreichen Sätzen über das Schwingungsverhalten bringen die Verff. noch einen Vergleichssatz und einen Satz über die Verteilung der Nullstellen einer Lösung  $x(t)$ , die Folge der Maxima von  $|x(t)|$  zwischen je zwei benachbarten Nullstellen und die Folge der Werte  $|x'|$  an den Nullstellen für den Sonderfall, daß  $p(t)$  nicht abnimmt (wächst) und  $q(t)$  nicht zunimmt (fällt). R. Reißig.

**Helms, L. L. and C. R. Putnam:** Stability in incompressible systems. J. Math. Mech. **7**, 901—903 (1958).

Es sei  $\dot{x} = f(x)$  eine Vektordifferentialgleichung, deren rechte Seite der Bedingung  $\operatorname{div} f = 0$  genüge. Die Lösung  $x(t)$  sei stabil und beschränkt, und zwar sollen beide Eigenschaften auf der ganzen  $t$ -Achse  $-\infty < t < \infty$  erfüllt sein. Dann ist  $x(t)$  fastperiodisch. Die Verff. geben für diesen Satz zwei kurze Beweise, von denen der eine maßtheoretische Hilfsmittel, der andere einen Satz aus der Ergodentheorie benutzt. W. Hahn.

**Banditch, I.:** Sur l'intégration de deux équations différentielles importantes non-linéaires de deuxième ordre. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **44**, 702—707 (1958).

L'A., riprendendo una precedente ricerca di D. Mitrinovitch (questo Zbl. 64, 333), prova che le due equazioni

$$y'' + f(x)y' = \varphi(x)y^n, \quad y'' + f(x)y' = \varphi(x)e^y$$

sono integrabili per quadrature nel caso di  $\varphi(x) = a \exp(-2 \int f(x) dx)$ , ( $a = \text{costante}$ ).  
G. Sansone.

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

**Haimoviei, Mendel:** Alcune proprietà delle decomposizioni dei sistemi differenziali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 646—652 (1958).

Soit  $S$  un système différentiel extérieur, fermé, au sens de Cartan-Kähler. Dans une Note précédente (ce Zbl. 80, 76) l'A. détermine les conditions d'existence d'une décomposition régulière et montre le parti que l'on en peut tirer pour l'intégration de  $S$ . Dans la présente Note, il précise la signification du terme  $f_\beta$  figurant dans la relation entre les caractères de  $S$  et ceux des termes  $S^{(1)}$  et  $S^{(2)}$  d'une décomposition régulière. En particulier,  $f_\beta = 0$ , lorsque les éléments plans intégraux de  $S$  sont réguliers pour  $S^{(1)}$ .  
Th. Lepage.

**Elianu, I. P.:** Sur les formes différentielles polyharmoniques. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Secţ. Şti. mat. fiz. 9, 233—240, russ. und französ. Zusammenfassg. 239 (1957) [Rumänisch].

Sur un espace de Riemann  $V_n$ , soient  $d\alpha$  et  $\delta\alpha$  la différentielle et la codifférentielle de la forme différentielle extérieure  $\alpha$ . Si  $\alpha$  est de classe  $C^{2m-1}$  et  $d(\delta d)^{m-1}\alpha = 0$ , l'A. appelle  $\alpha$  une forme fermée d'ordre  $m$ ; de même, si  $\delta(d\delta)^{m-1}\alpha = 0$ ,  $\alpha$  est cofermée d'ordre  $m$ . Si  $\alpha$  est de classe  $C^{2m}$  et si  $(d\delta + \delta d)^m\alpha = 0$ ,  $\alpha$  est une forme polyharmonique d'ordre  $m$ . On montre que: Si  $V_n$  est un espace orientable et compact, alors toute forme  $\alpha$ , fermée (cofermée, polyharmonique) d'ordre  $m$  est aussi fermée (co-fermée, harmonique). Si  $V_n$  est euclidien, toute forme polyharmonique admet un développement du type d'Almansi, dans tout domaine étoilé de  $V_n$ . Dans un espace de Riemann analytique et orientable, toute forme polyharmonique est analytique.  
C. Teleman.

**Lopatinskij [Lopatinsky], Ja. B. (Y. B.):** On certain problems of the theory of partial differential equations. Ukrain. mat. Žurn. 9, 389—393, engl. Zusammenfassg. 393 (1957) [Russisch].

Il s'agit des problèmes qui, d'après l'avis de l'A., sont à l'ordre du jour dans la théorie des équations différentielles appartenant aux trois domaines suivants. Tout d'abord, les problèmes d'approximation des solutions. La question spéciale de création d'une théorie des équations aux différences finies approximées par les méthodes de la théorie des probabilités. En suite s'imposent les solutions effectives et l'investigation des opérations pour former certaines classes d'équations et la recherche de leurs équations représentatives, en développant la théorie des spectres d'une algèbre des opérateurs adjoints. Définitivement se pose la théorie générale des équations aux dérivées partielles, la formation des solutions spéciales singulières et l'étude de leurs relations, mutuelles et de leur unicité, définition du problème limite des indices, développement de la théorie multidimensionnelle, des équations singulières et la théorie des intégrales multidimensionnelles des fonctions algébriques etc.

N. Saltykow.

**Moisil, Gr. C.:** La définition des systèmes différentiels adjoints pour quelques systèmes qui ne sont pas de type Cauchy-Kowalewska. Comun. Acad. Republ. popul. Române 1, 327—328, russ. und französ. Zusammenfassg. 329 (1951) [Rumänisch].

L'A. s'occupe de systèmes

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\mu} + \sum_i a_{\mu ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad (2) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x_\mu} + \sum_i a_{\mu ij} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + \sum_i b_{\mu ij} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} = 0$$

considérés comme les systèmes adjoints aux systèmes complètement intégrables

$$(1') \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_\mu} + \sum_j a_{\mu ij} \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad (2') \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_\mu} + \sum_j a_{\mu ij} \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial y} + \sum_j b_{\mu ij} \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial z} = 0$$

respectivement et montre que l'on a les formules de réciprocité

$$\oint_C \sum_i \varphi_i \bar{\varphi}_i dy - \sum_{\mu ij} a_{\mu ij} \bar{\varphi}_i \varphi_j dx_\mu = 0$$

et

$$\begin{aligned} \oint_S \sum_i \psi_i \bar{\psi}_i dy dz - \sum_{\mu ij} a_{\mu ij} \psi_i \bar{\psi}_j dx_\mu dz - b_{\mu ij} \psi_i \bar{\psi}_j dx_\mu dy \\ + \sum_{\substack{\mu \nu \\ i j l}} a_{\mu il} b_{\nu lj} \psi_i \bar{\psi}_j dx_\mu dx_\nu = 0. \end{aligned}$$

Ces résultats proviennent du fait que le système (1) (ou (2)) peut être considéré comme les conditions de  $F$ -monogénéité dans une algèbre convenablement choisie.

*M. N. Roşculeţ.*

**Žautykov, O. A.:** Eine Verallgemeinerung der Poissonschen Klammern für Funktionen von abzählbar vielen Veränderlichen. Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85), 29—36 (1957) [Russisch].

L'A. généralise les propriétés classiques des paranthèses de Poisson dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue sur le cas d'un nombre infini des variables indépendantes, en considérant les paranthèses

$$(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial z_k} \right),$$

les  $x_k$  désignant les variables canoniques de la première classe et celles  $z_k$  de la seconde classe. En même temps l'A. étudie les systèmes d'équations aux dérivées partielles correspondant à un nombre infini des variables indépendantes. La complication qui se présente provient de ce fait que les séries infinies interviennent au lieu des sommes algébriques à un nombre fini des termes. L'A. surmonte ces difficultés avec succès. Or, on n'avait jamais donné le nom de Poisson à l'identité classique de Jacobi, à trois fonctions distinctes des variables canoniques [voir N. Saltykow, Méthodes classiques d'intégration des équations partielles du premier ordre à une fonction inconnue (ce Zbl. 3, 113), p. 22], qui avait permis à Jacobi de créer sa belle méthode d'intégration, dite Nouvelle Méthode.

*W. Saltykow.*

**Bandyopadhyay, G.:** On certain lemma in connection with separable solution of partial differential equations. Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New Delhi 1956, Oct. 15—16, 269—270 (1957).

L'A. établit que si l'on a, pour 3 variables indépendantes  $x, y$  et  $z$ ,

$$f_1(x) g_1(y) h_1(z) + f_2(x) g_2(y) h_2(z) + f_3(x) g_3(y) h_3(z) = 0,$$

alors, sous certaines conditions, on a, soit

$$f_1(x) = A f_2(x) = B f_3(x), \quad g_1(y) = C g_2(y) = D g_3(y),$$

$$ABCD h_1(z) + BD h_2(z) + AC h_3(z) = 0,$$

soit des relations analogues obtenues en permutant les diverses lettres. *Ch. Blanc.*

**Olaru, V.:** Le problème de Goursat-Beudon pour l'équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre  $n$  à deux variables indépendantes. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 9, 191—208, russ. und französ. Zusammenfassg. 207—208 (1958) [Rumänisch].

L'A. studia, applicando il metodo di approssimazioni successive, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine  $n$  in due



variabili indipendenti a coefficienti costanti, fissandone certe condizioni da soddisfarsi su due curve aventi un punto comune con tangenti ivi distinti (il problema di Goursat-Beudon). I risultati si conseguono con alcuni dettagli per certi casi particolari dell'equazione in istudio.

*D. J. Mangeron.*

**Moisil, Gr. C.: Polynômes associés aux expressions différentielles bilinéaires à coefficients constants.** *Comun. Acad. Republ. popul. Române* **2**, 129—131, russ. und französ. Zusammenfassg. 131 (1952) [Rumänisch].

Dans cette Note, l'A. définit un procédé général permettant d'étendre au cas bilinéaire sa méthode d'étude des propriétés algébriques des systèmes d'opérateurs différentiels linéaires (Gr. C. Moisil, *Les matrices associées aux systèmes d'équations aux dérivées partielles*, București 1950, en roumain). On associe biunivoquement à une expression différentielle bilinéaire aux coefficients constants (telles qu'on les rencontre, p. ex. dans les formules de réciprocité des systèmes d'équations aux dérivées partielles, etc.) un système de  $rs$  polynômes  $P_{hk}$  à  $2n$  variables, lorsqu'on a les  $r+s$  fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \dots, \psi_s$  aux  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ . Les propriétés algébriques des polynômes associés sont mis en évidence. Si les coefficients, sont variables, les polynômes sont non-commutatifs.

*A. Froda.*

**Turpin, Maurice: Équation de Monge-Ampère à trois variables.** *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 60—62 (1959).

Une équation aux dérivées partielles du second ordre, à trois variables indépendantes  $x_i$ ,  $F = 0$ , linéaire en les mineurs de la matrice hessienne  $Z = (\partial^2 z / \partial x_i \partial x_j)$ , est dite de Monge-Ampère, lorsque  $F$  est de la forme  $|A + BZ|$ , où  $A, B$  désignent deux matrices, d'ordre trois, dont les éléments sont fonctions des seuls éléments de contact de premier ordre ( $x, z, p = \partial z / \partial x$ ). L'A. considère le cas où ces fonctions sont analytiques et applique la méthode des systèmes en involution de E. Cartan.

*Th. Lepage.*

**Campbell, L. Lorne: Solution of a mixed problem for a hyperbolic differential equation by Riemann's method.** *Acta math.* **100**, 23—43 (1958).

This paper is based on part of a thesis presented by the author to the University of Toronto. It deals with a mixed problem concerning the hyperbolic partial differential equation

$$L(u) \equiv \sum_{k,j=0}^n \frac{k!}{j!(k-j)!} A_{kj}(x, y) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = a_0(x, y)$$

where

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} A_{nk} \xi^{n-k} \eta^k = \prod_{j=1}^n (p^j \xi + q^j \eta)$$

and  $q^\sigma(x, 0)/p^\sigma(x, 0) < 0$  for  $\sigma = 1, \dots, n-K$ ,  $q^\tau(x, 0)/p^\tau(x, 0) > 0$  for  $\tau = n-K+1, \dots, n$ , the  $p^i$ 's and  $q^i$ 's being real and such that if  $i \neq j$ ,  $p^i q^j - p^j q^i \neq 0$ . The boundary conditions are as follows: on the segment  $I$ : ( $0 \leq y \leq a$ )  $u$  and its first  $n-1$  partial derivatives with respect to  $x$  are given; on  $B$ : ( $0 \leq x \leq c$ ) the values of  $K$  of the quantities  $u, \partial u / \partial y, \dots, \partial^{n-1} u / \partial y^{n-1}$  are given. The method of the author is an extension of that of Hadamard [*Bull. Soc. math. France* **31**, 208—214 (1903), and **32**, 242—268 (1904)] and Rellich [*Math. Ann.* **103**, 249—278 (1930)]:  $M$  denoting the operator adjoint to  $L$ , there is a Green's formula:

$$\iint_G [v L(u) - u M(v)] dx dy = \int_\Gamma U dx + V dy$$

where  $G$  stands for a closed region of the plane with the boundary  $\Gamma$ . The expressions of  $U$  and of  $V$  are complicated. Now there exists a region  $R$  of the first quadrant of the plane such that if  $P \in R$  it is possible to draw the  $n$  characteristics through  $P$

in the direction of the decreasing  $x$  so that they remain in  $R$ . One obtains, in this manner, a closed region  $G$  consisting of the extreme characteristics  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  issuing from  $P$  and of the segments of origin  $O$  whose extremities are on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  respectively. This region is subdivided into subregions by the other characteristics: among them  $K$  intersect  $I$  and the others intersect  $B$  at points from which new characteristics issue which must also be drawn in the direction of the decreasing  $x$  until they meet  $I$ . Thus a net of subregions is determined, each one bounded by arcs of characteristics, or segments lying on  $I$  or  $B$ . The right hand member of Green's formula is known when its value for every-one of the arcs of characteristics just mentioned is known. Now  $v$  must be suitably determined: it must be such that  $M(v) = 0$  in  $G$  and it must vanish, along with its derivatives of order  $< n - 2$ , on the boundary of  $G$ . Further in the interior of  $G$ , the same quantities must be continuous everywhere. There are also other conditions which make it possible to apply results due to Rellich. It is then shown that the right hand member of the Green formula, as far as each arc of characteristic is concerned, can be calculated by means of expressions due to Rellich (op. cit.). The contribution of each arc is the difference between the values of one of these expressions at the extremities of the arc. In particular the contributions due to interior points have a sum which vanishes. Under the conditions imposed on  $v$  an existence theorem may be proved for this function. The proof is only outlined in this paper and will be found in the author's thesis. The existence of such a function, the calculation of the line integrals by the method of Rellich, and Green's formula yield, in the usual manner, the value of  $u$  at  $P$ . *C. Racine.*

**Protter, M. H.:** A maximum principle for hyperbolic equations in a neighborhood of an initial line. Trans. Amer. math. Soc. 87, 119—129 (1958).

Per l'equazione iperbolica

$$(') \quad Lu \equiv (a u_x)_x - (b u_y)_y + c u_x + d u_y + f u = 0, \quad a > 0, b > 0,$$

l'A. stabilisce un principio di massimo (Theorem 1) diverso da quello di H. Weinberger (questo Zbl. 72, 100) provando che, detto  $T$  un triangolo mistilineo limitato da un segmento  $AB$  dell'asse  $x$  e dagli archi di caratteristiche  $AC$ ,  $BC$  nel semipiano  $y > 0$ , esiste una costante  $y_0 > 0$  tale che per certe classi di soluzioni  $u$  della  $(')$  il massimo della  $u$  nella parte di  $T$  in cui è  $0 \leq y \leq y_0$  viene assunto su  $AB$ . In genere  $y_0$  è minore dell'ordinata del punto  $C$ . Il risultato sussiste anche nel caso singolare  $a(x, 0) = 0$ , mentre sono necessarie modifiche nel caso, pure singolare,  $b(x, 0) = 0$  (Theorem 2). Applicazioni sono fatte alle equazioni differenziali ordinarie lineari autoaggiunte del 2° ordine ottenendo valutazioni della distanza fra gli zeri delle soluzioni. *R. Conti.*

**Wang, Guang-ying:** The Goursat problems in space. Science Record, n. Ser. 1, 283—286 (1957).

Nello spazio euclideo  $(x, y, t)$  sia  $D$  il dominio limitato dalle tre superficie  $x^2 + y^2 = (t + \varepsilon)^2$ ,  $0 \leq \varepsilon < 1$ ,  $x^2 + y^2 = (t - 1)^2$ ,  $t = 0$  e siano rispettivamente  $S_1^e, S_2, S_3$  i pezzi di tali superficie che formano la frontiera di  $D$ . L'A. prova che assegnate due funzioni  $\sigma(x, y), \tau(x, y)$  dotate di derivate prime continue è unica in  $D$  la soluzione  $u$  dell'equazione delle onde  $u_{xx} + u_{yy} = u_{tt}$  soddisfacente una delle seguenti condizioni ai limiti (1)  $u = \tau$  su  $S_3$ ,  $u = \sigma$  su  $S_2$ ; (2)  $u = \tau$  su  $S_3$ ,  $u = \sigma$  su  $S_1^e$ ; (3)  $\partial u / \partial t = \tau$  su  $S_3$ ,  $u = \sigma$  su  $S_2$ ; (4)  $\partial u / \partial t = \tau$  su  $S_3$ ,  $u = \sigma$  su  $S_1^e$  purchè nei casi (2) e (4) sia  $\varepsilon > 0$ . *R. Conti.*

**Tong, Kwang-chang:** On a boundary value problem for the wave equation. Science Record, n. Ser. 1, 277—278 (1957).

L'A. prova mediante un esempio che, contrariamente a quanto asserito da M. H. Protter (questo Zbl. 55, 325), il problema (2) del Wang (v. la recensione precedente) ammette più d'una soluzione se  $\varepsilon = 0$ . *R. Conti.*

**Albertoni, Sergio:** Su un problema di propagazione con autovalori per l'equazione del calore. *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend., Sci. mat. fis. chim. geol., Ser. A* 92, 206—216 (1958).

Si da un teorema di esistenza ed unicità, in un dominio  $D + \sigma$ , essendo  $\sigma$  una superficie semplice chiusa di classe 2, per le soluzioni regolari del sistema

$$(1) \quad q_u = \Delta q + q(u_T, P), \quad q(0, P) = f(P), \quad P \in D; \quad q(u, P_\sigma) = 0,$$

con  $f(P)$  continua in  $D + \sigma$  ed  $u_T > 0$  valore particolare fisso della variabile  $u$ . Con l'uso della funzione di Green, il problema viene ricondotto a risolvere una equazione integrale di Fredholm per  $q(u_T, P)$  e quindi ad un problema di autovalori. Essendo poco agevole lo studio diretto della equazione integrale in  $q(u_T, P)$ , si dà della sua soluzione una espressione in serie di autofunzioni, che permette di mettere in evidenza la possibilità di una dimensione critica per il dominio  $D$ . Il comportamento della serie viene precisato nel caso in cui  $f(P)$  è regolare. L'A. esprime poi la  $q(u, P)$  anche come somma di due convenienti potenziali di volume relativi al dominio  $D$ , il che gli permette una nuova e forse più semplice verifica di (1). La questione trattata trae origine da un problema di diffusione neutronica convenientemente schematizzato.

*G. Sestini.*

**Pagni, Mauro:** Teoremi di unicità e di completezza relativi ad un problema misto tipico per l'equazione del calore. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 28, 31—39 (1958).

Riccollegandosi ad una precedente memoria (cfr. questo Zbl. 78, 276) e con metodo del tutto analogo, si stabilisce un teorema di unicità per un problema al contorno per l'equazione  $\Delta U - U_t = f(x, y, t)$  in un dominio  $D$  (cilindrico o da questo ottenuto con opportuna deformazione continua) quando sulla base inferiore e su di una parte della superficie laterale di  $D$  è assegnata la  $U$ , mentre sull'altra parte della superficie laterale di  $D$  è assegnata una combinazione lineare della  $U$  e della sua derivata obliqua regolare (problema misto). Dal teorema di unicità, in base a risultati della precedente memoria, seguono teoremi di completezza per alcuni sistemi di funzioni.

*G. Sestini.*

**Rosenbloom, P. C. and D. V. Widder:** A temperature function which vanishes initially. *Amer. math. Monthly* 65, 607—609 (1958).

Si fornisce in forma esplicita un esempio di soluzione dell'equazione del calore:  $U_{xx} = U_t$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t > 0$ , regolare in tutto il piano, nulla per  $t = 0$  e non identicamente nulla.

*G. Sestini.*

**Kampé de Fériet, Joseph:** Équation de la chaleur et polynômes d'Hermite. *C. r. Acad. Sci., Paris* 248, 883—887 (1959).

L'A. rileva l'importanza dell'introduzione dei polinomi di Hermite per la determinazione di integrali regolari dell'equazione unidimensionale del calore:  $U_{xx} = U_t$ , come serie degli stessi polinomi. Operando negli spazi astratti l'A. dimostra alcuni teoremi atti a mettere in evidenza, tra l'altro, il dominio di esistenza degli integrali dell'equazione considerata.

*G. Sestini.*

**Ruoff, Arthur L.:** An alternate solution of Stefan's problem. *Quart. appl. Math.* 16, 197—201 (1958).

Mediante un cambiamento di variabile l'A. esprime assai semplicemente la soluzione di classici problemi unidimensionali del tipo di Stefan, ritrovando le note soluzioni di Neumann e dello stesso Stefan.

*G. Sestini.*

**Mann, W. Robert:** Equivalent nonlinear problems. *J. Elisha Mitchell sci. Soc.* 74, 114—116 (1958).

Se  $u(x, t)$ , ( $x > 0$ ,  $t > 0$ ), è soluzioni dell'equazione lineare  $u_t = u_{xx}$  e soddisfa alle condizione non lineari:

$$u(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = -h(u(0, t) + (e-1)^{-1}k)(1 - \log(1 + (e-1)k^{-1}u(0, t))), \\ |u(x, t)| < M, \quad \text{allora } v(x, t) = k \log(1 + (e-1)k^{-1}u(x, t)) \text{ è soluzione dell'equa-}$$



zione non lineare  $v_t = v_{xx} + k^{-1} v_x^2$  e soddisfa alle condizioni lineari  
 $v(x, 0) = 0$ ,  $v_x(0, t) = -h(k - v(0, t))$ ,  $|v(x, t)| < k \log(1 + (e - 1)k^{-1}M)$ ,  
 e viceversa. Vengono inoltre stabiliti altri risultati dello stesso tipo anche per  
 l'equazione  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .  
*E. Gagliardo.*

**Prudnikov, A. P.:** The solution of a mixed boundary problem in the thermodiffu-  
 sion theory. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 249—251 (1957) [Russisch].

L'A. considère le système d'équations

$$(1) \quad \partial u_1 / \partial t = a_1 \partial^2 u_1 / \partial x^2 + b_1 \partial u_2 / \partial t; \quad \partial u_2 / \partial t = a_2 \partial^2 u_2 / \partial x^2 + b_2 \partial u_1 / \partial t \\ (a_1 + b_1 b_2 + a_2)^2 \neq 4 a_1 a_2,$$

dont il cherche une solution qui vérifie les conditions initiales

$$(2) \quad u_i(x, 0) = f_i(x), \quad 0 < x < l,$$

et les conditions aux limites

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11} u_1(0, t) + a_{12} u_2(0, t) + a_{13} \partial u_1(0, t) / \partial x + a_{14} \partial u_2(0, t) / \partial x = \chi_1(t) \\ a_{21} u_1(0, t) + a_{22} u_2(0, t) + a_{23} \partial u_1(0, t) / \partial x + a_{24} \partial u_2(0, t) / \partial x = \chi_2(t) \\ a_{31} u_1(l, t) + a_{32} u_2(l, t) + a_{33} \partial u_1(l, t) / \partial x + a_{34} \partial u_2(l, t) / \partial x = \chi_3(t) \\ a_{41} u_1(l, t) + a_{42} u_2(l, t) + a_{43} \partial u_1(l, t) / \partial x + a_{44} \partial u_2(l, t) / \partial x = \chi_4(t) \end{cases}$$

$a_i, b_i, a_{kl}$  étant des constantes et  $f_i(x), \chi_k(t)$   $i = 1, 2; k, l = 1, 2, 3, 4$  des fonctions  
 bornées et intégrables de  $x \in ]0, l[$  et de  $t \in R_+$ . Pour ce faire, il suppose les fonctions  
 inconnues (4)  $u_i(0, t) = \varphi_i(t)$ ,  $u_i(l, t) = \psi_i(t)$  comme étant données, et résoud,  
 au préalable, le problème (1), (2), (4) à l'aide de la transformation mixte de Fourier  
 et de Laplace. Il trouve ainsi pour solution:

$$(5) \quad u_i(x, t) = \sum_{s,j}^{1,2} (A_{sj}^i V_{sj} + B_{sj}^i W_{sj})$$

où:  $A_{sj}^i, B_{sj}^i$ , sont des constantes,

$$V_{sj} = -\frac{1}{l} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_3 \left[ \frac{x}{2l}, \frac{\mu_s(t-\tau)}{l^2} \right] \varphi_j(\tau) d\tau + \frac{1}{l} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_3 \left[ \frac{l-x}{2l}, \frac{\mu_s(t-\tau)}{l^2} \right] \psi_j(\tau) d\tau;$$

$$W_{sj} = \frac{1}{2l} \int_0^t \left\{ \vartheta_3 \left[ \frac{x-\xi}{2l}, \frac{\mu_s t}{l^2} \right] - \vartheta_3 \left[ \frac{x+\xi}{2l}, \frac{\mu_s \tau}{l^2} \right] \right\} f_j(\xi) d\xi$$

$\mu_s, (s = 1, 2)$ , étant des constantes dépendant des  $a_i, b_i$ ; et

$$\vartheta_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(x+n)^2}{t} \right).$$

Il détermine ensuite les  $\varphi_j, \psi_j$  ( $j = 1, 2$ ) à l'aide d'un système d'équations intégrales  
 du type Volterra.  
*S. Vasilache.*

**Nickel, K.:** Die äußere Randbedingung der Grenzsicht-Differentialgleichung.  
 Z. angew. Math. Mech. 38, 400—401 (1958).

Es werden folgende Voraussetzungen gemacht (mit den üblichen Bezeichnungen):

1. Es sei  $U(x)$  auf  $\langle x_0, x_1 \rangle$  erklärt, stetig und stückweise stetig differenzierbar,  
 sowie  $U(x) \geq U > 0$ ;  $v_0(x)$  sei dort erklärt und stückweise stetig. 2. Die Funk-  
 tion  $u(x, y)$  sei für  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $0 \leq y < \infty$  erklärt und stetig, weiter gelte  
 $u(x, y) > 0$  für  $y > 0$ . Die partiellen Ableitungen  $u_y$  und  $u_{yy}$  mögen für  $x_0 \leq$   
 $\leq x \leq x_1$ ,  $0 \leq y < \infty$  existieren, ferner gebe es im Intervall  $\langle x_0, x_1 \rangle$  eine Zerlegung  
 $x_0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = x_1$  derart, daß  $u_x$  in jedem Streifen  $\alpha_i \leq x \leq \alpha_{i+1}$ ,  
 $0 \leq y < \infty$  existiert und stetig ist. 3. Die Funktion  $u(x, y)$  möge zusammen mit

$v(x, y) = v_0(x) - \int_0^y u_x(x, t) dt$  der Gleichung  $u u_x + v u_y = U U' + v u_{yy}$  ge-

nügen. 4. Für  $x = x_0$  sei  $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x_0, y) = U(x_0)$ ; weiter sei  $\int_0^\infty u(x, y) dy = \infty$

und schließlich gelte auf der Strecke  $x_0 \leq x \leq x_1$  gleichmäßig die Relation

$\lim_{y \rightarrow \infty} u_{yy}(x, y) = 0$ . Dann ist die Randbedingung  $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U(x)$  gleichmäßig für alle  $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$  erfüllt.

Dan Gh. Ionescu.

Hörmander, Lars: On the regularity of the solutions of boundary problems. Acta math. 99, 225—264 (1958).

Data un'equazione alle derivate parziali, lineare, a coefficienti costanti, ipoellittica [ellittica] (cfr. Hörmander, questo Zbl. 67, 322) si studia il problema di caratterizzare le condizioni al contorno, lineari a coefficienti costanti, a cui corrispondono soluzioni indefinitamente derivabili [analitiche]. Sia  $G$  uno spazio vettoriale reale ad  $n$  dimensioni,  $G^*$  il suo duale complesso,  $P(\zeta)$ , ( $\zeta \equiv \zeta^1, \dots, \zeta^n$ ) un polinomio in  $G^*$ ,  $P(D)$  l'operatore differenziale ottenuto sostituendo  $-i \partial/\partial x^k$  a  $\zeta^k$ ,  $\Omega$  un aperto di  $G$ ,  $\omega$  una porzione della frontiera di  $\Omega$  situata su un iperpiano  $F$ ,  $N$  la normale ad  $F$  (penetrante in  $\Omega$ ),  $\dot{\zeta} \in F^*$  la restrizione ad  $F$  di  $\zeta \in G^*$ . Supponiamo che  $\text{Imm } \dot{\zeta} \rightarrow \infty$  se  $\zeta \rightarrow \infty$  su  $P(\dot{\zeta}) = 0$  (cioè  $P(D)$  sia ipoellittico). Sia  $\mu$  il numero delle soluzioni  $\tau$  di  $P(\dot{\zeta} + \tau N) = 0$  ( $\dot{\zeta}$  reale) con parte immaginaria positiva, per ogni  $\dot{\zeta}$  fuori di un compatto (se  $n > 2$  un tale  $\mu$  esiste sempre). Sia  $A$  l'insieme degli  $\dot{\zeta} \in G^*$  tali che  $P(\dot{\zeta} + \tau N) = 0$  ha precisamente  $\mu$  radici con parte immaginaria positiva  $\tau_1, \dots, \tau_\mu$ , e nessuna reale, e sia  $A'$  la proiezione di  $A$  su  $F^*$ . Siano  $Q_i(D)$ , ( $i = 1, \dots, \mu$ ),  $\mu$  operatori a coefficienti costanti,  $k$  l'ordine massimo di  $P(D)$ ,  $Q_i(D)$ . Poniamo:

$$C(\dot{\zeta}) = \det Q_i(\dot{\zeta} + \tau_j N) \prod_{i < j} (\tau_j - \tau_i)^{-1}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè  $u$ , soluzione del problema:  $P(D)u = 0$  in  $\Omega$  (con  $P$  ipoellittico [ellittico]),  $Q_i(D)u = 0$  su  $\omega$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ), continua in  $\Omega \cup \omega$  con le derivate d'ordine  $\leq k$ , sia indefinitamente derivabile [analitica] in  $\Omega \cup \omega$  è che:

$$\text{Imm } \dot{\zeta} \rightarrow \infty \text{ se } \dot{\zeta} \rightarrow \infty \text{ su } A' \text{ con } C(\dot{\zeta}) = 0$$

$$[C(\dot{\zeta}) \neq 0 \text{ se } |\text{Re } \dot{\zeta}| \geq \text{cost} (1 + |\text{Imm } \dot{\zeta}|)]. \quad E. \text{ Gagliardo.}$$

Chou, Čuñ-i: Das Dirichletproblem für eine Klasse linearer elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit parabolischer Ausartung auf dem Rande des Gebiets. Science Record, n. Ser. 2, 244—249 (1958) [Russisch].

Betrachtet wird die Differentialgleichung

(1)  $L(u) \equiv y^m \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial x^2 + a(x, y) \partial u / \partial y + b(x, y) \partial u / \partial x + c(x, y) u = 0$  im Gebiete  $D$ , welches von einem in der oberen Halbebene  $y > 0$  liegenden einfachen glatten Bogen  $\sigma$  mit Enden in den Punkten  $A$  und  $B$  und von der Strecke  $AB$  sowie der Achse  $y = 0$  begrenzt ist;  $\sigma$  und  $AB$  haben dabei keine anderen gemeinsamen Punkte als  $A$  und  $B$ . Mit  $\Gamma = \sigma + AB$  wird  $\bar{D} = D + \Gamma$  gesetzt. In (1) bedeuten  $a, b, c$  analytische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $x$  und  $y$  und es sei  $c \leq 0$ . Es wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt, daß  $y < 1$  in  $D$  ist. Mit

$$w(x, y) = \int_y^1 \exp \int_t^1 a(x, r) r^{-m} dr dt$$

wird bewiesen: Falls  $1 < m < \frac{3}{2}$  und  $a(x, 0) > 0$  ist, so existiert für eine beliebige, auf  $D$  definierte und stetige Funktion  $f$  eine einzige Lösung  $u(x, y)$  der Gleichung (1), die der Bedingung (2)  $\lim_{(x, y) \rightarrow \Gamma} \frac{u(x, y)}{w(x, y)} = f$  genügt. Wenn  $a(x, 0)$  eine positive Konstante ist, so hat für  $\frac{3}{2} \leq m < 2$  die Aufgabe von Dirichlet für die Gleichung (1) bei  $\lim_{(x, y) \rightarrow \Gamma} \frac{u(x, y)}{w(x, y)} = f$  eine einzige Lösung  $u(x, y)$ . Es wird die folgende

Behauptung ausgesprochen: Es sei  $A^*$  die Menge derjenigen Punkte der Strecke  $AB$ , in welchen  $a(x, 0) > 0$  ist, und es sei  $B^* = AB - A^*$ . Wenn  $1 < m < \frac{3}{2}$  oder  $\frac{3}{2} \leq m < 2$  und  $a(x, 0)$  eine Konstante auf  $A^*$  ist, die Funktion  $u(x, y)$

eine Lösung der Gleichung (1) in  $D$ , und ihre Grenzwerte auf  $\sigma + B^*$  stetig sind, und wenn  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{u}{w} = 0$  auf  $A^*$  gilt, so ist eine solche Lösung in  $D$  beschränkt, und durch stetige Angabe auf  $\sigma + B^*$  eindeutig bestimmt. Es wird gezeigt, daß der Beweis dieser Behauptung vollständig analog demjenigen des Satzes 2 in der Arbeit von S. A. Tersenov, Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 670—673 (1957) ist.

*Iw. Tschobanow.*

**Wolska-Bochenek, J.:** Un problème aux limites à dérivée tangentielle pour l'équation du type elliptique. Ann. Polon. math. 4, 275—287 (1958).

This paper proves an existence theorem in the case of the following problem:  $D$  denoting a domain in the euclidean plane, bounded by a Jordan curve with continuously turning tangent,  $C$  say, the angle between tangents at two points of  $C$  satisfying a Hölder condition, one is required to determine a solution to the equation

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = F(x, y, u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y)$$

which, twice differentiable in  $D$ , satisfies on  $C$  the condition

$$du/dn + a(s)u = \Phi(s, u, du/ds), \quad s \in C.$$

$F$  is Hölder-continuous in all its arguments;  $a(s)$  is Hölder-continuous on  $C$ .  $\Phi$  is Hölder-continuous with regard to  $s$  and  $u$  and Lipschitz-continuous with regard to its third argument on  $C$ . The solution to this problem is obtained by a straightforward application of Schauder's fixed point theorem. Let  $G_A(\rho)$  — resp.  $G'_A(\rho')$  — denote the logarithmic potential at  $A$  due to a spread of density  $\rho$  in  $D$  — resp. to a spread of density  $\rho'$  on  $C$ ; let  $A$  and  $B$  denote points in  $\bar{D}$ ,  $s$  and  $\sigma$  points on  $C$ ; let  $\varphi$  denote the angle between the chord joining  $s$  to  $\sigma$  and the tangent at  $s$  ( $C$  being oriented anticlockwise). Let  $F_B$  stand for  $F(B, u(B), v(B), w(B))$ . The author reduces the problem to finding a solution to the following integro-differential system:

$$u(A) = G_A(F_B) + G'_A(\mu(\sigma)), \quad v(A) = \partial u(A) / \partial x, \quad w(A) = \partial u(A) / \partial y,$$

$$- \pi \mu(s) + \int_C \frac{\sin \varphi}{|s\sigma|} \mu(\sigma) d\sigma + a(s)G'_s(\mu(s)) = \Phi\left(s, u(s), \frac{du(s)}{ds}\right) - \frac{d}{dn} G_s(F_B) - a(s)G'_s(F_B);$$

$|s\sigma|$ : euclidean distance from  $s$  of  $\sigma$ . Classical propositions about estimates of logarithmic potentials and certain assumptions about inequalities to be satisfied by the constants introduced by these estimates show that the mapping

$$\bar{u}(A) = G_A(F_B) + G'_A(\mu(\sigma)), \quad \bar{v}(A) = \partial u(A) / \partial x, \quad \bar{w}(A) = \partial u(A) / \partial y,$$

$$- \pi \mu(s) + \int_C \frac{\sin \varphi}{|s\sigma|} \bar{\mu}(\sigma) d\sigma + a(s)G'_s(\bar{\mu}(s)) = \Phi\left(s, u(s), \frac{du(s)}{ds}\right) - \frac{d}{dn} G_s(F_B) - a(s)G'_s(F_B)$$

maps a convex domain of the function space  $(u, v, w, \mu)$ , turned into a Banach space by imposing on it the norm

$$\sup |u| + \sup |v| + \sup |w| + \sup |\mu|,$$

into itself, the mapping being completely continuous.

*C. Racine.*

**Hong, Imsik:** A supplement to "On an eigenvalue and eigenfunction problem of the equation  $\Delta u + \lambda u = 0$ ". Kōdai math. Sem. Reports 10, 27—37 (1958).

The author proves the following theorem [which is a generalization of a former paper (cf. this Zbl. 80, 81)]: Let  $D$  be a bounded connected plane domain and  $C$  its boundary. Let  $D_n$  be a sequence of domains exhausting  $D$ ,  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$ , such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = D$ , and the boundary  $C_n$  consists of a finite number of smooth curves.

Let  $\lambda_{k,n}$  and  $u_{k,n}$  be the  $k$ -th eigenvalue and  $k$ -th eigenfunction, of the problem

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } D_n \\ u = 0 & \text{on } C_n \\ \iint_{D_n} u_{k,n}^2 d\sigma = 1. \end{cases}$$



Then  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k,n} = \lambda_k$  exists independently from the choice of an exhausting sequence and for any infinite subsequence  $\{u_{k,n'}\}$  of the sequence  $\{u_{k,n}\}$  there exists a uniformly convergent subsequence  $\{u_{k,n''}\}$ .  $u_k$  and  $\lambda_k$  satisfy  $\Delta u_k + \lambda_k u_k = 0$  in  $D$  with  $u_k = 0$  on the boundary of  $D$  except at most for the exceptional points of the ordinary Green's function for the same domain. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k-1,n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k,n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k+1,n}$$

then  $u_k$  is determined independently of the choice of exhausting sequence. If

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k-v-1,n} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k-v,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k-v+1,n} = \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k-v+m'-1,n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k-v+m,n} \end{aligned}$$

then  $u_k$  depends on the choice of an infinite subsequence of  $\{u_{k,n}\}$ . But among all possible limit functions  $u_k$  there exist only  $m$  linearly independent  $u_k$ . The author remarks that the 2-dimensional theorem can be extended to a 3-dimensional case. Two examples are given. M. Nedelcu.

**Weston, Vaughan H.:** Solutions of the Helmholtz equation for a class of non-separable cylindrical and rotational coordinate systems. Quart. appl. Math. 15, 420—427 (1958).

Eine bekannte Methode zur Konstruktion von Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  im dreidimensionalen Raum ist die von Bernoulli angegebene, bei welcher die Lösung als Produkt aus drei Funktionen dargestellt wird, so daß jeder der Faktoren nur von einer der unabhängigen Veränderlichen abhängt. In Verallgemeinerung dieser Konstruktion ergeben sich durch Einführung von Zylinder- oder Rotationskoordinaten Lösungen, die sich als ein Produkt aus zwei Funktionen darstellen lassen, bei welchem der eine Faktor nur von einer der Veränderlichen abhängt, der andere von den übrigen zwei, wobei der zweite Faktor einer linearen partiellen Differentialgleichung in zwei Veränderlichen genügt. Es werden Klassen von Koordinatentransformationen der oben erwähnten Art angegeben, bei denen Lösungen der sich ergebenden partiellen Differentialgleichung in zwei Veränderlichen aus einer rekurrenten Folge von gewöhnlichen Differentialgleichungen gefunden werden können. Jede Differentialgleichung einer solchen Folge ist elementar integrierbar. In einer an den Schluß der Arbeit angehängten Tabelle sind verschiedene Transformationen aufgeführt, mit deren Hilfe sich Lösungen von  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  auf dem oben beschriebenen Wege konstruieren lassen. W. Quade.

**Osserman, Robert:** On the inequality  $\Delta u \geq f(u)$ . Pacific J. Math. 7, 1641—1647 (1957).

In der Differentialgleichung  $\Delta u = f(u)$ ,  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ , sei  $f(t)$  positiv, stetig und monoton wachsend für  $t \geq t_0$ . Weiter gelte  $\int_0^t \left( \int_0^\tau f(\tau) d\tau \right)^{-1/2} dt < \infty$ . Dann kann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u$  nicht für alle  $x$ , die  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq R^2$  genügen, die Ungleichung  $\Delta u \geq f(u)$  erfüllen. Der Beweis gründet sich auf drei Hilfssätze über das Verhalten der Lösungen von  $y''(x) + \frac{n-1}{x} y'(x) = f(y)$ . Aus dem Resultat folgt: Eine mit einer Riemannschen Metrik ausgestattete einfach zusammenhängende Fläche  $S$  der Gaußschen Krümmung  $K \leq -\varepsilon < 0$  ist dem Inneren eines Kreises konform äquivalent. H. Wittich.

**Ohtsuka, Makoto:** Les relations entre certains principes en théorie du potentiel. Proc. Japan. Acad. 33, 37—40 (1957).

L'A. considère en espace localement compact  $\Omega$  un noyau  $\Phi(P, Q)$  continu ( $-\infty < \Phi \leq +\infty$ ), fini si  $P \neq Q$  et le potentiel  $U^\mu = \int \Phi(P, Q) d\mu(Q)$  ( $\mu \geq 0$  à support compact  $S_\mu$ ). Il rappelle ou précise 9 principes: principe classique du maximum de Frostman, plusieurs formes affaiblies de Uğaheri et Choquet, des formes plus ou moins fortes d'un principe de limitation supérieure (par ex., si  $\sup_{S_\mu} < +\infty$ , de même  $\sup_\Omega$ ) et le principe de continuité (si la restriction de  $U^\mu$  à  $S_\mu$  est finie continue,  $U^\mu$  est fini continu dans  $\Omega$ ). L'A. rappelle les relations connues et les complète un peu, résumant le tout dans un schéma d'implications et non-implications.

M. Brelot.

**Bauer, Heinz:** Un problème de Dirichlet pour la frontière de Šilov d'un espace compact. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 843—846 (1958).

On considère un espace compact  $X$ , un sous espace  $H_0$  de l'espace  $C(X)$  (des fonctions réelles finies continues sur  $X$ ), contenant 1 et séparant les points de  $X$ . La frontière de Šilov est la partie compacte minima  $X^*$  de  $X$  telle que toute fonction de  $H_0$  atteigne sa borne inférieure en un point de cette partie. On la retrouve à l'aide de la notion de point  $H_0$ -extrémal (tel que la masse 1 en  $s$  soit la seule mesure  $\mu \geq 0$  satisfaisant à  $h(s) = \int h d\mu$  quel que soit  $h \in H_0$ ). Une mesure harmonique relative à  $s$  est une mesure  $\mu^s \geq 0$  sur  $X^*$  telle que  $h(s) = \int h d\mu^s$  pour tout  $h \in H_0$ ;  $h \in C(X)$  est dite harmonique si  $h(s) = \int h d\mu^s$  quel que soit  $\mu^s$ . Le problème de Dirichlet recherche si  $f \in C(X^*)$  est résolutive, c. à d. prolongeable harmoniquement. Etude de cette notion. Les fonctions de  $C(X^*)$  sont toutes résolutives si et seulement si l'ensemble  $H$  des fonctions harmoniques est un treillis. Application à la caractérisation comme simplexe d'une partie convexe compacte d'un espace vectoriel réel. Application au problème classique de Dirichlet pour  $\Omega$  ouvert relativement compact (avec  $X = \bar{\Omega}$ ,  $H_0$  ensemble des fonctions qui sont harmoniques dans  $\Omega$ ); les points réguliers sont les points  $H_0$ -extrémaux; le prolongement harmonique de toute donnée finie continue équivaut à:  $H_0$  treillis et ensemble des points réguliers partout dense sur la frontière. Aucune démonstration n'est donnée.

M. Brelot.

**Migliau, Maria Giovanna:** Sui problemi di Dirichlet e di Neumann per una semiellisse. Ricerche Mat. 6, 49—66 (1957).

L'A. dà le formule risolutive per i problemi di Dirichlet e Neumann relativi all'equazione di Laplace e ad un dominio piano semiellittico. Mediante una trasformazione conforme lo studio è ricondotto a problemi al contorno per una semicorona circolare. Con l'introduzione di coordinate polari le soluzioni sono espresse in serie di Fourier rispetto all'anomalia ed i coefficienti di tali serie, dipendenti dal raggio, sono esplicitamente determinati analogamente a come già è stato fatto da A. Ghizzetti per i domini ellittici (questo Zbl. 42, 337).

C. Pucci.

**Lowdenslager, David B.:** Potential theory in bounded symmetric homogeneous complex domains. Ann. of Math., II. Ser. 67, 467—484 (1958).

Soit  $G$  un groupe compact agissant sur l'espace de Hausdorff  $X$ , laissant  $x$  invariant et agissant transitivement sur un sous-ensemble  $B$ . Si  $F$  est un espace vectoriel de fonctions continues réelles, invariant par  $G$  et contenant les constantes, si l'on a

$$|f(x)| \leq \max_{b \in B} |f(b)|$$

pour toute  $f \in F$ , alors on a la représentation intégrale

$$f(x) = \int_B f(b) db = \int_G f(gb) dg$$

en utilisant l'intégrale de Haar. On précise cette représentation en l'appliquant aux fonctions harmoniques dans des domaines homogènes, le laplacien étant formé à

partir du  $ds^2$  invariant. Une formule de Poisson est donnée pour le domaine, tube dans  $C^n(x_k + i y_k)$ , défini par

$$y_n > (y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2)^{1/2}, \quad -\infty < x_k < +\infty.$$

L'ensemble  $B$  y joue le rôle de „frontière distinguée“ quand le domaine homogène est d'un type non dégénéré. Si  $f$  est une donnée continue sur  $B$ , il existe dans le domaine une solution de  $\Delta u = 0$ , tendant vers  $f$  quand on s'approche sur certains chemins d'un point de  $B$ . P. Lelong.

**Górski, J.:** Distributions restreintes des points extrémaux liés aux ensembles dans l'espace. Ann. Polon. math. 4, 325—339 (1958).

Dans l'espace à 3 dimensions soit donnée la somme  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_p$  de  $p$  continus disjoints bornés  $E_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , constituant la frontière d'un domaine non borné  $D_\infty$ . Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$   $p$  nombres entiers positifs fixés,  $n = 1, 2, \dots$ , et  $Q^{(N)}$  un système quelconque de  $N = N(n) = n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)$  points  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  de l'ensemble  $E$  normé de manière que précisément  $n\alpha_k$  des points du système soient situés dans  $E_k$  pour chaque  $k = 1, 2, \dots, p$ . Parmi tous les systèmes normés  $Q^{(N)}$  il existe au moins un système  $P^{(N)} = \{P_1^{(N)}, P_2^{(N)}, \dots, P_N^{(N)}\}$  extrémal, c'est-à-dire remplissant quel que soit  $Q^{(N)}$  la condition

$$\sum_{1 \leq i < k \leq N} \frac{1}{|P_i^{(N)} P_k^{(N)}|} \leq \sum_{1 \leq i < k \leq N} \frac{1}{|Q_i Q_k|}$$

où  $|Q_i Q_k|$  est la distance cartésienne de  $Q_i$  à  $Q_k$ . Les points du système  $P^{(N)}$  sont dits points extrémaux du rang  $N$  correspondant à la distribution restreinte  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ . Posons

$$v_N(E) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{1 \leq i < k \leq N} \frac{1}{|P_i^{(N)} P_k^{(N)}|}, \quad u_N(P) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{|P P_i^{(N)}|},$$

où  $P$  est un point variable dans l'espace, et soit  $\mu_N(e)$  la fonction d'ensemble définie par la formule  $\mu_N(e) = k/N$  lorsque l'ensemble  $e$ , contient précisément  $k$  points du système extrémal  $P^{(N)}$ . Par suite  $0 \leq \mu_N(e) \leq 1$  quel que soit  $e$  et  $N$ . Désignons encore par  $\mu = \mu(e)$  la limite d'une suite partielle convergente de  $\{\mu_N(e)\}$ . Le but principal du travail est l'étude des suites  $\{v_N(E)\}$ ,  $\{\mu_N(e)\}$  et  $\{u_N(P)\}$ . En étendant un résultat de F. Leja (ce Zbl. 72, 111) concernant le plan l'A. démontre entre autres l'existence des limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_N(E) = v(E), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_N(e) = \mu(e)$$

et si  $v(E) > 0$  et le point  $P$  est situé en dehors de l'ensemble  $E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_N(P) = u(P) = \int_E \frac{1}{|P Q|} d\mu_Q.$$

L'A. étudie aussi plusieurs propriétés de la fonction limite  $u(P)$ . F. Leja.

**Bergman, Stefan:** Applications of function theoretical methods in the study of harmonic functions and vectors of three variables. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/2, 10 p. (1958).

Mit Hilfe des Whittaker-Bergman-Operators  $B_3(f) = (2\pi i)^{-1} \oint_C f(u, \zeta) \zeta^{-1} d\zeta$  [ $f$  analytisch in  $\zeta$  und  $u = x + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}$ ;  $Z = \frac{1}{2}(iy + z)$ ,  $Z^* = \frac{1}{2}(iy - z)$ ;  $x, y, z$  kartesische Koordinaten] werden Klassen harmonischer Funktionen  $H(\chi) = B_3(f)$ ,  $\chi = (x, y, z)$  untersucht, die rationalen bzw. algebraischen Funktionen  $f$  entsprechen. Dabei handelt es sich um Vereinfachungen und Verallgemeinerungen früherer Ergebnisse des Verf. [Math. Ann. 99, 629—659 (1928), 101, 534—558 (1929)]. Der zweite Teil der Arbeit betrifft harmonische Vektoren  $\mathfrak{H}(\chi) = (H_1, H_2, H_3)$ ,  $H_1 = B_3(f)$ ,  $H_2 = B_3(\frac{1}{2}i(\zeta + \zeta^{-1})f) + \text{Re}(g(y + iz))$ ,  $H_3 = B_3(\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1})f) -$



$-\operatorname{Im}(g(y+iz))$ , wobei  $g(Z)$  eine analytische Funktion ist. Insbesondere werden Integrale von der Form  $\int_{x_0}^x \mathfrak{H}(\xi) d\xi$  betrachtet, wobei die zugehörigen Funktionen  $f$  rational sind.

*E. Kreyszig.*

**Kreyszig, Erwin:** On some relations between partial and ordinary differential equations. Canadian J. Math. **10**, 183—190 (1958).

Verf. untersucht die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$L(U) = U_{zz} + B(z, \bar{z}) U_{\bar{z}} + C(z, \bar{z}) U = 0 \quad (z = x + iy, \bar{z} = x - iy).$$

$L(U)$  heißt von der Klasse  $\mathfrak{E}$ , wenn sich die Lösungen von  $L(U) = 0$  in der Form

$$\mathfrak{B}(f) = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{1}{2}z(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} \exp \sum_0^m q_\mu(z, \bar{z}) t^\mu dt$$

( $f(z)$  holomorph in  $z=0$ ) darstellen. Ist  $L(U)$  von der Klasse  $\mathfrak{E}$ , so genügt  $\mathfrak{B}((z-\zeta)^{-n})$   $\zeta \neq 0$ ,  $n=1, 2, \dots$ , für jedes feste  $y$  einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung  $r \leq m+3$ , deren Koeffizienten rationale Funktionen in den  $q_\mu(z, \bar{z})$  sind. Dieses Resultat wird erweitert auf Funktionen  $\mathfrak{B}(r(z))$ , wo  $r(z)$  eine rationale Funktion in  $z$  ist. Abschließend wird noch eine Beziehung zwischen den Singularitäten dieser gewöhnlichen Differentialgleichung und denen von  $L(U)$  festgestellt.

*H. Röhrli.*

**Hua, Loo-keng:** On a system of partial differential equations. Science Record, n. Ser. **1**, 369—371 (1957).

L'A. utilise le système d'équations différentielles

$$(1) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left( \delta_{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^n \bar{z}_{k\alpha} z_{k\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_{i\alpha} \partial z_{j\beta}} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbol de Kronecker, pour obtenir une generalisation de la théorie des fonctions harmoniques de plusieurs variables. Pour cela l'A. considère la fonction  $u(Z)$  [ $Z$  est la matrice  $(z_{ij})$ ] sur  $R$  ( $I - ZZ'$  étant positive définie,  $Z'$  est la transposée de  $Z$ ), donnée par l'intégrale (Poisson)

$$(2) \quad u(Z) = \int P(Z, U) u(U) \bar{U}$$

$$\text{ou} \quad c = \int \bar{U} = \frac{(2\pi)^{n(n+1)/2}}{1!2!\dots(n-1)!}, \quad P(T, U) = \frac{\det(I - T\bar{T}')^n}{[\det(I - T\bar{U}')]^{2n}},$$

$Z \in R$ ,  $U \in L \subset R$ ,  $L$  étant l'ensemble de matrices unitaires. Une solution  $u(Z)$  de (1) est appelée fonction harmonique. La fonction  $u(Z)$  donnée par (2) est harmonique, sur le contour prend les valeurs données  $u(U)$  et, si  $u(Z)$  possède les dérivées de second ordre continues dans  $R - L$ , ses valeurs extrêmes se trouvent sur le contour. Ces résultats sont donnés sans démonstrations.

*M. N. Roşculeţ.*

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

• **Yosida, Kôzaku:** Theory of integral equations. Iwanami Shoten 1950. 231 p. [Japanisch].

This book is an introduction to the general theory of integral equations, and is written in such a way to put stress on the relation between the theory of integral equations and boundary value problems of ordinary differential equations of the second order. The author spends about a quarter of the whole volume to state on the initial value problem of ordinary differential equations in order to make the content of this book self-contained, and it seems to be easy for those who have only elementary knowledge in differential and integral calculus and theory of functions of a complex variable. Chapter 1 is an exposition of the initial value problem of ordinary differential equations. This chapter plays the rôle of the preliminary to the

theory stated in following chapters. Chapter 2 involves the method to change the boundary value problem of Sturm-Liouville type to the problem of integral equation by means of Green functions, and Hilbert-Schmidt theory on integral equations with a symmetric kernel. Some applications of Hilbert-Schmidt expansion theorem and asymptotic expressions of eigenvalues and eigenfunctions are also stated in Chapter 2. In Chapter 3, the theory of Fredholm is stated as an extension of Hilbert-Schmidt theory, and Schmidt's expansion theorem on integral equations with a non-symmetric kernel and Mercer's expansion theorem for positive definite kernels are proved. Chapter 4 is an exposition on integral equations of Volterra type. In Chapter 5, the author gives an elegant proof of Titchmarsh-Kodaira's formula concerning Weyl-Stone's eigenfunction expansion for ordinary differential equations of the second order. The proof, due to the author himself, is quite elementary, and one may easily understand the proof without any knowledge except the contents of Chapter 2 and Appendix 1 of this book. Several important examples of eigenfunction expansions are also given. Chapter 6 is a brief exposition on non-linear integral equations. Appendix 1 is an exposition of some theorems in the theory of functions of a complex variable which are used in Chapter 5. Appendix 2 is the list of literatures closely related to the contents of this book. *S. Itô.*

**Ghermanesco, Michel:** Équations intégrales aux deux limites variables. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1104—1105 (1959).

Verf. reduziert die Integralgleichung

$$f(x) - \lambda \int_{\theta(x)}^x K(x, s) f(s) ds = 0$$

[auch  $= g(x)$  wird erwähnt, aber nicht weiter behandelt], wo  $K(x, y)$  und  $\theta(x)$  gegeben sind, aber  $\theta_n(x) = x$  gilt  $[\theta_1(x) = \theta(x), \theta_k(x) = \theta[\theta_{k-1}(x)]$ , eben deshalb versteht Ref. nicht, was Verf. mit der Definition  $f[\theta_k(x)] = f\{\theta[\theta_{k-1}(x)]\}$  „funktional stetig“ meint] auf die Gleichungen

$$f(x) - \lambda \int_0^x \{K(x, s) - a_k^{n-1} K[\theta_{n-1}(x), s]\} f(s) ds = F_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Hier sind  $a_k^n = 1$  und

$$F_k(x) + a_k F_k[\theta(x)] + \dots + a_k^{n-1} F_k[\theta_{n-1}(x)] = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Diese letzteren Funktionalgleichungen hat Verf. u. a. in den Bänden 243 und 244 (s. dies. Zbl. **71**, 116; **77**, 110) derselben Zeitschrift untersucht. Ein Beispiel beschließt die Arbeit.

*J. Aczél.*

**Praporgescu, N.:** Sur une classe d'équations intégrales. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. **9**, 289—303, russ. und französ. Zusammenfassg. 302—303 (1958) [Rumänisch].

L'objet de l'article est l'étude des équations intégrales

$$(1) \quad C\varphi(s) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\bar{\omega}} C(t) \varphi(s+t) dt = 0; \quad Cw(s) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\bar{\omega}} C(t) w(s-t) dt = 0,$$

et de deux systèmes d'équations du même type. A ce but on considère d'abord les équations

$$C\varphi(s) - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m C(l\omega) \varphi(s+l\omega) = 0 \quad \text{et} \quad Cw(s) - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m C(l\omega) w(s-l\omega) = 0,$$

qu'on étudie à l'aide des équations caractéristiques, obtenues en remplaçant  $\varphi(s)$  par  $e^{rs}$ . Divers théorèmes sont établis pour ces équations, qui conduisent après un passage à la limite, aux solutions des équations (1); ces solutions s'expriment par des séries convergentes dans le plan entier. Un paragraphe s'occupe des équations analogues à (1) à seconds membres, et des systèmes du même type.

*A. Haimovici.*

**Kim, E. I.:** Solution of a certain class of singular integral equations with line integrals. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 24—27 (1957) [Russisch].

Es handelt sich um die Integralgleichung:

$$\psi(s, t) = \lambda \int_0^t d\tau \int_C K_0(r_{pp_1}^2, t - \tau) \psi(s_1, \tau) ds_1 + f(s, t), \quad t > 0,$$

wobei  $r_{pp_1}$  der Abstand zwischen den Punkten der Kurve  $C$  mit den Bogenlängen  $s, s_1$  sei, und es sei:

$$K_0(r_{pp_1}^2, t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} \int_0^\infty \varrho(z) \left[ 1 - \frac{r_{pp_1}^2}{2a^2(z)(t - \tau)} \right] \exp \left[ -\frac{r_{pp_1}^2}{4a^2(z)(t - \tau)} \right] dz,$$

$$\varrho(z) = (z^2 + a_1^2)^{-3/2} (z^2 + a_2^2)^{-1/2}, \quad a^2(z) = a_2^2 (z^2 + a_1^2) / (z^2 + a_2^2).$$

Gesucht werden Lösungen mit der Eigenschaft:

$$|\psi(s_1, t) - \psi(s_2, t)| \leq M t^{-\sigma} |s_1 - s_2|^\alpha, \quad 0 \leq \sigma < 1, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

wenn für  $f(s, t)$  vorausgesetzt wird:  $t^\sigma |f(s, t)|, \text{Var}(t^\sigma \partial f(s, t) / \partial s) \leq M$ . Solche Lösungen existieren nicht für beliebige  $\lambda$ , sondern nur für  $\lambda < \lambda_0$ , wo  $\lambda_0$  eine wohlbestimmte Zahl ist.

W. Thimm.

**Omnès, R.:** On the solution of certain singular integral equations of quantum field theory. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 316—326 (1958).

Verf. untersucht singuläre Integralgleichungen vom Typus

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{h^*(x') \varphi(x')}{x' - x - i\varepsilon} dx' + \int_1^\infty K(x', x) \varphi(x') dx',$$

die bei der Beschreibung der von einem  $\pi$ -Nukleonen-System erregten Vorgänge auftreten. Zunächst wird die Gleichung unter der Annahme  $K=0$  mit Hilfe einer Methode behandelt, die eine Verallgemeinerung einer von N. I. Muschelišvili mitgeteilten Methode ist, die er auf ein von D. Hilbert behandeltes Elastizitätsproblem angewandt hat; nur ist hier der Kern kein einfacher Cauchy-Kern. Die Auflösung der Integralgleichung gelingt durch Einführung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen, die in dem durch Aufschneiden längs der reellen Achse von 1 bis  $\infty$  entstehenden Gebiet der Zahlenebene betrachtet wird. Auf diesem Wege gelangt Verf. zu einer Lösung, die sich für  $h^*(x) = \sin \delta(x) \exp[i\delta(x)]$  durch

$$(1) \quad \varphi(x) = \exp[i\delta(x)] \left\{ f(x) \cos \delta(x) + \frac{1}{\pi} \exp[\varrho(x)] P \int_1^\infty \frac{f(\zeta) \sin \delta(\zeta) \exp[-\varrho(\zeta)]}{\zeta - x} d\zeta \right\}$$

darstellen läßt. Weitere Lösungen ergeben sich dadurch, daß zu (1) die Lösungen der homogenen Gleichung addiert werden. Wird in der ursprünglichen Integralgleichung

$f(x) + \int_1^\infty K(x', x) \varphi(x') dx' = g(x)$  gesetzt und die Lösung der so entstehenden Integralgleichung nach (1) angeschrieben, so gelangt man zu einer Integralgleichung vom Typus

$$\varphi(x) = \mu(x) + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty N(x', x) \varphi(x') dx'.$$

In den Fällen, in denen die letztere vom Fredholmschen Typus ist, können Lösungen angegeben werden. Die oben beschriebene Methode wird noch auf Systeme von Integralgleichungen verallgemeinert.

W. Quade.

**Uzakov, Ju. K.:** Über die Integro-Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine Gruppe nach S. Lie zulassen. Izvestija Akad. Nauk UzSSR, Ser. fiz.-mat. 1958, Nr. 4, 53—63 (1958) [Russisch].

L'A., seguendo l'ordine di idee di una sua nota anteriore [Izvestija Akad. Nauk UzSSR, Ser. fiz.-mat. 1958, Nr. 3, 41—49 (1958)], costruisce le equazioni in-



tegro-differenziali di secondo ordine  $H(x, y, y', y'') = \int_a^b K(x, y, y', y'', \xi, \eta, \eta', \eta'') d\xi$ ,  
 $\eta = y(\xi)$ ,  $\eta' = y'(\xi)$ ,  $\eta'' = y''(\xi)$ , che ammettono un gruppo dato dall'operatore  $L \equiv u(x, y) \partial/\partial x + v(x, y) \partial/\partial y$ .  
D. J. Mangerson.

Gegelia, T. G.: Über die Eigenschaften gewisser Klassen stetiger Funktionen bei der Hilberttransformation in  $E^n$ . Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 19, 257—261 (1957) [Russisch].

Soient:  $E^n$  espace euclidien à  $n$  dimensions;  $Q, P, P_1, P_2, \dots$  points de  $E^n$ ;  $S(P, \delta)$  = sphère de centre  $P$  et de rayon  $\delta$ ;  $\sigma(P, \delta)$  = frontière de  $S(P, \delta)$ . Soit

$$(1) \quad \psi(P) = \int_{E^n} \frac{M(P, Q)}{r^n(P, Q)} \varphi(Q) dQ$$

où  $r(P, Q)$  — distance des points  $P$  et  $Q$ ;  $\varphi(Q)$  — fonction définie sur  $E^n$ , et  $M(P, Q)$  = fonction définie sur  $E^{2n}$  et vérifiant les conditions: a)  $M(P, Q) = M(P, Q')$  pour  $P, Q \in E^n$ , et  $Q'$  point d'intersection du rayon  $PQ$  avec  $\sigma(P, 1)$ .

$$(2) \quad \int_{\sigma(P, 1)} M(P, Q) d\tau_Q = 0, \quad \forall P \in E^n.$$

Pour  $M(P, Q) = \Omega(P - Q)$  et  $\Omega(Q) = \Omega(Q')$ ,  $\forall Q \in E^n$ , où  $Q'$  = point d'intersection du rayon  $OQ$  avec  $\sigma(O, 1)$ , alors (1) représente (cf. Zygmund, ce Zbl. 73, 327) la transformation de Hilbert dans  $E^n$ . Dans cette note l'A. étudie quelques propriétés de l'intégrale (1) pour certaines classes de fonctions continues déterminées. Moyennant les notations:

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \mu(\delta) = \sup |M(P, Q_1) - M(P, Q_2)|, & Q_1, Q_2 \in \sigma(P, 1), \quad P \in E^n, \quad r(Q_1, Q_2) \leq \delta \\ \nu(\delta) = \sup |M(P_1, Q) - M(P_2, Q_0)|, & P_1, P_2 \in E^n, \quad Q \in \sigma(P_1, 1), \quad \nu(P_1, P_2) \leq \delta, \\ & \text{où } Q_0 \in \sigma(P_2, 1) \text{ est choisi de telle sorte que les vecteurs } Q - P_1, \text{ et } Q_0 - P_2 \\ & \text{soient parallèles. Si } \varphi(Q) \in T(E^n) \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(P, 1) - S(P, \varepsilon)} \frac{|\varphi(Q) - \varphi(Q)|}{r^n(P, Q)} dQ \text{ existe pour } P \in E^n;$$

dans ces conditions, l'A. énoncé (sans démonstration) les théorèmes suivants: Théorème 1. Si  $\varphi \in T(E^n) \cap L_p(E^n)$ ,  $p \geq 1$ , alors l'intégrale (1) définie en tant qu'intégrale à valeur principale au sens de Cauchy existe pour tout  $P \in E^n$  et représente une fonction uniformément continue sur  $E^n$ . Théorème 2. Si  $\varphi \in T(E^n)$ ,  $n \geq 2$ , alors

$$\begin{aligned} C \omega(\delta, \varphi) &\leq \{\nu(\delta) + \mu(\delta)\} \|\varphi\|_p + \int_0^\delta \frac{\omega(\varrho, \varphi)}{\varrho} d\varrho + \int_\delta^2 \mu\left(\frac{2\delta}{\varrho}\right) \frac{\omega(\varrho, \varphi)}{\varrho} d\varrho, \\ C \int_0^\gamma \frac{\omega(t, \varphi)}{t} \xi(t) dt &\leq \|\varphi\|_p \int_0^\gamma \nu(t) + \frac{\mu(t)}{t} \xi(t) dt + \int_\gamma^2 \frac{\omega(\varrho, \varphi)}{\varrho} d\varrho \int_0^\gamma \frac{\xi(t)}{t} \mu\left(\frac{2t}{\varrho}\right) dt \\ &\quad + \int_0^\gamma \frac{\omega(\varrho, \varphi)}{\varrho} \left[ \int_0^\delta \mu\left(\frac{2t}{\varrho}\right) \frac{\xi(t)}{t} dt + \int_\delta^\gamma \frac{\xi(t)}{t} dt \right] d\varrho, \end{aligned}$$

où:  $C = \text{const} > 0$ ,  $0 < \gamma < 1$ ;  $\xi(t)$  = fonction arbitraire non négative intégrable sur  $]0, \gamma[$ ;  $\omega(\delta, \varphi)$  et  $\omega(\delta, \varphi)$  sont les modules de continuité de  $\varphi$  et  $\varphi$ , et  $\|\varphi\|_p = \left\{ \int_{E^n} |\varphi(Q)|^p dQ \right\}^{1/p}$ . A l'aide des théorèmes ci-dessus, et de certaines classes de fonctions définies par l'A., sont exposés d'autres résultats concernant la représentation de certaines classes de fonctions continues, par des intégrales de la forme (1) (Théorèmes 3 et 4).  
S. Vasilache.

Talaljan, A. A.: Über eine Integraldarstellung der meßbaren Funktionen mit Kernen, die unitäre Transformationen des Raumes  $L_2(0, \infty)$  erzeugen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 26, 257—261 (1958) [Russisch].

$K(x, t)$  sei in  $0 \leq x, t < \infty$  meßbar und für alle  $f(x) \in L_2(0, \infty)$  gelte

$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a K(x, t) f(t) dt = g(x)$  für alle  $x \geq 0$ . [Die Konvergenz versteht sich im Sinne der Norm  $\|\cdot\|$  in  $L_2(0, \infty)$ ]. Die entsprechende reziproke Darstellung sei:

$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a L(x, t) g(t) dt = f(x)$ . Es sei stets  $\|g\| = \|f\|$ . Für alle  $a, b > 0$  gelte

$\int_0^a \int_0^b K^2(x, t) dx dt < \infty$  und Entsprechendes für  $L(x, t)$ . Zu jeder beliebigen für

$x \geq 0$  definierten (nicht notwendig endlichen) meßbaren Funktion  $h(x)$  existiert eine ebensolche Funktion  $p(x)$ , die in jedem endlichen Teilintervall quadratisch

integrierbar ist, so daß  $\int_0^a L(x, t) p(t) dt$  für  $a \rightarrow \infty$  dem Maße nach in jedem

endlichen Teilintervall  $[0, c]$  von  $x \geq 0$  gegen  $h(x)$  konvergiert. Wenn  $h(x)$  fast überall endlich ist, kann man die Konvergenz dem Maße nach durch eine sinngemäß definierte „Konvergenz in der  $L_2(0, c)$ -Norm dem Maße nach“ ersetzen. Keine Beweise.

L. Schmetterer.

**Butzer, P. L.:** Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusiński auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus. Arch. rat. Mech. Analysis **2**, 114—128 (1958).

Die Mikusińskische Operatorenrechnung bietet in mancher Hinsicht gegenüber den Integraltransformationen, der Theorie der analytischen Funktionale und der des Distributionskalküls viele Vorteile, nicht zuletzt wegen ihres einfachen algebraischen Aufbaues. Vorliegende Arbeit gibt nach einer kurzen Wiederholung der wichtigsten Grundlagen drei Sätze über Potenzreihen von Operatoren von der Form: Ist  $f \in C$

(bzw.  $f \in L^2$ ), so folgt  $h = \sum_{n=0}^{\infty} f^n = \frac{f}{1-f}$  mit  $h \in C$  (bzw.  $h \in L^2$ ). Das gleiche gilt, wenn  $|f(t)| \leq M t^{-a}$ ,  $0 < a < 1$ . Hierbei ist natürlich unter  $f^1 = f$ ,  $f^2 =$

$\int_0^t f(t-u) f(u) du$  usw. zu verstehen. Als Anwendung werden die linearen

Volterraschen Integralgleichungen vom Faltungstypus von erster und zweiter Art, Systeme von solchen Integralgleichungen sowie Integrodifferentialgleichungen und singuläre Integralgleichungen zusammen mit verschiedenen Beispielen behandelt. Auch nichtlineare Integralgleichungen, in denen die unbekannte Funktion mit sich selbst und mit gegebenen Funktionen mehrfach gefaltet vorkommt, werden an einem Beispielskizziert. Es lag wohl in der Absicht des Verf., aufzuzeigen, wie einfach sich der Zugang zu technischen Problemen, die „verallgemeinerte“ Funktionen als Lösungen aufweisen, gestaltet, wenn man den Weg des Mikusińskischen Kalküls beschreitet. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß hier auch die Literatur angegeben wird, die sich mit den Zusammenhängen der verschiedenen Theorien von Mikusiński, Schwartz, Fantappiè, Doetsch u. a. beschäftigt.

F. Selig.

**Weston, J. D.:** An extension of the Laplace-transform calculus. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **6**, 325—333 (1958).

L'objet de cet article est de donner une justification simplifiée du calcul opérationnel de Heaviside au moyen d'une généralisation de la transformation de Laplace, comprenant le cas des „fonctions impulsives“, mais tout en évitant l'emploi explicite de la théorie des distributions. La transformation de Laplace,  $\mathcal{L}$ , est définie d'abord de façon classique pour les fonctions  $x(t)$  localement sommables à croissance exponentielle à droite. Cela posé, l'A. appelle „fonction parfaite“ toute fonction  $f(t)$  indéfiniment dérivable sur  $R^+$  s'annulant pour  $t \rightarrow 0^+$  ainsi que toutes ses dérivées. D'autre part, il appelle „opérateur parfait“ toute application  $A$  de l'ensemble des

fonctions parfaites dans lui-même telle que  $\mathfrak{L}[Af(t)] = \bar{A}(s)\bar{f}(s)$ ,  $\bar{A}$  étant une fonction de  $s$  indépendante de  $f$  (l'opérateur  $D$  de dérivation en est un exemple). Alors  $A$  est, par définition, la transformée de Laplace de  $A$ . On obtient ainsi un prolongement de la transformation  $\mathfrak{L}$ , car les opérateurs  $A$  forment une algèbre, dont une sous-algèbre est isomorphe à celle des opérateurs définis par les fonctions  $x(t)$  initiales. Remarques du rapporteur: La classe des fonctions  $A$  ne nous paraît pas suffisamment définie. S'il s'agit des fonctions holomorphes à croissance lente dans des demi-plans droites, les opérateurs parfaits s'identifient aux distributions à croissance exponentielle, nulles pour  $t < 0$ , considérées comme opérateurs de convolution. L'idée de l'A., qui se rapproche de celle de Mikusiński, est sans doute intéressante, mais il nous semble désormais inutile de chercher à éviter les distributions. En particulier, la théorie directe des distributions sur la droite (comme dérivées formelles de fonctions continues) est vraiment triviale et on peut prolonger la transformation de Laplace aux distributions de la forme  $D^n x(t)$ , où  $x(t)$  est une fonction localement sommable à croissance exponentielle, nulle pour  $t < 0$ , en posant tout simplement  $\mathfrak{L}\{D^n x(t)\} = s^n \mathfrak{L}\{x(t)\}$ , ce qui coïncide avec l'idée de l'A. simplifiée.

*J. Sebastião e Silva.*

**Smolickij (Smolizkiy), Ch. L. (Kh. L.):** On singular integral which appears in summation of multiple Fourier integral. Vestnik Leningradsk. Univ. 13, Nr. 7 (Ser. Mat. Mech. Astron. 2), 125—130 (1958) [Russisch].

Sei  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , eine summierbare Funktion im Euklidischen Raum  $E_N$ ,  $\hat{f}(\alpha)$  ihre Fourier-Transformierte. Bei der sphärischen Riesz-Summation der Ordnung  $\delta$  von  $\hat{f}(\alpha)$  setzt man

$$S_R^\delta(x) = \int_{v^2 \leq R^2} \left(1 - \frac{v^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(\alpha) e^{-i(\alpha, x)} d\alpha, \quad v^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2.$$

Nach S. Bochner (vgl. dies. Zbl. 15, 157) ist

$$S_R^\delta(x) = 2^{\delta+1-N/2} \Gamma(\delta+1) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)^{-1} R \int_0^\infty f_x(t) (Rt)^{-\delta-1+N/2} J_{\delta+N/2}(Rt) dt,$$

wo  $f_x(t)$  der Mittelwert von  $f(x)$  über eine Sphäre vom Radius  $t$  mit  $x$  als Zentrum ist. Das Lokalisationsprinzip gilt nur für  $\delta \geq \frac{1}{2}(N-1)$ , für  $\delta > \frac{1}{2}(N-1)$  ist  $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R^\delta = f_x(0)$  falls z. B.  $f_x(t)$  im Punkt  $t=0$  stetig ist. Im vorliegenden Artikel

werden Beispiele stetiger  $f_x(t)$  angegeben, für die die  $S_R^{(N-1)/2}$  unbeschränkt sind. Dabei wird auch gezeigt, daß eine stetige, ungerade Funktion  $\psi(t) \sim \sum_{k=1}^\infty b_k \sin kt$  existiert,

für die  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k b_k$  für  $n \rightarrow \infty$  unbeschränkt ist.

*A. Nordlander.*

**Narain, Roop:** A Fourier kernel. Math. Z. 70, 297—299 (1959).

The author proves that the function

$$\sqrt{2} G_{2p, 2q}^a, p \left( \frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p, \frac{1}{2} - a_1, \frac{1}{2} - a_2, \dots, \frac{1}{2} - a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q, \frac{1}{2} - b_1, \frac{1}{2} - b_2, \dots, \frac{1}{2} - b_q \end{matrix} \right)$$

(where  $G$  denotes Meijer's  $G$ -Function), is a Fourier kernel, a function  $K(x)$  being called a Fourier kernel if under suitable restrictions on  $f(x)$  a formula of the form

$f(x) = \int_0^\infty K(xu) \int_0^\infty K(uy) f(y) dy du$  is valid. The author uses the necessary and sufficient condition that  $\mathfrak{M}(s)\mathfrak{M}(1-s) = 1$  [where  $\mathfrak{M}(s)$  is the Mellin-Transform of  $K(x)$ ] for  $K(u)$  to be a kernel, to derive the result. *V. Ganapathy Iyer.*

**Ganelius, Tord:** General and special Tauberian remainder theorems. (Abstract.) 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 102—103 (1958).



**Poulsen, Ebbe Thue:** On the algebra generated by a continuous function. *Math. Scand.* **6**, 37—39, S 2 (1958).

Si indica una funzione continua  $g(x)$ ,  $(0 \leq x \leq 1)$  non monotona, tale che ogni funzione continua  $f(x)$ ,  $(0 \leq x \leq 1)$ , per la quale è  $\int_0^1 f(x) g^n(x) dx = 0$ ,  $(n = 0, 1, 2, \dots)$ , è necessariamente nulla in tutto  $(0, 1)$ .

*S. Cinquini.*

### **Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:**

**Ringrose, J. R.:** A note on uniformly convex spaces. *J. London math. Soc.* **34**, 92 (1959).

A well-known theorem asserts that every uniformly convex space is reflexive. This was proved independently by D. Milman, cf. this Zbl. **19**, 416, and B. J. Pettis, cf. this Zbl. **21**, 326, first review. A later proof was given by S. Kakutani, cf. this Zbl. **22**, 53. The present note indicates a shorter proof.

**Altman, M.:** Continuous transformations of open sets in locally convex spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys.* **6**, 297—301, russ. Zusammenfassg. XXIII (1958).

Let  $X$  be a locally convex Hausdorff linear space, and  $V$  an open convex symmetric neighbourhood of the origin in  $X$ . For any point  $x$  of  $X$ , let  $\bar{V}(x)$  be the closure of the set  $x + V$ . A function  $f$  mapping  $\bar{V}(x)$  into  $X$  is called a  $\partial$ -mapping on  $\bar{V}(x)$  if  $f(x') \neq f(x'')$  whenever  $x', x'' \in \bar{V}(x)$  and  $x' - x''$  is in the frontier of  $F$ . If  $G$  is an open set in  $X$ , and if  $f(x) = x - F(x)$ , where  $F$  is a completely continuous mapping of  $G$  into  $X$ , the author shows that the set  $f(G)$  is open provided that, for each point  $x$  of  $G$ , it is possible to choose  $V$  so that (1)  $\bar{V}(x) \subseteq G$ , (2) if  $f(x) \neq 0$  then  $t f(x) \notin V$  for some real number  $t$ , (3)  $f$  is a  $\partial$ -mapping on  $\bar{V}(x)$ . Some consequences of this theorem are considered; in particular, it generalizes a recent theorem of Granas (see this Zbl. **80**, 312).

*J. D. Weston.*

**Bessaga, C. and A. Pełczyński:** On subspaces of a space with an absolute basis. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys.* **6**, 313—315, russ. Zusammenfassg. XXIV (1958).

$X$  sei ein  $(B)$ -Raum mit absoluter Basis,  $Y$  ein abgeschlossener linearer Teilraum. Theorem 1: Folgende Bedingungen sind äquivalent: a) Jede beschränkte Teilmenge von  $Y$  ist relativ schwach kompakt, b)  $Y^*$  ist schwach folgenvollständig, c) kein Teilraum von  $Y^*$  ist isomorph zu  $c_0$ , d) kein zu  $l$  isomorpher Teilraum von  $Y$  besitzt einen Komplementärraum in  $Y$ , e) ist  $Y_1$  ein separabler Teilraum von  $Y$ , so ist  $Y_1^*$  separabel, f)  $Y$  enthält keinen zu  $l$  isomorphen Teilraum. Theorem 2:  $Y$  ist dann und nur dann schwach folgenvollständig, wenn kein Teilraum von  $Y$  zu  $c_0$  isomorph ist. Theorem 3. Folgende Bedingungen sind äquivalent: a)  $Y$  ist reflexiv, b) jede beschränkte Teilmenge von  $Y^*$  ist relativ schwach kompakt, c) kein Teilraum von  $Y^*$  ist zu  $l$  isomorph, d) kein Teilraum von  $Y$  ist zu  $l$  oder  $c_0$  isomorph. — Für  $X$  stammen diese Resultate von R. C. James (vgl. dies. Zbl. **39**, 122; **66**, 94).

*G. Köthe.*

**Rao, M. V. Subba:** Closure theorems. *Math. Student* **26**, 61—70 (1959).

L'A. donne quelques exemples de sous-espaces partout denses dans les espaces  $l^p$ , ou dans des espaces de fonctions holomorphes, ou dans les limites projectives de tels espaces. Exemple: si  $(a_n)$  est un élément de  $l^p$  ( $p \geq 1$ ) tel que  $a_n \neq 0$  pour tout  $n$ ,  $(z_n)$  une suite de nombres complexes telle que  $|z_n| \leq 1$  et que la série  $\sum_n (1 - |z_n|)$  diverge, alors les éléments  $(a_k z_n^k)_{k \geq 1}$  engendrent un sous-espace partout dense de  $l^p$ . Les démonstrations reposent sur le théorème de Hahn-Banach. La dernière question de l'A. se résout aussitôt par la négative; il suffit de prendre les  $a_i \neq 0$  tels qu'il existe un  $z \neq 0$ , pour lequel  $|z| < 1$  et  $\sum_n a_n z^n = 0$ .

*J. Dieudonné.*

Grothendieck, A.: Un résultat sur le dual d'une  $C^*$ -algèbre. J. Math. pur. appl. IX. Sér. 36, 97—108 (1957).

Ist  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $u$  eine lineare, hermitesche und stetige Linearform über  $A$ , so gibt es genau eine Zerlegung  $u = v - w$  mit  $\|u\| = \|v\| + \|w\|$ , wobei  $v$  und  $w$  positive Linearformen sind (Satz 1). Während die Existenz der Zerlegung relativ leicht zu beweisen ist, erfordert der Beweis der Eindeutigkeit kompliziertere Überlegungen. Es wird gezeigt, daß der bidual Raum  $A''$  von  $A$  als von Neumannsche Algebra aufgefaßt werden kann, und daß die positiven, normalen Linearformen bzw. die ultraschwach stetigen Linearformen über  $A''$  die positiven Linearformen bzw. die Linearformen aus  $A'$  sind (Satz 2). Satz 1 wird dadurch zurückgeführt auf den folgenden Satz: Ist  $A$  eine von Neumannsche Algebra und  $u$  eine hermitesche, ultraschwach stetige Linearform über  $A$ , so gibt es genau eine Zerlegung  $u = v - w$  mit  $\|u\| = \|v\| + \|w\|$ , wobei  $u$  und  $v$  positive, normale Linearformen über  $A$  sind (Satz 3). Es wird noch gezeigt, daß die Existenz der Zerlegung  $u = v - w$  in positive Linearformen im wesentlichen charakteristisch dafür ist, daß eine involutive Banach-Algebra  $A$  eine  $C^*$ -Algebra ist.

E. Thoma.

Chillingworth, H. R.: Generalised "dual" sequence spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 61, 307—315 (1958).

If  $x = \{x_k\} \in \alpha$ , and  $y = \{y_k\}$ , the set of all  $y$  such that  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$  converges for every  $x$  is called the  $g$ -dual space of  $\alpha$ , denoted by  $\alpha^+$ . This is a generalization of the dual space  $\alpha^*$  of  $\alpha$ , introduced by G. Köthe and O. Toeplitz (this Zbl. 9, 257), in which absolute convergence of the above series is postulated; the possibility of removing the restriction of absolute convergence (and so obtaining the  $g$ -dual space) was considered briefly by Köthe and Toeplitz themselves [§ 16 of the above cited paper]. The  $g$ -dual space has also been employed by G. Matthews [see the following review] to extend the theory of infinite matrix rings. In the present paper, the author extends many of the theorems due to Köthe and Toeplitz, and to H. S. Allen, given in Chapter 10 of the reviewer's "Infinite matrices and Sequence spaces" (this Zbl. 40, 25), by using the  $g$ -dual space; the ideas of projective convergence and limit, and of projective bounded sets, are likewise extended, and theorems on these given in the above reference are thus generalized, and similarly for theorems on strong projective convergence and limit. Finally, some results on transformations due to Köthe and Toeplitz, and Allen, given in the reviewer's "Linear operators" (London 1953), (6. 1, II), (6. 2, I), (6. 2, VIII), and (6. 2, VII), are extended. A  $g$ -linear operation is defined as an operation which is distributive and continuous under  $g$ - $p$ -convergence; the definition of a projective functional is extended to  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$ , where  $x \in \alpha$ ,  $u \in \alpha^+$ . The last of the theorems cited, i. e., (6. 2, VII), states that to every linear transformation  $L$ , defined in a normal sequence space  $\alpha \supset \Phi$  (where  $\Phi$  is the space of all finite sequences), corresponds a matrix  $A$  such that  $Ax = L(x)$  for every  $x$  in  $\alpha$ . This was first proved by Köthe and Toeplitz, loc. cit. 208, Satz 1, in the case when both  $\alpha$  and  $\beta = L(\alpha)$  are normal and contain  $\Phi$ ; the extension enunciated above, due to Allen, involves no restriction on  $\beta$ . The author here shows that the restriction that  $\alpha$  is normal is unnecessary, on using  $g$ -linear operations in place of linear operations.

R. G. Cooke.

Matthews, G.: Generalised rings of infinite matrices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 61, 298—306 (1958).

G. Köthe and O. Toeplitz (this Zbl. 9, 257) defined a ring  $R$  of infinite matrices by the properties that, if  $A, B, C$  belong to  $R$ , then (i)  $A + B$  and  $AB$  also belong to  $R$ , (ii)  $(AB)C = A(BC)$ , (iii) all series  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} b_{j,k}$  occurring in the product of two matrices of  $R$  are absolutely convergent. The author calls a set of infinite

matrices which has property (i), but not necessarily (ii) or (iii), a generalized ring, or  $g$ -ring; if such a set possesses neither of the properties (ii), (iii), it is called an unrestricted  $g$ -ring. An absolute  $g$ -ring is a  $g$ -ring with properties (i) and (iii), but not (ii). An associative  $g$ -ring possesses at least properties (i) and (ii). Some properties of  $g$ -rings are investigated, using a variant of the usual concept of dual sequence spaces; ordinary, instead of absolute, convergence is postulated for the "product"

$x' y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  of two sequences  $x = \{x_i\}$ ,  $y = \{y_i\}$ . This idea was first considered

by Köthe and Toeplitz in § 16 of their paper referred to above and has been recently used by H. R. Chillingworth (see the above review) to obtain results on transformations of spaces. In particular, the author gives some results for isomorphic  $g$ -rings, maximal  $g$ -rings, and unrestricted  $g$ -rings. R. G. Cooke.

**Matthews, G.: Bounds on generalised rings of infinite matrices.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 354—361 (1958).

For definitions of the different types of generalised rings, or  $g$ -rings, of infinite matrices, see G. Matthews, the previous review. No example has previously been given of a non-associative bound, i. e. a bound [see the reviewer's Infinite matrices and sequence spaces (this Zbl. **40**, 25), p. 26] on a non-associative  $g$ -ring. The existence of such a bound on a non-associative  $g$ -ring  $U$  is established in Theorem 2, II, stated below. Let  $B$  be a  $K_r$  and  $K_c$  matrix such that  $\sum_j \sum_i b_{i,j} < \infty$ , and suppose that there exists an associated  $\delta_1$ -matrix (see G. Matthews, this Zbl. **79**, 12)  $A$  defined by  $a_{i,j} = t_i$ , where  $\sum_i t_i < \infty$ , such that

$$(a) \quad \sum_i \left| \sum_j b_{i,j} t_j \right| < \infty, \quad (b) \quad \sum_i \sum_j b_{i,j} t_j \neq \sum_j \sum_i b_{i,j} t_j.$$

An example of this is given, and a generalisation is as follows. Theorem 2. I. Let  $B$  be a matrix with the above properties, and  $A$  an associated  $\delta_1$ -matrix. Then an unrestricted  $g$ -ring  $S$ , with unit element, is formed by elements  $k I + \sum_{j=1}^r c_j A_j$ , where each  $A_j$  is a finite product formed from  $A$  and powers of  $B$  in any order, and  $k, c_j$  are arbitrary scalars. Theorem 2, II. The matrices

$$k I + c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4 X Y + c_5 Y Z + c_6 (X Y) Z,$$

where  $k, c_i$  are arbitrary scalars, form a non-associative  $g$ -ring  $U$  with unit element. A bound exists for  $U$ . The linear space of  $U$  is complete, and we have an example of a "non-associative Banach algebra". Further examples of non-associative  $g$ -rings, and an example of a bounded conditional  $g$ -ring are given. A  $g$ -ring which contains the scalar matrices and is bounded is denoted by  $\mathfrak{F}$ . Finally, some results on bounds of infinite matrix sequences are established. A c-cgt (coordinate-convergent) sequence of matrices  $B^{(n)}$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} |B^{(n)}|$  and  $|B|$  both exist is called bound-convergent,

or b-cgt, where  $|B|$  denotes the bound of  $B$ . A sequence  $B^{(n)}$  in  $\mathfrak{F}$  is said to converge completely to  $B$  if  $|B|$  exists and  $|B^{(n)} - B| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . Theorem 5, I. If  $B^{(n)}$  is a sequence in  $\mathfrak{F}$  which is c-cgt to a matrix  $B$ , the bound being semi-closed [see reviewer's book mentioned above, p. 27] with respect to  $\mathfrak{F}$ , then  $|B| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |B^{(n)}|$ .

Corollary. If  $B^{(n)}$  is a b-cgt sequence, under a semi-closed bound, then  $|B| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |B^{(n)}|$ .

Theorem 5, II. If  $B^{(n)}$  converges completely to  $B$ , then (a)  $B^{(n)}$  is c-cgt to  $B$ , (b)  $B^{(n)}$  is b-cgt, (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |B^{(n)}| = |B|$ . R. G. Cooke.

**Chillingworth, H. R.: "On matrix transformations of certain sequence spaces".** Correction and note. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 316—318 (1958).

In Theorem IV of the author's paper (see this Zbl. **78**, 247), the assumption, five lines from the foot of the page "that  $p$  is not in a  $W$ -set for  $\beta$ " is not valid for certain types of convergence-free spaces, namely, those in which the distribution, and not



the position, of certain zero elements is the characteristic feature. In order to correct the theorem, the author classifies convergence-free spaces as follows [For definitions of the particular spaces  $O_1, O_2, \Phi, \delta, \sigma$ , referred to below, see the reviewer's "Infinite matrices and sequence spaces" (this Zbl. 40, 25), p. 273—274]: Class I. Spaces in which every sequence contains zero elements corresponding to a certain set of suffixes (fixed for the space), other elements remaining arbitrary; e. g.,  $O_1, O_2$ . Class II. Spaces in which every sequence is of the form  $x + y$ , where  $x$  is a sequence in  $\Phi$ , and  $y$  is a sequence in a (fixed) space of Class I. Class III. Spaces in which the distribution and not the position of zero elements is specified; e. g.,  $\delta$ . Class IV. Spaces which combine the above characteristics; e. g., a space in which sequence elements with even suffixes are zero, and zero elements with odd suffixes are distributed as in  $\delta$ . Class V. The space  $\sigma$ , in which no stipulation with regard to zero elements is made. Theorem IV of the author's paper, as given, applied only to spaces of Class I, and thus the proof of Theorem V was valid only for spaces of this class. However, since spaces of Classes II and V are seen to be perfect, Theorem V is (trivially) true for these classes also. The revised Theorem IV is as follows. If  $\alpha$  is a sequence space which is normal and contains a sequence without zero elements, and  $\beta$  is convergence-free, a matrix  $A = (a_{n,k})$  is in  $\alpha \rightarrow \beta$  if, and only if, (i) the row suffixes of the non-zero rows of  $A$  form a  $W$ -set for  $\beta$ , (ii) rows of  $A$  are in  $\alpha^*$  (the dual space of  $\alpha$ ). Corollary. If (1)  $\alpha \subseteq \lambda \subseteq \alpha^{**}$ , and  $\alpha$  is a normal sequence space containing a sequence without zero elements, (2)  $\beta$  is convergence-free, and (3)  $M(\lambda, \beta)$  is the matrix space which transforms sequences in  $\lambda$  to sequences in  $\beta$ , then

$$\alpha \rightarrow \beta = \lambda \rightarrow \beta = M(\lambda, \beta) = \alpha^{**} \rightarrow \beta.$$

This corollary is proved along the lines of the proof of Theorem V of the paper quoted, which it replaces.

R. G. Cooke.

Holladay, John C.: On the existence of a mixing measure. Proc. Amer. math. Soc. 8, 887—893 (1957).

Verf. gibt für eine Klasse eindeutiger (aber i. a. nicht eineindeutiger) Abbildungen  $f$  des Intervalls  $J = \langle 0, 1 \rangle$  in sich ein Verfahren zur Konstruktion von Maßen  $\mu$  an, die 1. dieselben Nullmengen haben wie das Lebesgue-Maß (es werden noch viel schärfere Bedingungen erfüllt), 2.  $f$ -invariant sind ( $\mu(f^{-1}E) = \mu(E)$ ) 3. unter  $f$  die starke Mischungseigenschaft besitzen. Die betrachteten Abbildungen  $f$  und ihre Iterierten sind stückweise gleichmäßig-stetig differenzierbar mit hinreichend großen Ableitungen. Gewisse Stücke von  $J$  breiten sich bei iterierter Anwendung von  $f$  über ganz  $J$  mit Ausnahme von endlich vielen Punkten aus.

K. Jacobs.

Kolmogorov, A. N.: A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 861—864 (1958) [Russisch].

Die Frage, ob alle transitiven Automorphismen vom Typus  $\mathcal{Q}_0^\omega$  isomorph mod 0 sind und ob das gleiche auch für alle transitiven „Flüsse“ vom Typus  $\mathcal{Q}^\omega$  gilt, war bislang noch offen. Verf. beantwortet diese Frage im negativen Sinne in beiden Fällen, indem er eine neue Invariante  $h$  — die „Entropie pro Zeiteinheit“ — einführt, die es gestattet, die Klasse der Automorphismen  $\mathcal{Q}_0^\omega$  und die Klasse der Flüsse  $\mathcal{Q}^\omega$  in ein Kontinuum invarianter Unterklassen aufzuspalten. Verf. gibt Beispiele für Automorphismen und Flüsse mit beliebigem  $h$  zwischen 0 und  $+\infty$  an. Zu Begriffen und Bezeichnungen vergleiche man W. A. Rohlin (dies. Zbl. 32, 284).

W. Richter.

Segal, I. E.: Ergodic subgroups of the orthogonal group on a real Hilbert space. Ann. of Math., II. Ser. 66, 297—303 (1957).

Integrationstheorie und harmonische Analyse in einem reellen Hilbert-Raum ähneln weitgehend den entsprechenden Theorien im euklidischen Raum. Hinsichtlich der ergodischen Wirkung der orthogonalen Gruppe liegen aber die Verhältnisse im Falle eines reellen, unendlich-dimensionalen Hilbert-Raumes  $H$  wesentlich anders als

im euklidischen Raum. Dies zeigt das folgende zentrale Resultat der vorliegenden Arbeit: Es sei  $G$  eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe von  $H$ , welche einen abgeschlossenen linearen Unterraum  $M$  von  $H$  punktweise invariant, jedoch keinen linearen Unterraum positiver endlicher Dimension des orthogonalen Supplementes von  $M$  in  $H$  invariant läßt. Dann ist jede bezüglich der orthogonal-invarianten normalen oder der Cliffordschen Verteilung quadratisch-integrierbare Funktion auf  $M$  konzentriert. Ein analoges Resultat gilt für das direkte Produkt der normalen und der Cliffordschen Verteilung, was für die Quantenfeldtheorie von Bedeutung ist. Im Falle  $M = \{0\}$  besagt das Hauptresultat, daß  $G$  ergodisch wirkt. Bezüglich der hier undefiniert verwendeten Begriffe muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *H. Bauer.*

**Régnier, André:** Variétés maximales, homogénéité ergodique. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 914—916 (1959).

In einem Banachraum  $B$  über dem Körper  $K$  der reellen oder komplexen Zahlen sei  $(T_n)_{n=0,1,\dots}$  eine abelsche Halbgruppe stetiger linearer Transformationen mit  $T_0 = \text{Identität}$  und  $\|T_n\| \leq 1$ . Für jedes  $x \in B$  wird  $S_n x = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} T_\nu x$  gesetzt. Konvergiert  $(S_n x)_{n=0,1,\dots}$  im Sinne der Normtopologie, so heißt  $x$  ergodisch; ist  $\lim S_n x = 0$ , so heißt  $x$  ergodisch-null. Elemente  $x, y \in B$  heißen ergodisch-homogen, wenn  $\lambda \neq 0$  und  $\mu \neq 0$  in  $K$  existieren derart, daß  $\lambda x - \mu y$  ergodisch-null ist. — Typische Resultate, die ohne Beweis mitgeteilt werden:  $x$  ist genau dann ergodisch-null, wenn keine stetige Linearform auf  $B$  existiert, welche auf der Menge aller  $T_n x$  einen konstanten Wert  $\neq 0$  besitzt.  $x$  ist dann und nur dann ergodisch und nicht ergodisch-null, wenn der lineare abgeschlossene Unterraum  $V(x)$ , der von allen  $T_n x$  erzeugt wird, einen Fixpunkt  $\neq 0$  enthält. Je zwei Elemente, die nicht ergodisch-null sind, sind genau dann ergodisch-homogen, wenn der lineare Unterraum aller Elemente, die ergodisch-null sind, maximal, d. h. eine Hyperebene ist. — Diese Begriffe und Resultate lassen sich auch auf abelsche Halbgruppen  $(T_\alpha)$  von Kontraktionen ausdehnen, wenn hierbei  $\alpha$  die Halbgruppe der reellen Zahlen  $\geq 0$  durchläuft. — (Bemerkung des Ref.: In einem vorbereitenden Abschnitt wird behauptet, daß ein linearer Unterraum  $V$  von  $B$  genau dann eine Hyperebene ist, wenn ein  $x_0 \in B$  und eine stetige Linearform  $a$  existiert mit:  $x - a(x)x_0 \in V$  für alle  $x \in B$ . Offenbar kennzeichnet diese Bedingung aber gerade die abgeschlossenen Hyperebenen.) *H. Bauer.*

**Raimi, Ralph A.:** On a theorem of E. Følner. Math. Scandinav. 6, 47—49, S 4 (1958).

If  $G$  is a group, and  $L$  a right translation-invariant, lattice-closed subspace of the normed linear space of bounded real-valued functions on  $G$ , and if there exists no continuous, positive, right translation-invariant functional on  $L$ , then  $L$  is the closed linear extension of the set  $\{Tf - f\}$ , where  $T$  runs through the right translation operators and  $f$  runs through  $L$ . With the extra hypothesis that  $L$  contains the constant functions this was proved by the reviewer (this Zbl. 80, 319), and when  $L$  is the space of all bounded functions, by M. M. Day (this Zbl. 39, 123). *E. Følner.*

**Riss, J.:** Les semi-normes dénombrablement convexes. Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A 3, 107—120 (1957).

$R(X)$  ist der Rieszsche Raum der auf einer Menge  $X$  definierten reellwertigen Funktionen  $f$ ; auf dem linearen Teilraum  $E$  heißt eine Pseudo- oder Semi-Norm  $p$  abzählbar konvex (a. k.), wenn für Funktionen  $f_n \in E$  ( $n \geq 0$ ) aus  $|f_0(x)| \leq \sum_{(n)} |f_n(x)|$  in jedem Punkt  $x \in X$  folgt  $p(f_0) \leq \sum_{(n)} p(f_n)$  (die auftretenden Reihen brauchen nicht immer zu konvergieren). Dies ist auch die Fundamentealeigenschaft des Oberintegrals; hier liegt somit nach dem Verf. ein Ausgangspunkt für eine Integraltheorie. Durch sinngemäße Erweiterung von  $p$  entsteht aus  $E$  ein linearer Teilraum  $(E, p) \supset E$  mit einer a. k. Semi-Norm  $p^*$ . Ist  $\tilde{E}_p$  die abgeschlossene Hülle

von  $E$  in  $(E, p)$  in bezug auf  $p^*$ , so läßt sich ein Hauptresultat formulieren: Jedes lineare positive a. k. Funktional über  $\tilde{E}_p$  ist Summe eines linearen positiven a. k. und in bezug auf  $p$  stetigen Funktionalen und eines (hier nicht näher zu charakterisierenden) singulären Funktionalen.

*J. Ridder.*

**Semadeni, Z.:** A localization theorem for multiplicative linear functionals. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 289—292, russ. Zusammenfassg. XXII (1958).

$T$  sei ein vollständig regulärer Hausdorffscher Raum.  $Y$  sei ein linearer Raum aus beschränkten Funktionen  $x(t)$  auf  $T$ , der bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen ist, die Konstanten enthält und mit  $x$  und  $y$  die Funktion  $x \vee y$ . Es sei  $\mathfrak{A}$  ein  $\sigma$ -Ideal von Teilmengen von  $T$ , das keine offenen Teilmengen von  $T$  enthält. Dann kann man in üblicher Weise den Quotientenraum  $Y/R$  definieren der Funktionen, die sich bis auf eine Menge aus  $\mathfrak{A}$  nicht unterscheiden, und als Norm das wesentliche Supremum  $\|X\| = \sup_R |x(t)|$  einführen. Man erhält einen  $(M)$ -Raum,

der nach Kakutani dargestellt werden kann als  $C(\Omega)$ ,  $\Omega$  der Raum der multiplikativen Funktionale auf  $Y/R$  in der schwachen Topologie. Ist  $t_0 \in T$  und  $\xi$  ein lineares Funktional auf  $Y/R$ , so heißt  $t_0$  Lokalisationspunkt von  $\xi$ , wenn für jede Umgebung  $U$  von  $t_0$  in  $T$  aus der wesentlichen Gleichheit von  $x$  und  $y$  auf  $U$  folgt, daß  $\xi(x) = \xi(y)$  ist. Mit  $L(t_0)$  wird die Menge aller multiplikativen  $\xi$  bezeichnet, die  $t_0$  als Lokalisationspunkt besitzen. Jeder Punkt von  $T$  ist Lokalisationspunkt eines multiplikativen linearen Funktionalen  $\xi$ . Ist  $T$  kompakt, so hat jedes multiplikative  $\xi$  wenigstens einen Lokalisationspunkt.  $Y/R$  trennt die Punkte  $u, v$  von  $T$ , wenn  $L(u) \cap L(v) = \emptyset$  gilt. Ist  $T$  kompakt und trennt  $Y/R$  die Punkte von  $T$ , so enthält  $Y/R$  den Raum  $C(T)$  und jedes lineare Funktional  $\xi$  mit  $t_0$  als Lokalisationspunkt läßt sich schreiben in der Form  $\xi(x) = \int_{L(t_0)} X(\eta) d\mu$ , wobei  $X(\eta)$  dem  $x(t)$  in  $C(\Omega)$  entspricht und

$\mu$  ein Borelsches Maß auf  $\Omega$  ist. Ohne Beweise.

*G. Köthe.*

**Sâmboan, G.:** Sur l'intégrale produit. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. **9**, 241—246, russ. und französ. Zusammenfassg. 245—246 (1957) [Rumänisch].

L'A. étend la définition de l'intégrale produit aux fonctions définies sur un segment  $[a, b]$  et à valeurs dans une algèbre de Banach, qui sont limites en mesure des suites de fonctions continues qui satisfont à la condition

$$\lim_{m, n} \int_a^b \|x_m(t) - x_n(t)\| dt = 0. \quad G. Marinescu.$$

**Love, E. R.:** A Banach space of distributions. II. J. London math. Soc. **33**, 288—306 (1958).

Dans cet article, l'A. continue à exposer sa manière de concevoir les distributions (ce Zbl. **78**, 112). Maintenant il s'occupe, en particulier, du produit multiplicatif.

*J. Sebastião e Silva.*

**Roumieu, Charles:** Nouvelles classes de distributions généralisées. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 346—348 (1959).

Soient  $\{M_p\}$  et  $\{N_p\}$  deux suites positives logarithmiquement convexes vérifiant

$$\liminf_p \frac{1}{p} \frac{M_p}{M_{p-1}} > 0, \quad \sum_{p=1}^{\infty} (N_p)^{-a/p} < +\infty.$$

L'A. appelle distributions généralisées les éléments du dual de l'espace des fonctions satisfaisant aux relations de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(p)(x)|^2 e^{2q|x|} dx \leq A h^{2p} e^{2rq} (M_p)^2 (N_q)^2.$$

Il donne la forme de ces distributions et un théorème d'existence pour l'équation  $\varphi * \varrho = \delta$ .

*G. Marinescu.*



● Michal, Aristotle D.: *Le calcul différentiel dans les espaces de Banach. Vol. 1: Fonctions analytiques. Équations intégrales.* Traduit de l'anglais par E. Mourier. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions.) Paris: Gauthier-Villars 1958. XIV, 150 p. 3000 F.

Das vorliegende Bändchen ist aus Vorlesungen und Seminaren entstanden, die der 1953 verstorbene Verf. seit den frühen dreißiger Jahren am California Institute of Technology abgehalten hat. Es gibt eine für den Anfänger bequem zugängliche Einführung in einen Zweig der Funktionalanalysis, der von Fréchet [Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 42, 293—323 (1925)] begründet und besonders auch von Michal und seinen zahlreichen Schülern breit ausgebaut worden ist. [Ein vollständiges Verzeichnis der Arbeiten von Michal findet sich in dem Nachruf von D. H. Hyers (dies. Zbl. 55. 2).] Diese Richtung hat bis vor wenigen Jahren noch kaum Beachtung gefunden, weil sie nur wenig spektakuläre Ergebnisse gezeitigt hatte; doch hat sich die Situation neuerdings durch Erweiterung der Ansätze (Verzicht auf Beschränktheit der vorkommenden linearen Operatoren, Heranziehung von allgemeineren lokalkonvexen Vektorräumen) und Vereinfachungen der Bezeichnungsweisen wesentlich gewandelt. Diese neueren Entwicklungen konnten im vorliegenden Band nicht berücksichtigt werden, so daß er als eine zusammenfassende Einführung in die Arbeiten des Verf., nicht aber als eine Monographie über die Differentialrechnung in Funktionalräumen anzusehen ist. Der Übersetzerin ist es allerdings gelungen, bei der Überarbeitung einige Vereinfachungen der Bezeichnungen und Kürzungen der Beweise auf das Wesentliche vorzunehmen, was beim Vergleich mit den Originalarbeiten des Verf. offenbar wird und von Fréchet in seinem Vorwort hervorgehoben wird. — Kapitel I behandelt die Darstellung des lösenden Kerns einer Volterraschen Integralgleichung durch die (hier nicht so genannte) Neumannsche Reihe. In II folgt die Definition der normierten Räume, der Polynome  $P_n(x)$  vom Grade  $n$  in ihnen (durch stetige  $n$ -fache Linearformen  $l(x_1, \dots, x_n)$  bei Gleichsetzung aller Argumente,  $P_n(x) = l(x, \dots, x)$ ) und der analytischen Funktionen (durch Reihen von Polynomen  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ ), wobei Abschätzungen für die Glieder einer solchen Reihe und für den Konvergenzradius breiten Raum einnehmen. Als Beispiel wird

in normierten Algebren mit Einselement die Exponentialfunktion  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

untersucht. Kapitel III bringt Definition und wichtigste Eigenschaften des Fréchet-Differentials (F-Differentials): Ist  $f(x)$  eine Abbildung einer offenen Menge eines normierten Raumes in einen zweiten normierten Raum, und gilt (für festes  $x$ )  $f(x + dx) - f(x) = f(x; dx) + \|dx\| \cdot \varepsilon$  für hinreichend kleine Vektoren  $dx$  mit in  $dx$  linearem  $f(x; dx)$  und  $\lim_{\|dx\| \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ , so heißt  $f(x; dx) = df = f'(x) dx$  F-Differential.

Die wichtigsten Regeln einschließlich der Kettenregel werden ausführlich bewiesen. Insbesondere werden Abschätzungen für die Beträge der Ableitungen von Polynomen gegeben. In IV und V folgen als Beispiele Herleitungen von Differentialgleichungen in F-Differentials, welchen der lösende Kern  $k(K)$  einer Volterraschen Integralgleichung mit Kern  $K$  und die Fredholmsche Determinante als Funktion des Kerns einer Fredholmschen Integralgleichung genügen. Im Kapitel VI werden Lösungen von gewöhnlichen F-Differentialgleichungen und Systemen, besonders im linearen Fall, als Funktionale der Koeffizientenmatrix diskutiert. Das siebente und letzte Kapitel bringt Kennzeichnungen der Exponentialfunktionen  $y(x) = e^x$  (in nicht notwendig kommutativen Banach-Algebren) durch eine Reihe von Funktional-differentialgleichungen von folgendem Typ:

$$dy = \int_0^1 y((1-t)x) dx y(t)x dt.$$

Der unbefangene Leser wird den Eindruck gewinnen müssen, daß sich für das F-Differential in Banach-Räumen alle die Sätze beweisen lassen, deren Formulierung aus der Differentialrechnung des  $n$ -dimensionalen Falles überhaupt sinnvoll übertragbar ist, und daß die Beweise sich in der Regel direkt aus dem Endlichdimensionalen übertragen lassen oder durch Betrachtung eindimensionaler Unterräume auf den Fall einer reellen oder komplexen Variablen reduziert werden können, was das Buch für den Anfänger besonders geeignet erscheinen läßt. Doch ist zu bedauern, daß auf weiterführende Untersuchungen (die auch beweistechnisch originelle Ideen enthalten) nicht einmal im Literaturverzeichnis hingewiesen wird, obwohl seit Hildebrandt und Graves, Trans. Amer. math. Soc. **29**, 127—153 (1927) eine Fülle interessanter Arbeiten vorliegt. Auch die sehr berechtigte Frage nach Anwendungen dieses Zweiges der Funktionalanalysis wird hier kaum berührt. Es ist zu hoffen, daß der zweite Band bald erscheinen kann, für den Anwendungen insbesondere auf topologische Gruppen (ohne Lokalkompaktheitsvoraussetzungen) in Aussicht gestellt werden. Es ist zu wünschen, daß die Bearbeiter sich dabei nicht (wie im vorliegenden Teil I) auf eine Reproduktion der Michalschen Ergebnisse beschränken, sondern die Fortschritte aus den letzten Jahren berücksichtigen; dies gilt auch für eine Vereinfachung der Bezeichnungsweise, für die insbesondere auf Nevanlinna verwiesen sei. Ein echtes Bedürfnis bestünde auch nach Anwendungen in der Analysis.

*D. Laugwitz.*

**Domšlak, Ju. I.: Über ein Kriterium für das Bestehen der Fredholmschen Alternative.** Akad. Nauk Azerbajdž. SSR, Doklady **14**, 839—842 (1958) [Russisch].

Soit  $A$  un opérateur linéaire et continu dans un espace de Banach. L'A. donne une démonstration simple du théorème suivant: Afin que l'équation  $\varphi - \lambda A \varphi = \psi$  satisfasse à l'alternative de Fredholm pour tout  $\lambda$  complexe, il faut et il suffit que  $\lim_n \left\{ \inf_V \|A^n - V\| \right\}^{1/n} = 0$ , où  $V$  parcourt l'ensemble des opérateurs complètement continus.

*G. Marinescu.*

**Collatz, L.: Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen.** Arch. rat. Mech. Analysis **2**, 66—75 (1958).

Let  $T$  be a continuous linear or non-linear operator in a complete convex region  $F$  of a Banach space with zero element  $\theta$ . It is required to determine  $u \in F$  such that  $Tu = \theta$ . For the actual treatment of the problem it is supposed that  $T$  has derivatives in the sense of Fréchet. The solution then is approximated by an iteration of the form  $f_{n-1} = f_n + \Phi(T_n'^{-1}, T_n, T_n', T_n'', \dots)$  where  $T = T f_n$ ,  $T_n' = T' f_n, \dots$  the prime indicating Fréchet differentiation. After a preliminary discussion of some known iteration methods of this type, a general existence theorem is established, including an estimation of the error  $\|u - f_n\|$ . Further some general hints are given concerning practical application of the method and it is illustrated by simple numerical examples: 1. Solution of  $u^2 - 2 = 0$ ; 2. the eigenvalue problem  $Ax = \lambda Bx$  for two  $2 \times 2$  matrices with integral elements. *H. Schwerdtfeger.*

**Yosida, Kôzaku: On the differentiability of semi-groups of linear operators.** Proc. Japan Acad. **34**, 337—340 (1958).

$T_t, 0 \leq t < +\infty$ , sei eine einparametrische Familie von beschränkten linearen Operatoren eines komplexen Banach-Raumes  $X$ , die folgende Bedingungen erfüllt: 1.  $T_0 = I$  = identischer Operator, 2.  $T_t T_s = T_{s+t}$ , 3.  $\lim_{t \rightarrow t_0} T_t x = T_{t_0} x$  für alle  $x \in X$ , 4.  $\|T_t\| \leq 1$  für alle  $t \geq 0$ .  $A$  sei der erzeugende infinitesimale Operator der Halbgruppe und  $R(\lambda, A)$  die Resolvente von  $A$ . Die Ableitung  $T_t'$  sei durch  $T_t' x = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (T_{t+h} - T_t) x$  definiert. Es werden folgende Aussagen bewiesen:  $T_t'$  existiert (für alle  $x \in X$ ) für  $t > 0$  und  $\overline{\lim_{t \downarrow 0} t \|T_t'\|} < +\infty$  gilt dann und nur dann, wenn  $\overline{\lim_{|\lambda| \uparrow \infty} |\lambda| \cdot \|R(1 + i\lambda, A)\|} < +\infty$  gilt. In diesem Falle läßt

sich die Halbgruppe in einen Sektor der komplexen Ebene hinein analytisch erweitern.  $T'_t$  existiert (für alle  $x \in X$ ) für  $t > 0$ , und  $\lim_{t \downarrow 0} t \log \|T'_t\| = 0$  gilt dann und nur dann, wenn  $\lim_{|\Im| \uparrow \infty} \log |\Im| \cdot \|R(1 + i \Im, A)\| = 0$  gilt. E. Thoma.

**Kurepa, Svetozar:** Semigroups of linear transformations in  $n$ -dimensional vector space. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 13, 3—32 (1958).

Let  $C_+$  and  $G_+$  be the semigroups of all non-negative real numbers and all non-negative dyadic numbers respectively supplied with the usual addition as a binary operation (a semigroup is always a set closed under a uniquely defined associative binary operation). The author considers certain mappings between the two above mentioned semigroups and the set of all linear transformations on an  $n$ -dimensional vector space  $R$  in such a way that, if  $\Phi(r)$  is a linear transformation on  $R$  which corresponds to the element  $r$  of  $G_+$  the mapping under consideration has to satisfy the condition:  $\Phi(r + r') = \Phi(r)\Phi(r')$ , with  $r, r' \in G_+$ ; so there is obtained a representation of the semi-group  $G_+$  by a semigroup  $\{\Phi(r)\}$  of linear transformations where the binary operation is the usual multiplication of two linear transformations on  $R$ . The same is valid with the semigroup  $C_+$ . The paper is devoted to the study of such representations of the semigroups  $G_+$  and  $C_+$  by semigroups of linear transformations on  $R$ . To every linear transformation  $A$  on  $R$  corresponds in the very known way a matrix  $A$ , which is related with a basis  $f_1, f_2, \dots, f_n$  in  $R$ . The author uses a known version of the notion of convergence of linear transformations, namely by means of their corresponding matrices: a sequence  $A_k$  of linear transformations tends to a linear transformation  $A$  if and only if  $A_k$  tends to  $A$  i. e.  $(\bar{A}_k)_{ij} \rightarrow (A)_{ij}$  for all  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , with respect to a basis  $f_1, f_2, \dots, f_n$  in  $R$ . According to this definition for every linear transformation  $A$ ,  $\exp A$  denotes the linear transformation  $E + A/1! + A^2/2! + \dots$ , where  $E$  is the identity transformation. The main theorem of the paper is: if  $\{\Phi(r)\}$  is a semigroup of linear transformations on  $R$  and  $\Phi(r)f = 0$  implies  $f = 0$  for every  $r \in G_+$  then there exists a basis  $f_1, f_2, \dots, f_n$  in  $R$  such that  $\bar{\Phi}(r) = \bar{U}(r) \exp r(\bar{A} + \bar{B})$  for every  $r \in G_+$ , where  $\bar{U}(r)$  is a semigroup of diagonal unitary matrices,  $\bar{A}$  a matrix such that  $A^n = 0$  and  $\bar{B}$  a diagonal hermitian matrix. The condition, as the author remarks, that the scalar 0 is not a proper value of any  $\Phi(r)$  is unessential, because the theorem is again true under a suitable formulation. A consequence of this theorem is that every semigroup  $\{\Phi(r)\}$  of linear transformations can be extended to a group of linear transformations  $\{\Phi'(r)\}$ , where now  $r$  runs all over the dyadic numbers such that  $\bar{\Phi}'(r) = \bar{\Phi}(r)$  for  $r \in G_+$  and  $\bar{\Phi}'(-r) = \bar{U}^*(r) \exp(-r(\bar{A} + \bar{B}))$  for  $r \in G_+$  (it is  $U \cdot U^* = E$ ). Another interesting theorem of the paper is that if  $\{\Phi(t)\}$  is a semigroup of linear transformations on  $R$ ,  $\Phi(t)f = 0$  implies  $f = 0$  for every  $t \in C_+$  and if there exists a set  $T \subseteq [0, +\infty): 1. m_i(T + T) > 0$  ( $m_i(S)$  denotes the inner Lebesgue measure of a subset  $S$  of the real line), 2.  $\sup_{t \in T} |\Phi_{ij}(t)| < +\infty$  for all  $i, j = 1, 2, \dots, n$  ( $|\Phi_{ij}(t)|$  denotes the absolute value of the element  $\Phi_{ij}(t)$  in the matrix  $\bar{\Phi}(t)$ ), then there exist a basis  $f_1, f_2, \dots, f_n$  in  $R$ , a matrix  $\bar{A}$  and a semigroup of diagonal unitary matrices  $\bar{U}(t)$  such that  $\bar{\Phi}(t) = \bar{U}(t) \exp(t\bar{A})$ , all the matrices being considered with respect to the basis  $f_1, f_2, \dots, f_n$  of  $R$ . As a corollary there follows a theorem of B. Sz. Nagy for the case of an  $n$ -dimensional vector space (cf. this Zbl. 29, 305). Some other results are e. g.: if  $\Phi(1/2^k) \rightarrow E$  as  $k \rightarrow +\infty$  there exists a uniquely determined linear transformation  $\Phi$  such that  $\Phi(r) = \exp(r\Phi)$  for all  $r \in G_+$ . If also  $\Phi(t)$  is a continuous function on a perfect set  $T$  which has the property:  $m(T + T) > 0$  then  $\Phi(t) = \exp(t\Phi)$  for every  $t \in C_+$ , where  $\Phi$  is a linear transformation uniquely determined by  $\Phi(t)$ . A. Mallios.



Ionescu Tulcea, Cassius: Spectral representation of semigroups of normal operators. Proc. nat. Acad. Sci. USA 44, 44—45 (1958).

Verf. kündigt Sätze über Spektralzerlegungen schwachstetiger normaler Darstellungen gewisser lokal kompakter abelscher Halbgruppen an. Sei  $\mathfrak{G}$  eine lokal kompakte Gruppe und  $\mathfrak{S}$  eine relativ lokal kompakte kommutative Unterhalbgruppe von  $\mathfrak{G}$ , derart, daß  $\mu(U) > 0$  ist für jede nicht leere in  $\mathfrak{S}$  offene Teilmenge  $U \subset \mathfrak{S}$ ,  $\mu$  das vom Haarschen auf  $\mathfrak{S}$  induzierte Maß. Ein Charakter auf  $\mathfrak{S}$  ist eine nicht identisch verschwindende stetige multiplikative Abbildung von  $\mathfrak{S}$  in die komplexen Zahlen. Sei  $\mathcal{U}$  eine offene relativ kompakte Überdeckung von  $\mathfrak{S}$  und  $r(X)$  für jedes  $X \in \mathcal{U}$  eine reelle Zahl  $\geq 1$ . Proposition 1: Die Menge  $E(r)$  aller Charaktere  $c$  auf  $\mathfrak{S}$  mit  $|c(t)|^2 \leq r(X)$  für alle  $X \in \mathcal{U}$  und  $t \in X$  ist ein lokal kompakter Raum bezüglich der Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf den kompakten Teilen von  $\mathfrak{S}$ . — Nun sei  $H$  ein Hilbertscher Raum und  $X$  ein lokal kompakter Raum. Eine Familie  $\{\mu_{x,y}; x, y \in H\}$  beschränkter Radonscher Maße auf  $X$  heißt Spektral-Familie, wenn 1.  $\mu_{x+y,z} = \mu_{x,z} + \mu_{y,z}$ , 2.  $\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$ , 3.  $|\mu_{x,y}| \leq x|y|$  und 4.  $g\mu_{x,y} = \mu_{U_g x, U_g y}$  ist für jede stetige reelle Funktion  $g$  auf  $X$  mit kompaktem Träger.  $U_g$  ist hierbei der durch  $(U_g x, y) = \int_X g d\mu_{x,y}$  definierte

beschränkte Operator auf  $H$ . (Wegen der Eigenschaften 1. bis 3. ist diese Definition sinnvoll.) — Satz 1: Zu jeder schwach stetigen Darstellung  $t \rightarrow U_t$  von  $\mathfrak{S}$  durch beschränkte Operatoren  $U_t$  des Hilbert-Raumes  $H$  mit  $|U_t|^2 \leq r(X)$  für alle  $X \in \mathcal{U}$ ,  $t \in X$ , existiert genau eine Spektral-Familie  $\{\mu_{x,y}\}$  auf  $E(r)$  mit  $(U_t x, y) = \int_{E(r)} c(t) d\mu_{x,y}(c)$  für alle  $x, y \in H$ ,  $t \in \mathfrak{S}$ . Genau dann ist  $|\mu_{x,x}| = |x|^2$  für

alle  $x \in H$ , falls zu jedem  $x \neq 0$  aus  $H$  ein  $t \in \mathfrak{S}$  mit  $U_t x \neq 0$  existiert. — Ist der Raum  $E$  aller Charaktere auf  $\mathfrak{S}$  in der kompakt-offenen Topologie lokal kompakt (hierfür wird ein Kriterium angegeben), so gilt für Darstellungen von  $\mathfrak{S}$  durch normale, nicht notwendig beschränkte Operatoren von  $H$  ein zu Satz 1 analoger Satz 2 mit Spektral-Familien auf  $E$ . Diese Sätze verallgemeinern zahlreiche bekannte Ergebnisse von Stone, Hille u. a.

H. Leptin.

Foiaş, Ciprian: Sur la décomposition intégrale des familles semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 904—906 (1959).

Es sei  $\mathfrak{B}$  die Klasse der Borelmengen eines lokalkompakten Raumes, der im Unendlichen abzählbar ist.  $\mathfrak{H}$  sei ein Hilbertraum abzählbarer Dimension mit dem Skalarprodukt  $(e, f)$ ; Ist für jedes  $\sigma \in \mathfrak{B}$  ein symmetrischer Operator  $B(\sigma)$  auf  $\mathfrak{H}$  gegeben mit  $0 \leq B(\sigma) \leq 1$  und ist  $(B(\sigma)e, e)$  für jedes  $e \in \mathfrak{H}$  ein reguläres Maß, so bilden die  $B(\sigma)$  eine Halbspektralschar. Auf einem dichten Teilraum  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{H}$  sei eine neue Norm  $\|e\|_1$  so eingeführt, daß der zugehörige Banachraum  $\mathfrak{E}_1$  von abzählbarem Typus und die Einbettung von  $\mathfrak{E}$  in  $\mathfrak{H}$  nuklear ist. Dann ist  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}_1$ . Mit  $\langle e^*, e \rangle$  seien die antilinearen stetigen Linearfunktionen auf  $\mathfrak{E}_1$  bezeichnet,  $e^* \in \mathfrak{E}_1^*$ . Es gibt dann ein positives reguläres Maß  $\mu(\sigma)$ ,  $\sigma \in \mathfrak{B}$ , so daß aus  $\mu(\sigma) = 0$  stets  $B(\sigma) = 0$  folgt. Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine  $\mu$ -fast überall eindeutig bestimmte Funktion  $\chi(t)$ ,  $t \in T$ , mit Werten in  $\mathfrak{L}(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_1^*)$ , so daß  $\|\chi(t)\|_1 \mu$ -integrabel ist und für alle  $e, f \in \mathfrak{H}$  und  $\sigma \in \mathfrak{B}$  die Integraldarstellung  $(B(\sigma)e, f) = \int_{\sigma} \langle \chi(t)e, f \rangle d\mu(t)$  gilt. Es gilt stets  $\langle \chi(t)e, e \rangle \geq 0$ . Umgekehrt gehört zu jeder solchen Funktion  $\chi(t)$  eine eindeutig bestimmte Halbspektralschar. Die  $\chi(t)$  sind für alle  $t$  nuklear. Sind speziell  $E(\sigma)$  und  $E'(\sigma)$  zwei Spektralscharen, so sind sie dann und nur dann unitär äquivalent, wenn die zugeordneten Operatoren  $\chi(t)$  und  $\chi'(t)$   $\mu$ -fast überall denselben Rang haben. Auch die Multiplizität einer Spektralschar kann an dem Rang von  $\chi(t)$  abgelesen werden. Ohne Beweise. G. Köthe.

Putnam, C. R.: On square roots of normal operators. Proc. Amer. math. Soc. 8, 768—769 (1957).

Es sei  $N$  ein beschränkter, normaler Operator eines Hilbertraumes  $\mathfrak{H}$ , der in ganz  $\mathfrak{H}$  erklärt ist.  $A$  sei eine Quadratwurzel von  $N$ , d. h. es gelte  $A^2 = N$ . Es wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß der Operator  $A$  ebenfalls normal ist.

*H. Krumhaar.*

**Babuška, Ivo:** Über Schwarzsche Algorithmen in partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Czechosl. math. J. 8 (83), 328—342, dtsh. Zusammenfassg. 342—343 (1958) [Russisch].

L'A. étudie la convergence de la méthode classique de H. A. Schwarz (et des méthodes voisines, dites de type Schwarz, pour résoudre des problèmes aux limites „mêlés“). Il s'appuie sur le principe abstrait suivant (plusieurs formulations équivalentes): Théorème. Soient  $H, H_1, H_2$  des sous-espaces (fermés) d'un espace hilbertien fixe,  $H = H_1 \cap H_2$ ; soient  $P, P_1, P_2$  les projecteurs correspondants. Alors on a  $P = \lim_{i \rightarrow \infty} (P_1 P_2)^i$  (au sens fort). Application typique: Soient  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$  des ouverts

de  $R^n$ . On se donne un sous-espace (fermé)  $V$  de  $E_{L^2}^m(\Omega)$  et une forme hermitienne  $\theta(u, v)$  sur  $V \times V$ , définie positive,  $\theta(u, u) \geq c \|u\|_m^2$  ( $c > 0$ ) pour toute  $u \in V$ , et on considère le problème aux limites associé à  $(V, \theta)$  (Lions): Etant donnée  $f \in V'$ , chercher  $u \in V$  telle que  $\theta(u, q) = (f, q)$  pour toute  $q \in V$ . On pose  $V_1 (V_2)$ , le sous-espace de  $V$  des distributions dans  $V$  qui s'annulent dans  $\Omega_2 \cap C\Omega_1 (\Omega_1 \cap C\Omega_2)$ . On construit maintenant récursivement la suite  $(u_i)_{i \geq 0}$ :  $u_0 = 0$ ;  $u_{2k} - u_{2k-1} \in V_2$ ,  $\theta(u_{2k}, q) = (f, q)$  pour toute  $q \in V_2$ ;  $u_{2k+1} - u_{2k} \in V_1$ ,  $\theta(u_{2k+1}, q) = (f, q)$  pour toute  $q \in V_1$ . Alors on a  $u = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ . [Remarque. La méthode de Schwarz et

des méthodes encore plus générales — y compris la méthode de balayage de Poincaré — ont été étudiées récemment par Browder, J. Math. Mech. 7, 69—80 (1958), dans le cas du problème de Dirichlet. Celui-ci s'appuie sur un résultat antérieur de Kakutani qui contient le théorème mentionné ci-dessus comme cas particulier.]

*J. Peetre.*

**Hartman, Philipp:** Perturbation of spectra and Krein extensions. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 5, 341—354 (1957).

Diese Arbeit bringt einige Sätze über die Approximation von Punkten des zu einem selbstadjungierten Operator  $A$  gehörenden Spektrums. Verf. benutzt zu diesem Zweck eine Folge von Operatoren  $A_k$ , die durch selbstadjungierte Fortsetzungen der Einschränkungen des Operators  $A$  auf eine (unendliche) Folge von gewissen abgeschlossenen, anwachsenden linearen Unterräumen des zugrunde liegenden Hilbert-Raumes entstehen. Es werden Bedingungen für die Operatoren  $A_k$  angegeben, unter denen eine vorgegebene Zahl  $\lambda$  dem Häufungsspektrum von  $A$  angehört. Ferner wird u. a. gezeigt, daß sich unter bestimmten Voraussetzungen die links vom tiefsten Punkt des Häufungsspektrums von  $A$  liegenden Eigenwerte von  $A$  durch entsprechende Eigenwerte der Operatoren  $A_k$  approximieren lassen. Dabei werden einige im ersten Teil der Arbeit bewiesene Eigenschaften der Friedrichsschen und Kreinschen selbstadjungierten Fortsetzungen eines abgeschlossenen, hermiteschen Operators  $T$  herangezogen, der eine Lücke  $(\alpha, \beta)$  besitzt, d. h. bei dem

$$\|(T - \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha))f\| \geq \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \|f\|$$

ausfällt für alle Elemente  $f$  seines Definitionsbereiches.

*H. Krumhaar.*

**Charazov (Kharazov), D. F.:** On a certain class of operators dependent nonlinearly on a parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 819—822 (1957) [Russisch].

$X$  sei ein Hilbertraum. Es werden Sätze über die Verteilung der Eigenwerte und die Eigenschaften der Eigenelemente der Gleichung:

$$A_\lambda x = x - A_0 x - \lambda \left\{ A_1 x + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - a_i} H_i x \right\} = y \quad (x, y \in X),$$

bewiesen. Hierbei sei  $\{a_i\}$  eine Folge reeller Zahlen,  $a_i \neq 0$ ,  $A_0, A_1, H_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) seien lineare selbstadjungierte Operatoren, über die eine Reihe von weiteren Voraussetzungen gemacht wird.

W. Thimm.

Kužel' (Kuzhel), A. V.: The reduction of unbounded not self-adjointed operators to a triangular form. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 868—871 (1958) [Russisch].

L'A. étend aux opérateurs non bornés les considérations de M. S. Lifschitz (ce Zbl. 57, 100). Le modèle qu'il construit contient comme élément nouveau l'opérateur de dérivation  $i^{-1} df/dx$ .

G. Marinescu.

Šnol', É. É.: Ein Brief an die Redaktion. Mat. Sbornik, n. Ser. 46 (88), 259 (1958) [Russisch].

Betrifft die Arbeit von Glazman, dies. Zbl. 56, 345.

## Praktische Analysis:

Stiefel, E.: Recent developments in relaxation techniques. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 1, 384—391 (1957).

Bezeichnungen:  $R^m$  sei der  $m$ -dimensionale euklidische Vektorraum, für den wir die übliche Schreibung des reellen Hilbertraumes verwenden:  $x, y, r, k, x_i, r_i, v_i, \dots$  sind Elemente aus  $R^m$ ,  $(x, y)$  das skalare Produkt,  $\|x\|^2 = (x, x)$ ,  $Ax$  bedeutet eine Abbildung von  $R^m$  auf sich, d. h.  $A$  eine Matrix; analog sind  $Bx$  oder  $B_i x$  oder  $Cx$  oder  $C_i x$ , wo  $Ax_i = x_{i+1} - x_i$ , zu verstehen. Dann handelt es sich um die Aufgabe,  $x$  gemäß (1)  $Ax = k$  ( $A, k$  gegeben) zu bestimmen. Ist  $x_i$  eine Näherung, so gehört zu ihr der Residuenvektor, kurz das Residuum (2)  $r_i = k - Ax_i$ . Verf. gibt zunächst eine gedrängte Übersicht über die sog. linearen Iterationsverfahren zur Lösung von (1), wobei er speziell die Verfahren der Ordnung 1 und 2 betrachtet: im Falle der Ordnung 2 lautet die Iterationsvorschrift (3)  $x_{i+1} = B_i x_i - C_i x_{i-1} + v_i$ , wo die Matrizen  $B_i, C_i$  i. a. von  $A$  abhängen; (3) läßt sich so schreiben (4)  $Ax_{i+1} = A_i r_i + C_i Ax_i$  mit  $A_i = (1 - B_i - C_i)A^{-1}$ ; ist die Ordnung 1, so vereinfacht sich die Vorschrift zu (5)  $Ax_{i+1} = A_i r_i$ ; alle klassischen Verfahren sind von der Ordnung 1 und unterscheiden sich nur in der Wahl der Matrizen  $A_i$  voneinander. Anschließend behandelt Verf. die Relaxationsmethode und setzt dabei  $A$  als symmetrisch und positiv definit voraus; bei dieser Methode wird als Maß für die Abweichung  $y_i = A^{-1}k - x_i$  nicht  $\|y_i\|^2$ , sondern (6)  $\varphi_i = (A^{-1}r_i, r_i)$  genommen. Die Methode besteht dann darin, bei jedem Schritt dieses Fehlermaß zu verkleinern, präziser,  $\varphi = \varphi_i$  so klein als möglich zu machen. Gegenüber dieser „taktischen“ Seite hat aber die Relaxationsrechnung noch eine „strategische“ Seite, die zu der folgenden Aufgabe führt: unter allen Algorithmen von gegebener Schrittzahl  $n$  ist derjenige gesucht, für den die  $n$ -te Näherung  $x_n$  im Sinne der  $\varphi$ -Metrik (6) der wahren Lösung am nächsten kommt. Für dieses schwierige Problem, das noch weit entfernt von einer Lösung ist, gibt Verf. für den Spezialfall, daß (4) eine skalare Iteration ist, d. h. an Stelle der Matrizen  $A_i, C_i$  Skalare  $a_i, c_i$  stehen: (7)  $Ax_{i+1} = a_i r_i + c_i Ax_i$ , die vollständige Lösung. Zunächst folgt aus (7), daß ( $x_0 = 0$  angenommen)  $x_i$  eine Linearkombination der iterierten Vektoren  $k, Ak, \dots, A^{i-1}k$  ist: (8)  $x_i = F_{i-1}(A)k$ , wo  $F_{i-1}(\lambda)$  ein Polynom vom Grad  $i-1$  in der Unbestimmten  $\lambda$  ist; weiter ist das Residuum (2) durch (9)  $r_i = [1 - F_{i-1}(A)]k = R_i(A)k$  mit (10)  $R_i(\lambda) = 1 - \lambda F_{i-1}(\lambda)$  gegeben. Aus (10) folgt (11)  $R_i(0) = 0$ . Benutzt man für die Koordinaten das System der Hauptachsen von  $A$ , so ist  $A$  eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , wo  $\lambda_j > 0$ , und es folgt aus (9) für die  $j$ -te Koordinate  $r_{ij}$  von  $r_i$  ( $k_j$  die analoge Koordinate von  $k$ ) (11)  $r_{ij} = R_i(\lambda_j)k_j$ ; weiter für die  $j$ -te Koordinate von  $A^{-1}r_i$  dann  $\frac{R_i(\lambda_j)}{\lambda_j}k_j$  und damit (12)  $\varphi_i = \sum_j \frac{R_i^2(\lambda_j)}{\lambda_j} k_j^2$ . Das durch (12) gegebene Maß verallgemeinert Verf. zu (13)  $\psi_i = \int_0^1 \frac{R_i^2(\lambda)}{\lambda} \varrho(\lambda) d\lambda$ , wo  $\varrho(\lambda)$  eine beliebige



Dichtefunktion ist und 1 als obere Schranke für die Eigenwerte angenommen wurde. Nimmt man in (13) speziell (14)  $\varrho(\lambda) = \sum_j k_j^2 \delta(\lambda - \lambda_j)$ , wo  $\delta$  die Diracfunktion ist, so erhält man wieder (12). Man orthogonalisiere nun mit der Dichtefunktion  $\varrho(\lambda)$  die Potenzen  $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \dots$  und normiere die entstehenden Polynome  $P_0(\lambda) = 1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots$  gemäß (11):  $P_r(0) = 1$ . Dann formuliert Verf. (ohne Beweis) den fundamentalen schönen Satz: Unter allen Polynomen  $n$ -ten Grades  $R_n(\lambda)$  mit  $R_n(0) = 1$  nimmt das Fehlermaß  $\psi$  sein Minimum für  $R_n(\lambda) = P_n(\lambda)$  an. — Da bekanntlich  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  durch eine lineare Rekursionsformel verknüpft sind, ergibt sich wegen der Normierung (11) diese leicht zu

$$(15) \quad P_{i+1}(\lambda) = (1 + c_i - a_i \lambda) P_i(\lambda) - c_i P_{i-1}(\lambda).$$

Aus (9) und (15) folgt für die Residuen (16)  $r_{i+1} = (1 + c_i - a_i \lambda) r_i - c_i r_{i-1}$ , und daraus (17)  $\Delta r_{i+1} = a_i r_i + c_i \Delta r_i$ , also eine skalare Iteration von der Ordnung 2. Wendet man also die Iteration (17) an, wobei man die Skalare  $a_i, c_i$  aus (15) zu nehmen hat, so ist der Prozeß (17) der strategisch beste für die zugrunde gelegte Dichte  $\varrho(\lambda)$  im Sinne des durch sie nach (13) bestimmten Fehlermaßes. Da der Prozeß (17) der beste ist, braucht man zu keinen Iterationsprozessen höherer Ordnung zu greifen. Verf. diskutiert anschließend drei Möglichkeiten, wie man die Dichtefunktion  $\varrho(\lambda)$  wählen kann. Weiter bemerkt er, daß man natürlich  $\varrho(\lambda)$  wenn möglich so wählen wird, daß das  $\psi$ -Maß (13) das frühere  $\varphi$ -Maß (12) liefert, also gemäß (14), wozu aber bemerkt werden muß, daß die Eigenwerte  $\lambda_j$  unbekannt sind, so daß man anders vorgehen muß. Nun folgt aber unter Verwendung von (14) sofort

$$(18) \quad \int_0^1 R_p(\lambda) R_q(\lambda) \varrho(\lambda) d\lambda = \sum_j r_{pj} r_{qj} = (r_p, r_q),$$

wo die linke Seite  $= 0$  ist für  $p \neq q$ . Das heißt aber: der Relaxationsprozeß hat die Eigenschaft, daß die Residuenvektoren ein Orthogonalsystem bilden, und bedeutet für (17): die dortigen  $a_i, c_i$  müssen so bestimmt werden, daß das durch (16) definierte Residuum  $r_{i-1}$  orthogonal zu  $r_i$  und  $r_{i-1}$  ist; und weiter folgt daraus, daß der Residuumsvektor nach endlich vielen Schritten verschwinden muß. Nach einem Satz von Hestenes ist nun jede endliche Iteration äquivalent der von Hestenes und Verf. entwickelten Methode der konjugierten Gradienten. Somit kann Verf. den Satz aussprechen: unter allen skalaren Iterationsprozessen ist die Methode der konjugierten Gradienten die im Sinne der  $\varphi$ -Metrik strategisch beste. *E. Mohr.*

Stiefel, E.: Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximationen. Numerische Math. 1, 1—28 (1959).

In dieser ebenso inhaltsreichen wie schönen Abhandlung geometrisiert Verf. die Theorie der  $T$ -Approximation (der Buchstabe  $T$  sei hier stets für Tschebyscheff reserviert) außerordentlich klar und durchsichtig und führt alle Beweise konstruktiv, so daß die einzelnen Behauptungen jeweils durch eine entsprechende Rechentechnik, die optimal arbeitet, in endlich vielen Schritten erreicht werden können. Auf diesem Wege beweist Verf. klassische Resultate von de la Vallée-Poussin neu und schafft gleichzeitig eine Grundlage für neue Ergebnisse und fruchtbare Fragestellungen. Bezeichnungen, Fragestellung und grundlegende Begriffe:  $(x_1, \dots, x_m)$  wird als Punkt  $P$  eines euklidischen Raumes  $R^m$  aufgefaßt. Vorgelegt ist ein überbestimmtes System von  $n$  linearen Gleichungen

$$(1) \quad a_{j1} x_1 + \dots + a_{jm} x_m + c_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n; \quad n > m),$$

wobei angenommen wird, daß (2): je  $m$  Gleichungen von (1) denselben Rang  $m$  haben; geometrisch heißt das: je  $m$  unter den Ebenen  $E_1, \dots, E_n$  von (1) schneiden sich in genau einem Punkt. Setzt man einen Punkt  $P$  in (1) ein, so sind die linken Seiten von (1) nicht alle Null, vielmehr verbleiben Residuen (3)  $h_j = a_{j1} x_1 + \dots + a_{jm} x_m + c_j$ . Die Tschebyscheffsche Ausgleichsaufgabe verlangt: (4)  $P$  ist so

zu bestimmen, daß  $\max |h_j|$  ( $j = 1, \dots, n$ ) möglichst klein wird. Ein solcher Punkt heißt Tschebyscheff-, kurz  $T$ -Punkt. Alle im folgenden auftretenden Begriffe und Sätze werden besonders anschaulich, wenn die Stellungsvektoren der Ebenen (5)  $n_j = \{a_{j1}, \dots, a_{jm}\}$  normiert sind (der sogenannte „Abstandsfall“). (6) „Referenz“ heißt jede Auswahl  $[E_\sigma]$  von  $m+1$  unter den gegebenen Ebenen  $E_1, \dots, E_n$  (der Buchstabe  $\sigma$  bleibt stets einer solchen Auswahl vorbehalten); schneiden sich die Ebenen von  $[E_\sigma]$  nicht zufällig in einem Punkt, so bilden sie ein Simplex des  $R^m$ ; für die zugehörigen Stellungsvektoren  $n_\sigma$  gilt nach Voraussetzung eine Beziehung (7)  $\sum \lambda_\sigma n_\sigma = 0$ , wo (8)  $\lambda_\sigma \neq 0$  (für alle  $\sigma$ ) und die  $\lambda_\sigma$  bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt sind; (7) heißt die zur Referenz gehörige charakteristische Relation. (8) Ein Punkt  $P$  heißt „Referenzpunkt“, wenn für seine Residuen  $h_\sigma$  entweder stets (8a)  $\operatorname{sgn} h_\sigma = \operatorname{sgn} \lambda_\sigma$  oder stets (8b)  $\operatorname{sgn} h_\sigma = -\operatorname{sgn} \lambda_\sigma$  für alle  $\sigma$  der Auswahl  $[E_\sigma]$  gilt; geometrisch bedeutet das einfach:  $P$  befindet sich im Innern des von den Referenzebenen gebildeten Simplex. (9) Ein Punkt  $P$  des  $R^m$  heißt Referenzpunkt schlechthin, wenn mindestens eine Referenz  $[E_\sigma]$  existiert, bezüglich welcher  $P$  Referenzpunkt ist, d. h. entweder (8a) oder (8b) gilt. (10) „Zentrum einer Referenz“ ist derjenige eindeutig bestimmte Referenzpunkt, dessen Residuen  $h_\sigma$  alle denselben Betrag haben; er ist charakterisiert durch (11)  $h_\sigma = h \operatorname{sgn} \lambda_\sigma$ , wo  $h > 0$  oder  $h < 0$  sein kann. (12)  $|h|$  heißt die „Referenzabweichung“ der gegebenen Referenz  $[E_\sigma]$ ; im „Abstandsfall“ ist das Zentrum von  $[E_\sigma]$  offenbar der Mittelpunkt der Inkugel des zu  $[E_\sigma]$  gehörigen Simplex und die Referenzabweichung  $|h|$  deren Radius; allgemein ist  $|h|$  ein Maß dafür, um wieviel die Ebenen  $E_\sigma$  davon abweichen, sich in einem Punkt zu schneiden. — Auf dieser Grundlage beweist Verf. elegant und kurz die folgenden Sätze: Satz 1:  $|h| = \sum |\lambda_\sigma| |h_\sigma| / \sum |\lambda_\sigma|$  ( $|h| =$  „gewogenes Mittel“); Satz 2:  $\min |h_\sigma| \leq |h| \leq \max |h_\sigma|$  („Minimax-Eigenschaft“ des Zentrums); Satz 3: Das Zentrum einer Referenz  $[E_\sigma]$  ist der  $T$ -Punkt der zugehörigen Referenzebenen; Satz 4: Der  $T$ -Punkt in Satz 3 ist eindeutig bestimmt; Satz 5 (Austauschsatz):  $[E_\sigma]$  sei eine Referenz,  $P$  ein zugehöriger Referenzpunkt und  $E_i$  eine weitere unter den  $n$  Ebenen  $E_1, \dots, E_n$ , die nicht zu  $[E_\sigma]$  gehört. Dann kann aus  $m$  Ebenen von  $[E_\sigma]$  und  $E_i$  eine neue Referenz gebildet werden, für die  $P$  wieder Referenzpunkt ist. — Mit Hilfe von Satz 5 kann nun Verf. die Aufgabe (4) konstruktiv lösen: 1) man geht von einer Referenz aus, berechnet ihr Zentrum  $Z$  und ihre Referenzabweichung  $|h|$ , sowie sämtliche Residuen  $h_j$  von  $Z$  bezüglich  $E_1, \dots, E_n$ ; ist  $|h_j| \leq |h|$ , so ist man am Ziel; 2) andernfalls existiert eine Ebene  $E_i$  mit  $|h_i| > |h|$ ; nach Satz 5 kann eine Ebene von  $[E_\sigma]$  gegen  $E_i$  so ausgetauscht werden, daß  $Z$  Referenzpunkt bezüglich der neuen Referenz  $[E_\sigma^*]$  bleibt; deren Referenzabweichung  $|h^*|$  ist dann  $> |h|$ . Wiederholung von Schritt 2) führt nach endlich vielen Schritten zu einem letzten Zentrum  $\tilde{Z}$  einer Referenz  $[\tilde{E}_\sigma]$  mit einer Abweichung  $|\tilde{H}|$ ; sind  $\tilde{h}_j$  die Residuen von  $\tilde{Z}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), so ist  $|\tilde{h}_j| \leq |\tilde{H}|$  und es ist  $\tilde{Z}$  der gesuchte  $T$ -Punkt. Weiter gilt: löst man (1) nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Lösung heiße kurz Gauß-Punkt, so kann man den Schritt 1) stets mit einem Gauß-Punkt ausführen. Verf. erläutert sein Verfahren und die zugehörige Rechentechnik an einem Beispiel. — Anschließend bringt Verf. die Anwendung auf die Approximation von Funktionen einer Variablen: die betr. Aufgabe erscheint einfach als ein Spezialfall des allgemeinen Problems (4). Im letzten Abschnitt seiner Arbeit dehnt Verf. die klassische Theorie der Entwicklung einer Funktion  $f(x)$  nach Tschebyscheffschen Polynomen in einer Weise aus, die dem betr. Approximationsproblem besonders angepaßt ist: an Stelle der Tschebyscheffschen Polynome treten andere Funktionen, von ihm  $S$ -Funktionen genannt: die  $S$ -Funktionen bauen sich linear aus gewissen Basisfunktionen  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  auf, welche mit den Sturm-Liouvilleschen Eigenfunktionen manches gemeinsam haben. Für die Einzelheiten dieser in die Zukunft weisenden Theorie muß auf die Arbeit verwiesen werden.

**Ostrowski, Alexander M.:** On Gauss' speeding up device in the theory of single step iteration. *Math. Tables Aids Comput.* **12**, 116—132 (1958).

Für die iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme durch Relaxation hat Gauß dem Koeffizientenschema eine aus den negativen Koeffizientensummen bestehende zusätzliche Zeile und Spalte angefügt, wodurch er die Summenprobe herbeiführt. Diese Modifikation führt in gewissen Fällen zu merklicher Konvergenzbeschleunigung. Hier wird für den Fall reell symmetrischer positiv definiter Matrix zunächst für das zyklisch geführte Einzelschritt-Verfahren gezeigt, daß auch das modifizierte Verfahren wie das gewöhnliche konvergiert, weiter, daß es Matrizen jeder Ordnung  $n \geq 2$  gibt, für die es rascher, aber auch solche, für die es langsamer als das gewöhnliche Verfahren konvergiert. Für eine von Seidel stammende Einzelschritt-Vorschrift wird sodann gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeit für Konvergenzbeschleunigung zufolge der Gaußschen Modifikation positiv ausfällt. *R. Zurmühl.*

**Chao, F. H.:** Comparison of gradient methods with applications. *Sci. Sinica* **7**, 565—581 (1958).

L'A. compare diverses méthodes de gradient pour la solution des systèmes linéaires par diminution meilleure du résidu (module du vecteur résidu) ou de la déviation (distance de la solution approchée à la solution exacte) et montre qu'en général il vaut mieux minimiser la déviation. Des exemples numériques sont donnés; la méthode est appliquée à l'approximation successive des vecteurs propres. Les travaux de Hestenes, Stiefel (ce Zbl. **48**, 99) ne sont pas mentionnés. *A. de Castro.*

**Altman, M.:** Über die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate. *Math. Nachr.* **17**, 9—15 (1958).

Sei  $E_m$  ein von den Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_m$  aufgespannter Unterraum des  $E_n$ ,  $E_m \subset E_n$ , und sei mit  $P_i$  die orthogonale Projektion auf den Vektor  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) bezeichnet. Mit Hilfe eines beliebigen Vektors  $l \in E_n$  wird die Vektorfolge  $\eta_1 = l - P_1 l$ ,  $\eta_2 = \eta_1 - P_2 \eta_1, \dots, \eta_m = \eta_{m-1} - P_m \eta_{m-1}$ ,  $\eta_{m+1} = \eta_m - P_1 \eta_m$ ,  $\eta_{m+2} = \eta_{m+1} - P_2 \eta_{m+1}, \dots$  definiert und gezeigt, daß  $\{\eta_m\}$  gegen diejenige Lösung konvergiert, für welche das Gaußsche Minimumprinzip der kleinsten Quadrate erfüllt ist, oder geometrisch ausgedrückt, gegen  $\eta = l - Pl$ , wo  $P$  die orthogonale Projektion auf den Unterraum  $E_m$  bedeutet. Betrachtet man nun die Vektoren  $b_k$ , die man erhält, wenn man in der Projektion  $P_{i_k} \eta_{k-1}$  den neben dem Koeffizienten stehenden Vektor  $a_{i_k}$  durch den Einheitsvektor  $u_{i_k} = (0, \dots, 0, \underset{i_k}{1}, 0, \dots, 0)$  ersetzt, so konvergiert die Folge  $\{w_k\} = \{b_1 + b_2 + \dots + b_k\}$  gegen den Vektor  $w = \sum_{j=1}^m x_j u_j$  und  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) ist die Lösung des Systems  $v_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} x_j - l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) mit der Bedingung  $\sum_{k=1}^n v_k^2 = \text{Min.}$  Die Folge der  $\{\eta_k\}$

konvergiert gegen den Vektor  $\eta = -v$ , für welchen das Minimum eintritt. Diese geometrische Deutung der Methode der kleinsten Quadrate führt direkt zum abgekürzten Gaußschen Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme und darüber hinaus zeigt sich, daß die Methode von Cholesky-Banachiewicz mit dem Gaußschen Verfahren im wesentlichen identisch ist, da es geometrisch nicht mehr bedeutet als das Operieren mit normierten Vektoren. *F. Selig.*

**Laasonen, Pentti:** On the iterative solution of the matrix equation  $AX^2 - I = 0$ . *Math. Tables Aids Comput.* **12**, 109—116 (1958).

Für die Reduktion des Problems  $(\lambda A - B)x = 0$  mit symmetrischen  $A, B$  und positiv-definiter Matrix  $A$  auf die Form  $(\lambda I - C)y = 0$  wird die Kongruenz-Transformation mit  $A^{-1/2}$  verwendet. Um die Matrix  $A^{-1/2}$  praktisch zu berechnen „ohne ein zweites Eigenwertproblem zu involvieren“ (eine Klausel, die dem Ref. unverständlich zu sein scheint) wird eine Iterationslösung der im Titel genannten Gleichung verwendet, welche einer einfachen Iterationslösung der skalaren Gleichung



$\alpha x^2 - 1 = 0$  nachgebildet ist, nämlich  $X^{(0)} = k I$ ,  $X^{(i+1)} = \frac{1}{2} X^{(i)} + \frac{1}{2} (A X^{(i)})^{-1}$ , unter  $k$  eine von Null verschiedene Konstante verstanden. Die Konvergenz des Verfahrens wird bewiesen durch Reduktion von  $A$  auf die Jordansche Normalform und unter Verwendung des folgenden Lemmas betr. die Konvergenz einer rekurrenten Zahlenfolge: Sei  $\alpha_{i+1} = \varepsilon_i \alpha_i + \beta_i$  und  $\lim \varepsilon_i = 0$ ,  $\lim \beta_i = \beta$ ; dann ist  $\lim \alpha_i = \beta$ . — Für die Konvergenz ist im Allgemeinen die Form der Anfangsmatrix  $X^{(0)}$  wichtig. Falls durch Abrundungsfehler ein Term erzeugt wird, der die Konvergenzbedingung nicht erfüllt, so kann in der Tat eine divergente Iterationsfolge entstehen. Es wird daher für den Fehler  $\delta = A^{-1/2} \cdot \bar{X}$  die annähernd erfüllte Matrizengleichung  $X^{-1} \delta + \delta \bar{X}^{-1} = I - \bar{X} A \bar{X}$  aufgestellt, wo  $\bar{X}$  eine geeignete Approximation der Lösung darstellt. Diese Gleichung wird direkt diskutiert. *H. Schwerdtfeger.*

**Mitra, S. K.:** On an orthogonalisation method of evaluating the reciprocal and the determinant of a matrix and its Gaussian transform. Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New Delhi 1956, Oct. 15—16, 261—268 (1957).

Es wird die Orthogonalisierung einer Matrix  $A$  bzw. ihrer Spaltenvektoren  $a_k$ , d. h. die Bildung einer orthogonalen Matrix  $Z = A T$  mit oberer Dreiecksmatrix  $T$  in bekannter Weise zur Berechnung der Inversen  $A^{-1} = T Z'$  herangezogen. Im Falle singulärer Matrix  $A$  bricht das Verfahren vorzeitig ab, liefert jedoch nicht, wie angegeben, in jedem Falle auch den Rang von  $A$ . Zur Verringerung von Rundungsfehlern wird eine — gleichfalls bekannte — Variante angegeben. *R. Zurmühl.*

**Bolie, Victor W.:** Minimum-storage matrix inversion. Z. angew. Math. Mech. 38, 369—372 (1958).

The author describes a scheme for inverting an  $n \times n$  real matrix using  $n(n+1)$  storage cells or  $n \times n$  complex matrix using  $2n(n+1)$  storage cells. The original matrix is destroyed in the process. The method is a modification of Jordan's Elimination and has sometimes been referred to as the Cyclic Jordan Procedure. No mention is made of positioning for size or checking for zero pivots. The method has been in common use for several years. *R. F. Reeves.*

**Samuel, Isaac:** Calcul des mineurs non diagonaux. Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul 1, 83—87 (1958).

Es werden verschiedene Beziehungen zwischen den nicht-diagonalen Minoren der charakteristischen Determinante  $\Delta = |A - I y|$  einer Matrix  $A$ , der Determinante  $\Delta$  selbst und gewissen abgeleiteten Determinanten aufgestellt. *R. Zurmühl.*

**Kulik, Stephen:** A method for approximating the zeros of analytic functions. Duke math. J. 24, 137—141 (1957).

In dieser Arbeit entwickelt Verf. eine sehr allgemeine und interessante Methode, um die Nullstellen (auch mehrfache) einer analytischen Funktion schrittweise beliebig genau zu berechnen. Bezeichnungen und Voraussetzungen: (1)  $\mathfrak{K}$  sei ein Kreis und  $\bar{\mathfrak{K}}$  die zugehörige abgeschlossene Kreisscheibe,  $f(z)$  analytisch auf  $\bar{\mathfrak{K}}$ ,  $a_i$  durchlaufe die (endlich vielen) Nullstellen von  $f(z)$  in  $\mathfrak{K}$ ; wir stellen uns dabei vor, daß mindestens eine Nullstelle im Innern von  $\mathfrak{K}$  liege und weiter, daß wir eine solche berechnen wollen; sie heiße  $a_1 = a$ . (2)  $\Phi(z)$  sei ebenfalls analytisch in  $\bar{\mathfrak{K}}$ , und habe die Eigenschaft, daß wenn  $\Phi(a_1) = 0$  ist, die Ordnung dieser Nullstelle kleiner als die bei  $f(z)$  sei;  $\Phi(z)$  kann im übrigen noch von endlich vielen Parametern  $u, v, \dots$  abhängen. — Es gilt dann

$$(3) \quad \frac{\Phi(z)}{f(z)} = \sum_{(z-a_i)^{m_i}} \frac{R_{1,i}(z)}{(z-a_i)^{m_i}} + \psi_1(z),$$

wo die Summe sich auf die Pole von  $\Phi(z)/f(z)$  erstreckt, unter denen nach (1)

und (2) jedenfalls  $a_1 = a$  vorkommt, wo  $\psi_1(z)$  auf  $\bar{\mathfrak{K}}$  analytisch und

$$(4) \quad R_{1,i}(z) = \sum_v^{0, m_i-1} c_{v,i}(z-a)^v, \quad c_{0,i} \neq 0$$

ist. Aus (3) folgt durch  $(n-1)$ -malige Differentiation:

$$(4) \quad \frac{(-1)^{n-1} \{ \Phi(z) \}^{(n-1)}}{(n-1)! \{ f(z) \}} = \frac{Q_n(z)}{[f(z)]^n} = \sum \frac{R_{n,i}(z)}{(z-a_i)^{m_i+n-1}} + \psi_n(z),$$

wo  $R_{n,i}(z)$  wieder ein Polynom von einem Grad  $< m_i$  ist.  $Q_n(z)$  läßt sich als  $n$ -reihige Determinante schreiben und rekursiv leicht berechnen. (4) wird nun so geschrieben:

$$(5) \quad (z-a)^{n+m-1} = [f(z)]^n R_n(1+\alpha_n)/Q_n,$$

wo

$$(6) \quad 1 + \alpha_n = \sum \frac{R_{n,i}}{R_n} \cdot \frac{(z-a)^{n+m-1}}{(z-a_i)^{n+m_i-1}} + \frac{\psi_n(z)}{R_n} (z-a)^{n+m-1},$$

und wo  $a, m, R_n$  dasselbe bedeuten wie  $a_1, m_1, R_{n,1}$ . Ist nun in (6)  $|z-a| < |z-a_i|$  für alle  $a_i \neq a$  und  $|z-a| < \text{„Entfernung } z \cdots \mathfrak{K} \text{“}$ , so gilt (immer für  $n \rightarrow \infty$ )

$$(7) \quad \lim R_n(1+\alpha_n)/R_{n-1}(1+\alpha_{n-1}) = \lim [R_n(1+\alpha_n)]^{1/n} = 1$$

und damit weiter

$$(8) \quad z-a = \lim f(z) Q_{n-1}/Q_n \quad (9) \quad z-a = \lim f(z)/Q_n^{1/n},$$

wenn die Wurzel passend gewählt wird; dabei gelten die Limesaussagen (7), (8), (9) gleichmäßig für alle  $z$  mit  $|z-a| < \varrho$  mit passendem  $\varrho > 0$ . (8) und (9) lassen sich auch so schreiben: (10)  $a = \lim F_n(z)$  für  $n \rightarrow \infty$ , wo (11)  $F_n(z) = z - f(z) Q_{n-1}/Q_n$ , bzw. (12)  $F_n(z) = z - f(z)/Q_n^{1/n}$ . Darauf gründet sich nun der Algorithmus (13)  $z_{k+1} = F_n(z_k)$  ( $n$  fest); wird nämlich  $z_1$  aus  $z$  z. B. gemäß (14)  $z_1 = z - f(z) Q_{n-1}(z)/Q_n(z)$  berechnet, so ergibt sich

$$(15) \quad \frac{z_1 - a}{z - a} = \left\{ 1 + \frac{R_{n-1}(1+\alpha_{n-1})}{R_n(1+\alpha_n)} \right\},$$

und da die rechte Seite nach (7) als Funktion des Zeigers  $n$  eine im obigen Sinne in  $|z-a| < \varrho$  gleichmäßige Nullfolge ist, existiert ein Zeiger, er heiße wieder  $n$ , für den diese Seite absolut kleiner Eins ist; alsdann führt der Algorithmus (13), (14) zur gesuchten Nullstelle  $a$ . Entwickelt man in (14)  $z_1 - a$  nach Potenzen von  $z - a$ : (16)  $z_1 - a = C_N(z-a)^N + \cdots$ ,  $C_N \neq 0$ , so ist  $N$  die größte natürliche Zahl mit

der Eigenschaft (17)  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{|z_1 - a|}{|z - a|^N} = |C_N| > 0$  und also  $N$  das, was man als die

Ordnung der Konvergenz des Algorithmus (13), (14) bezeichnet. Dann folgt aus (15) leicht, daß für die Ordnung  $N$  „im allgemeinen“  $N = 1$  gilt; ist jedoch (18)  $R_n = R_{n-1}$ , so folgt aus (15) und (16) daß  $N \geq n + m - 1$  ist. Wird z. B. (19)  $\Phi(z) = f'(z)$  gewählt, so ist (18) erfüllt, und da jetzt  $m = 1$  ist, also  $N \geq n$ , gleichviel ob  $a$  eine einfache oder mehrfache Nullstelle von  $f(z)$  ist. Wählt man (20)  $\Phi(z) = 1$ , so gilt ebenfalls (18) und es ist  $N \geq n$ , falls  $a$  einfache Nullstelle von  $f(z)$  ist. Ähnliche Bemerkungen gelten für den Algorithmus (12). Außer den Spezialfällen (19) und (20) führt Verf. noch drei weitere an, von denen zwei eng mit der Laguerreschen Methode für die Lösung algebraischer Gleichungen mit reellen Wurzeln zusammenhängen; der erste davon bezieht sich auf (21)  $\Phi(z) = (u-z)^k f'(z)$ , wo  $u$  ein Parameter  $\neq a$ , und  $k$  eine feste natürliche Zahl ist.

E. Mohr.

Hofsommer, D. J.: Note on the computation of the zeros of functions satisfying a second order differential equation. Math. Tables Aids Comput. 12, 58—60 (1958).

Es sei  $f(x) = 0$  und  $x$  ein Näherungswert für  $\alpha$  ( $f'(x) \neq 0$ ), ferner genüge  $f$  einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Aus der Entwicklung nach Potenzen von  $f/f'$

$$\alpha = x - f/f' - \frac{1}{2} (f''/f') (f/f')^2 - \cdots \quad (f^{(i)} = f^{(i)}(x))$$

werden mit Hilfe der Differentialgleichung Näherungsausdrücke für  $\alpha$  gewonnen, die nur  $f$  und  $f'$  enthalten, deren Fehler aber proportional zu  $(\alpha - x)^3$  bzw.  $(\alpha - x)^4$  sind. Bei iterativer Anwendung erhält man einen von 3. bzw. 4. Ordnung konvergenten Prozeß. Die Ergebnisse einer numerischen Anwendung sind angegeben.

H. J. Stetter.

**Parodi, Maurice:** Sur deux équations trinomes. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 171—172 (1959).

Die Gleichung  $z^n + a_{n-1}z + a_n = 0$  hat im Falle  $|a_{n-1}| > 1 + |a_n|$  eine einzige Wurzel, für welche  $|z| < 1$ . Die Gleichung  $z^n + a_1z^{n-1} + a_n = 0$  hat im Falle  $|a_1| > 1 + |a_n|$  eine einzige Wurzel, für welche  $|z| > 1$ . Diese Wurzeln lassen sich aus vom Verf. entwickelten Ausdrücken berechnen, und zwar erreicht man oft mit wenigen Schritten genügende Genauigkeit.

E. J. Nyström.

**Ostrowski, A. M.:** On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of the characteristic roots and vectors. I, II. Arch. rat. Mech. Analysis 1, 233—241 (1958); 2, 423—428 (1959).

I. Untersucht wird das Konvergenzverhalten einer Näherungsfolge  $\lambda_k, x_k$  ( $k = 1, 0, \dots$ ) zu Eigenwerten  $\sigma$  und Eigenvektoren  $x$  einer reell symmetrischen (Hermiteschen) Matrix  $A$ , gebildet nach folgender Vorschrift: Zu gegebenem  $\lambda_k$  ein Näherungsvektor  $x_k = (A - \lambda_k E)^{-1} y$  mit beliebigem festen Vektor  $y \neq 0$ ;  $\lambda_{k+1} = R(x_k) = \text{Rayleigh-Quotient mit } A$ . Die Konvergenz erweist sich als quadratisch. Zu den verschiedenen Eigenwerten  $\sigma_\mu$  werden die Konvergenzbereiche angegeben. Die Untersuchung wird dann auf die von Wielandt angegebene Variante der gebrochenen Iteration  $x_k = (A - \lambda_k E)^{-1} x_{k-1}$ ,  $\lambda_{k+1} = R(x_k)$  ausgedehnt mit dem Ergebnis, daß hier kubische Konvergenz vorliegt im Sinne der asymptotischen Formel

$$(\lambda_{k+1} - \sigma) / (\lambda_k - \sigma)^3 \rightarrow \gamma$$

mit positiver Konstanten  $\gamma$ . — II. Ergänzungen, u. a. Entwicklung einer Konvergenzbeschleunigung aus der asymptotischen Formel für den Wielandt-Prozeß; Ausdehnung auf die allgemeine Eigenwertaufgabe  $Ax = \lambda Bx$ ; Zahlenbeispiele.

R. Zurmühl.

**Rutishauser, Heinz:** Zur Bestimmung der Eigenwerte schiefsymmetrischer Matrizen. Z. angew. Math. Phys. 9b, Festschrift Jakob Ackeret, 586—590 (1958).

W. Givens gab 1953 (s. dies. Zbl. 52, 350) ein Verfahren an, um eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $A$  auf Jacobische Form zu transformieren:  $J = T^{-1} A T$ ;  $J$  sieht so aus: in der Hauptdiagonale stehen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , in der darüber und darunter stehenden parallelen Schräglinie  $\sqrt{\beta_1}, \dots, \sqrt{\beta_{n-1}}$ , an allen andern Stellen Null.  $T$  ist aus denselben orthogonalen Transformationen  $T_{ik}$  ( $i < k$ ) aufgebaut, die schon Jacobi für die Hauptachsentransformation verwandt hat, d. h.  $T_{ik}$  ist eine 2-dimensionale Drehung um den Winkel  $\varphi$  in dem durch die Zeiger  $i, k$  bestimmten 2-dimensionalen Teilraum. Im Unterschied zu Jacobi wählt Givens die Reihenfolge und den Drehwinkel  $\varphi$  jedoch so, daß durch  $T_{ik}$  die Matrixelemente mit den Platznummern  $(i-1, k)$ ,  $(i, k-1)$  ausgelöscht, und die schon hergestellten Nullen nicht zerstört werden; die von Givens gegebene Reihenfolge ist die lexikographische:  $T_{23}, T_{24}, \dots, T_{2n}, T_{34}, \dots$  bis zu  $T_{n-1, n}$ . Verf. zeigt, daß man denselben Prozeß auch auf eine schiefsymmetrische Matrix  $A$  anwenden kann, wobei die entstehende Matrix  $J$  so aussieht: die zur Hauptdiagonale parallele Schräglinie darüber lautet (1)  $\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}, \dots, \sqrt{\beta_{n-1}}$  (die  $\beta_i$  sind  $> 0$ , und  $\sqrt{\beta_i}$  kann  $> 0$  gemacht werden), die parallele Schräglinie darunter lautet: (2)  $-\sqrt{\beta_0}, -\sqrt{\beta_2}, \dots, -\sqrt{\beta_{n-1}}$ , alle übrigen Plätze sind mit Nullen besetzt.  $J$  ist weiter ähnlich einer Matrix  $J^*$ , die aus  $J$  dadurch entsteht, daß (1) in (1\*):  $1, 1, \dots, 1$  und (2) in (2\*):  $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_{n-1}$  übergeht. Indem man  $J^*$  nötigenfalls einmal mit Nullen rändert, darf  $n$  als gerade angenommen



werden. Die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $J^*$  sind dann die Pole des endlichen Kettenbruches

$$(3) \quad g(z) = \frac{1}{z} + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z} + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{z};$$

aus ihm entsteht durch eine Äquivalenztransformation und nach Division durch  $z$

$$(4) \quad f(t) = \frac{1}{t} - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{t} - \frac{\beta_3}{1} - \dots - \frac{\beta_{n-2}}{t} - \frac{\beta_{n-1}}{1},$$

wo  $t = -z^2$ . (4) ist ein Stieltjes-Kettenbruch, dessen Pole  $\mu_1, \dots, \mu_{n/2}$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_j = -\lambda_{n+1-j}$ ) von  $J^*$  oder  $J$  so zusammenhängen: (5)  $\mu_j = -\lambda_j^2$  ( $j = 1, \dots, \frac{1}{2}n$ ). Nach bekannten Sätzen des Verf. über den  $QD$ -Algorithmus gehört aber zu der Funktion  $f(t)$  in (4) ein  $QD$ -Schema, dessen oberste Schräglinie gerade von den  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  gebildet wird, und dessen  $q$ -Kolonnen ihre Pole  $\mu_1, \dots, \mu_{n/2}$  als Grenzwert liefern. Es gilt somit der Satz: Schreibt man die in (1) auftretenden  $\beta_i$  als oberste Schräglinie eines  $QD$ -Schemas an und setzt dieses mit Hilfe der Rhombenregeln nach unten fort, so ergeben seine Kolonnen als Grenzwerte der Reihe nach  $\mu_1, 0, \mu_2, 0, \dots$ . Verf. erläutert sein Verfahren an einem numerischen Beispiel.

E. Mohr.

**Holste, W.:** Das Stodolasche Näherungsverfahren zur Eigenfrequenzberechnung in vereinheitlichter Darstellung. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. **24**, 118—124 (1958).

Das (seit langem bekannte) Stodolasche Verfahren wird an Hand einiger gut gewählter Beispiele in einer den Ingenieur besonders ansprechenden Weise sowohl für die graphische wie auch die numerische Behandlung dargestellt und auf eine zweckmäßige Schematisierung des letzteren durch Verwendung des Matrizenkalküls hingewiesen. Eine Erweiterung des Verfahrens auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen des elastisch gelagerten Balkens wird angedeutet.

F. Reutter.

**Unger, H.:** Matrizenverfahren bei linearen Differentialgleichungsproblemen. Ber. Internat. Math.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 141—149 (1957).

Zu der in letzter Zeit von verschiedenen Seiten durchgeführten Behandlung linearer Rand- und Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels sogenannter Übertragungsmatrizen wird die Herleitung solcher Matrizen unter allgemeinen Gesichtspunkten behandelt. Am Beispiel der Biegeschwingung eines abgesetzten Balkens mit Zwischenstützen wird die Technik des Verfahrens erläutert und auf verschiedene Teilfragen eingegangen.

R. Zurmühl.

**Farrington, C. C., R. T. Gregory and A. H. Taub:** On the numerical solution of Sturm-Liouville differential equations. Math. Tables Aids Comput. **11**, 131—150 (1957).

Es handelt sich um die Aufgabe, rechnerisch bequem die Eigenwerte und Eigenfunktionen einer üblichen Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung in der Form (1)  $y'' + \{q(x) + \lambda r(x)\} y = 0$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  und für die Randbedingungen  $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$ ,  $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$  und mit der Normierungs-

bedingung (2)  $\int_a^b dx r^2 y = 1$  zu bestimmen;  $q(x)$ ,  $r(x)$  sind als stetig und  $r(x) > 0$

vorausgesetzt. Ersetzt man in (1)  $y''$  durch einen Differenzenausdruck (äquidistante Einteilung in  $N+1$  Maschen von der Größe  $h > 0$ ), so erhält man ein lineares Gleichungssystem (3)  $\mathcal{Q}_{ij} y_j = \lambda r_i y_i$  für die Unbekannten  $\lambda$  und  $y_i$ , mit einer Matrix ( $\mathcal{Q}_{ij}$ ), die jedoch i. a. nicht symmetrisch und daher für eine numerische Berechnung ungeeignet ist. Statt mit der Differentialgleichung (1) zu arbeiten, benutzen die Verff. die gleichwertige Tatsache, daß (1) die Eulersche Differentialgleichung eines Variationsproblems ist: (4)  $\int_a^b dx [y'^2 - q y^2] = \min$  bei der Neben-

bedingung (2) bzw.

$$(5) \quad I(y) = \int_a^b dx [y'^2 - q y^2] - \lambda \int_a^b dx r y^2 = \text{Extremum},$$

und können dann zwei Methoden I und II angeben, durch welche die Aufgabe wieder auf eine algebraische vom Typ (3) reduziert wird mit dem Unterschied jedoch, daß in beiden Fällen die Matrix  $(Q_{ij})$  symmetrisch ist; dabei beschränken sie sich der Einfachheit halber auf den Fall, daß die Randbedingungen (6)  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 0$  lauten. I besteht aus zwei Schritten: 1. man wendet auf die Integrale in (5) eine Quadraturformel

$$(7) \quad \int_a^b dx \Phi(x) = \sum_i^{0, N+1} w_i \Phi_i + \varepsilon_1$$

an; darin sind die Gewichte  $w_i$  noch unbestimmt, und werden erst später festgelegt;  $\varepsilon_1$  ist der Fehler. 2.  $y'_i$  wird durch einen finiten Ausdruck bis auf einen Fehler  $\eta_i$  approximiert,

$$(8) \quad y'_i = \frac{1}{h} \sum_j^{0, N+1} a_{ij} y_j + \eta_j \quad (i = 0, 1, \dots, N+1),$$

wo die  $a_{ij}$  ebenfalls später festgelegt werden. Mit  $G_j = 1/w_j h^2$  erhalten die Verff. unter Benutzung von (6) das System

$$(9) \quad \sum_k^{1, N} t_{jk} y_k + \lambda^* r_j y_j = 0, \quad \text{wo} \quad (10) \quad t_{jk} = -G_j \sum_i^{0, N+1} w_i a_{ij} a_{ik} + q_j \delta_{jk},$$

$\delta_{jk}$  das Kroneckersymbol, und  $t_{jk} = t_{kj}$  ist. Mit  $\sigma$  als natürlicher Zahl werden nun die  $w_i$  in (7) und  $a_{ij}$  in (8) so festgelegt, daß der Fehler in (8) ein  $O(h^\sigma)$  und analog

$$(11) \quad \sum_k^{1, N} t_{jk} y_k = y'_j + q_j y_j + O(h^\sigma)$$

wird. Die Verff. behandeln ausführlich die Fälle  $\sigma = 1$  und  $\sigma = 2$ , für welche die  $a_{ij}$  und  $w_i$  leicht bestimmt werden können. — II: hier wird für jede Masche  $x_i \leq x < x_{i+1}$  das  $y(x)$  in (5) durch ein Lagrangesches Polynom  $Y_i(x)$  vom Grade  $m$  ersetzt, welches durch den Punkt  $(x_i, y_i)$  und  $m$  weitere Nachbarpunkte  $(x_v, y_v)$  geht; wegen (6) stehen insgesamt  $n$  Parameter  $y_1, \dots, y_N$  zur Verfügung; in dem Maße, wie eine Masche sich dem linken bzw. rechten Endpunkt nähert, wird  $Y_i(x)$  durch vorwärts bzw. rückwärts genommene Differenzen festgelegt, während in dem dazwischen gelegenen mittleren Bereich  $Y_i(x)$  nahezu in symmetrischer Weise aufgebaut wird; außerdem wird das ganze Rechenschema symmetrisch zum Mittelpunkt  $\frac{1}{2}(a+b)$  entworfen, und dementsprechend  $N$  passend als ungerade Zahl gewählt. Da  $Y_i(x)$  linear von den  $y_i$  abhängt, trifft dasselbe für die  $r$ -te Ableitung  $Y_i^{(r)}(x)$  zu und es gilt:

$$(12) \quad \frac{h^r}{r!} Y_i^{(r)}(x_i) = \sum_j^{1, N} \alpha_{rj}^i y_j \quad \text{und somit weiter} \quad (13) \quad Y_i(x) = \sum_r^{0, m} \sum_j^{1, N} \frac{1}{h^r} \alpha_{rj}^i y_j (x - x_i)^r.$$

Die  $\alpha_{rj}^i$  können auf zweierlei Weise bestimmt werden: man schreibt  $Y_i(x)$  als Lagrangesches Polynom an, differenziert und nutzt (6) aus, oder — und so verfahren die Verff. — man gewinnt sie durch doppelte Induktion nach dem Zeiger  $i$  und dem Grad  $m$ . Wieder ergibt sich ein rein algebraisches Problem

$$(14) \quad \sum_k^{1, N} Q_{jk} y_k = \lambda \sum_k^{1, N} D_{jk} y_k,$$

wo  $(Q_{jk})$ ,  $(D_{jk})$  symmetrische Matrizen, im Gegensatz zur Methode I jedoch  $(D_{jk})$  i. a. keine Diagonalmatrix ist. — Daran schließen die Verff. die genaue Rechenvorschrift für den Automaten und bringen numerische Resultate für den Spezialfall, daß (1) durch  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$  gegeben ist, und die Eigenwerte und Lösungen bekannt sind. Diese Resultate rechtfertigen die vorgeschlagenen beiden Methoden auch für die Fälle, in denen die expliziten Lösungen nicht bekannt sind.

E. Mohr.

Wilf, Herbert S.: An open formula for the numerical integration of first order differential equations. II. Math. Tables Aids Comput. 12, 55—58 (1958).

Dans un précédent mémoire (ce Zbl. 79, 237), l'A. donnait, pour déterminer  $y_{n+1}$  à partir de  $y_n$ , une formule implicite faisant appel à un  $y_{n+2}$  provisoire. L'A. étudie pour cette formule la convergence et la stabilité. Il y a lieu de faire remarquer que la possibilité d'améliorer l'intégration, en intégrant en sens inverse, n'est valable que pour une seule équation du 1er ordre. L'A. termine en donnant une formule analogue d'ordre plus élevé.

J. Kuntzmann.

Heinrich, H.: Bemerkungen zum Verfahren von Ernst Schmidt zur graphischen Integration der Wärmeleitungsgleichung. Z. angew. Math. Mech. 38, 70—71 (1958).

Von E. Schmidt wurde vor einiger Zeit ein Verfahren zur graphischen Integration parabolischer Differentialgleichungen, insbesondere  $\partial^2 \vartheta / \partial x^2 = c \partial \vartheta / \partial t$  angegeben, das für das „Maschenverhältnis“  $\Delta t / h^2 = \frac{1}{2} c$  bei vorgegebenen Randwerten  $\vartheta(0, t)$ ,  $\vartheta(nh, t)$  brauchbar ist. Ist jedoch etwa eine Randbedingung der Form  $(\partial \vartheta / \partial x)_0 = \alpha \lambda^{-1} (\vartheta_0 - \vartheta_t)$  gegeben, so ergibt sich, wie Verf. zeigt, bereits ein Fehler von der Größenordnung  $h^2$  und damit  $\Delta t$ . Es wird nun eine ebenso einfache Konstruktion angegeben, deren Fehler von der Größenordnung  $h^3$  ist.

F. Reutter.

Hochstrasser, U. W.: Numerical experiments in potential theory using the Nehari estimates. Math. Tables Aids Comput. 12, 26—33 (1958).

L'A. rapporte quelques résultats concernant l'erreur surgissant dans le calcul numérique des solutions approximatives du problème de Dirichlet dans le plan pour un pentagone irrégulier inscrit dans le cercle, par la méthode des fonctions harmoniques orthogonales indiquée par S. Zaremba [Bull. internat. Acad. Sci. Cracovie 1909, 125—195 (1909)].

F. Leja.

Conte, S. D. and R. T. Dames: An alternating direction method for solving the biharmonic equation. Math. Tables Aids Comput. 12, 198—205 (1958).

Behandelt wird die biharmonische Differentialgleichung  $\Delta \Delta w = 0$  über dem Einheitsquadrat der  $(x, y)$ -Ebene, mit  $w = 0$  und vorgeschriebenen 2. Normalableitungen auf dem Rand. Formuliert man dieses Problem für die entsprechenden Differenzengleichungen in einem Gitternetz der Maschenweite  $1/M$ , so hat man  $(M-1)^2$  lineare Gleichungen für  $(M-1)^2$  Unbekannte zu lösen, was für größere  $M$  auch mit den üblichen Relaxationsmethoden kaum möglich ist. Im Anschluß an Arbeiten von J. Douglas und H. Rachford wird deshalb ein Verfahren entwickelt und seine Konvergenz bewiesen, bei dem abwechselnd einmal die Werte längs der einzelnen Parallelreihen zur  $x$ -Achse und dann die längs Parallelreihen zur  $y$ -Achse durch Relaxation verbessert werden. Für einen Durchlauf müssen also sukzessive  $2(M-1)$  Systeme mit je  $M-1$  Gleichungen für ebenso viele Unbekannte gelöst werden, was eine beträchtliche Vereinfachung darstellt. Für die zugehörigen Matrizen, die nur in der Haupt- und je zwei anschließenden Nebendiagonalen besetzt sind, wird ein Eliminationsverfahren angegeben. Ferner wird unter Berufung auf die Ergebnisse eines in Europa kaum zugänglichen Forschungsberichts abgeleitet, wie man die Relaxationsparameter am günstigsten wählt und wie viele Durchläufe für eine bestimmte Verbesserung einer Ausgangsfunktion höchstens notwendig sind.

H. J. Stetter.

Vedeškina, L. A.: Über ein Näherungsverfahren zur Lösung von Integralgleichungen vom Volterraschen Typus. Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1958, Nr. 11, 9—14 (1958) [Russisch].

Die Integration in Volterraschen Integralgleichungen wird nach Newton-Cotes durch eine Summe ersetzt. Für die Fehler der Näherungslösung werden unter Zuhilfenahme des Restglieds der Integrationsformel obere Schranken angegeben. Keine praktischen Beispiele.

G. Hämmerlin.



**Feix, Marc, Cécile Sajaloli et Jean Kuntzmann:** Une variante de la méthode de Tricomi-Picone pour l'inversion de la transformation de Carson. Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul 1, 63—74 (1958).

The paper is devoted to the inversion of the Carson transform

$$F(z) = z \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

assuming that  $F(z)$  is known (even only numerically) on the real axis. A procedure due to Picone (this Zbl. 11, 210) allows to approach  $f(x)$  by means of a linear combination of the values taken by  $F(z)$  in the points  $a, 2a, \dots, na$  of the real axis, whose coefficients are functions of  $x$  and  $a$  a positive constant. It may be worthy to mention on this subject that the Tricomi method (this Zbl. 11; 204, 299) uses instead all the derivatives of  $F(z)$  in one point, and the same is done in the preceding Picone method (this Zbl. 8, 209). A serious difficulty which arises in the computations is the very large order of magnitude of the coefficients in the combination, and the authors try to reduce it by taking  $a = k/x$ , with  $k$  a constant to be chosen according to a least squares criterion. Several examples give an interesting illustration of the theory. The paper ends with considerations on the number of the terms to be taken in the linear combination, according to the number of digits with which  $F(z)$  is known.

*E. L. Aparo.*

**Bellman, Richard and Howard Osborn:** Dynamic programming and the variation of Green's functions. J. Math. Mech. 7, 81—85 (1958).

In another paper (Bellman, this Zbl. 81, 369, 2. Referat) the functional equation technique of Dynamic Programming was used to obtain a variational equation for a Green's function corresponding to a second order differential equation. The present paper uses the same technique, and the principle of optimality, to extend the method to elliptic partial differential operators.

*S. Vajda.*

**Davis, H. T.:** The approximation of logarithmic numbers. Amer. math. Monthly 64, Nr. 8 part. II, 11—18 (1957).

Die logarithmischen Zahlen  $\mathfrak{Q}_n$  treten bei der numerischen Integration in der Form

$$(1) \quad \mathfrak{Q}_n = \int_0^1 ds \frac{s(s-1) \cdots (s-n+1)}{n!}$$

auf ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\mathfrak{Q}_0 = 1$ ), können aber auch auf andere Art, z. B. durch die Entwicklung  $x/\log(1+x) = 1 + \mathfrak{Q}_1 x + \mathfrak{Q}_2 x^2 + \dots$  definiert werden. Für größere  $n$  wird die numerische Berechnung schwierig, weshalb es erwünscht ist, asymptotische Formeln für  $\mathfrak{Q}_n$  zu besitzen. Eine solche Formel gab 1924 J. F. Steffensen an: (2)  $\mathfrak{Q}_n \sim (-1)^{n+1}/n \log^2 n = S_n$ . Da aber  $\mathfrak{Q}_n/S_n$  nur sehr langsam nach 1 strebt, stellt sich Verf. die Aufgabe, eine in dieser Hinsicht bessere und somit für numerische Zwecke geeignetere Formel aufzustellen. Dazu drückt er den Integranden von (1) durch Gammafunktionen aus, benutzt  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$  sowie die Stirlingsche Formel und erhält

$$(3) \quad \mathfrak{Q}_n \sim \frac{(n-1)^{n+1}}{n\pi} \int_0^1 ds \Gamma(s+1) \sin \pi s e^{-as},$$

wo  $a = \log n$ . In dieser Formel ersetzt Verf.  $\Gamma(s+1)$  durch eine Polynom  $y(s) = 1 - a_1 s + a_2 s^2 - a_3 s^3$  dritten Grades in  $s$ , welches mit  $\Gamma(s+1)$  in  $s = 0$ ,  $s = 1$  und  $s = s_0$ , wo  $\Gamma'(s_0) = 0$ , übereinstimmt und für das  $y'(s_0) = 0$  ist. Mit der Abkürzung

$$I_p(a) = \int_0^1 ds s^p \sin \pi s e^{-as}$$

erhält er dann aus (3) die Beziehung

$$(4) \quad \mathfrak{Q}_n \sim (-1)^{n+1} n^{-1} \pi^{-1} [I_0(a) - a_1 I_1(a) + a_2 I_2(a) - a_3 I_3(a)].$$

Die  $I_\nu(a)$  können explizit angegeben werden. So ist z. B.  $I_0(a) = \pi(e^{-a} + 1)/(a^2 + \pi^2)$ ; behält man in (4) rechts nur das erste Glied  $I_0(a)$  bei, so ergibt sich  $\mathfrak{Q}_n \sim (-1)^{n+1}/\pi n \log 2^n$ , d. h. das Ergebnis (2) von Steffensen. Zahlenbeispiele zeigen, daß man mit (4) gute Näherungswerte erhält. Anschließend beweist Verf. die Ungleichungen

$$(5) \quad \frac{n}{n+p} |\mathfrak{Q}_n| \geq |\mathfrak{Q}_{n+p}| \geq \frac{n(n-1)}{(n+p)(n+p-1)} |\mathfrak{Q}_n| \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Im letzten Abschnitt der Arbeit betrachtet er in  $\mathfrak{Q}_n = \mathfrak{Q}(n)$  den Parameter  $n$  als kontinuierlich, und stellt die zu (3) analoge Beziehung auf; im Falle, daß  $n$  eine halbganze Zahl  $n + \frac{1}{2}$  ist, vereinfacht sich diese zu einer Formel, die ganz ähnlich der in (2) ist.

E. Mohr.

Hsu, L. C. and L. W. Lin: Two new methods for the approximate calculation of multiple integrals. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 279—290 (1958).

Die Verf. entwickeln in ihrer Arbeit zwei ganz verschiedene Methoden, um mehrfache Integrale bequem numerisch zu berechnen. Beiden Methoden gemeinsam ist die Tatsache, daß die Berechnung auf die Auswertung eines bzw. weniger bestimmter Integrale in einer Variablen zurückgeführt wird. — Zur ersten Methode, die lediglich für periodische Funktionen begründet wird, wurden die Verf. durch das Weylsche Lemma in der Theorie der fastperiodischen Funktionen inspiriert. Bezeichnungen und Voraussetzungen:  $f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  sei in jeder Variablen periodisch mit der Periode  $2\pi$  und besitze stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $p$ , wo  $p \geq 1$ .  $f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x_1, \dots, x_m)$  bedeute speziell eine Ableitung  $p$ -ter Ordnung, wobei  $\alpha_1$ -mal nach  $x_1, \dots, \alpha_m$ -mal nach  $x_m$  differenziert wurde und  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p$  ist;  $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\varrho)$  sei der zugehörige Stetigkeitsmodul, also  $= \max |f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x_1, \dots, x_m) - f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x'_1, \dots, x'_m)|$  bei  $\sum_j (x_j - x'_j)^2 \leq \varrho^2$  ( $\varrho > 0$ ) und  $\omega_p(\varrho) = \max \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\varrho)$  bei  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p$ . Sei weiter

$$f(P) \sim \sum C_{n_1 \dots n_m} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)}$$

die  $f(P)$  zugeordnete Fourier-Reihe und

$$A_\nu(P) = \sum C_{n_1 \dots n_m} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)}, \quad \text{wo } n_1^2 + \dots + n_m^2 = \nu.$$

Nach M. T. Cheng and Y. H. Chen [Acta Sci. nat. Univ. Pekinensis 2 Nr. 4, 411—428 (1956), chines. mit engl. Zusammenfassg.] gibt dann der folgende Ausdruck eine sehr gute Approximation für  $f(P)$ :

$$(1) \quad S_R^{(k)}(P; f) = \sum_{r < R^2} \left\{ 1 - \left( \frac{\sqrt{r}}{R} \right)^{k \sigma_m} \right\} A_r(P) = \sum_{r < R^2} a_{n_1 \dots n_m}(R) e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)},$$

wo  $R, k, \sigma_m$  ganz,  $> 0$ ,  $k > p + 1$ ,  $\sigma_m = [\frac{1}{2}(m-1)] + 1$ , und  $a_{n_1 \dots n_m}(R) = \{1 - (\sqrt{r}/R)^{k \sigma_m} C_{n_1 \dots n_m}\}$ ; ferner sei  $\sigma^*(R) = \sum'_{r < R^2} |a_{n_1 \dots n_m}(R)|$ , wo  $\sum'$  andeutet, daß  $r = 0$ , d. h.  $n_1 = \dots = n_m = 0$  auszunehmen ist; die Güte der Approximation (1) ist dabei gegeben durch

$$(2) \quad S_R^{(k)}(P; f) - f(P) = O[R^{-p} \omega_p(R^{-1})],$$

und zwar gleichmäßig für alle  $x_j$  mit  $0 \leq x_j \leq 2\pi$  (Verallgemeinerung eines Theorems von Zygmund). Dann beweisen die Verf. das Theorem 1: Sei  $q$  eine natürliche Zahl,  $\gamma_j = R^{q-j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ),  $M = R^{p+m-q}$  und  $\varphi(t) = f(\gamma_1 t, \dots, \gamma_m t)$ . Dann gilt für große  $R$

$$(3) \quad \left| \left( \frac{1}{2\pi} \right)^m \int_{0 \leq x_j \leq 2\pi} dx_1 \dots dx_m f(x_1, \dots, x_m) - \frac{1}{M} \int_0^M dt \varphi(t) \right| \leq 2 \sigma^*(R) \frac{1}{R^p} + O \left[ \frac{1}{R^p} \omega_p \left( \frac{1}{R} \right) \right].$$

Beim Beweis wird (2) ausgenutzt. Wendet man jetzt auf  $\int_0^M dt \varphi(t)$  z. B. die Simpson'sche Regel an, so erhält man eine bequeme Rechenvorschrift mit Fehlerabschätzung für das  $m$ -fache Integral in (3) und ein Vergleich mit den Ergebnissen von Korobov (s. dies. Zbl. 80, 46) zeigt, daß die von den Verff. in ihrem Theorem 2 gewonnene Restangabe schärfer als die von Korobov ist. — Die zweite Methode wurde von L. C. Hsu angegeben (vgl. das nachstehende Referat), jedoch nicht voll entwickelt, und wird hier von den Verff. am Beispiel zweifacher Integrale dargelegt. Sei  $\langle \alpha \rangle = \alpha - [\alpha]$  (der dezimale Teil von  $\alpha$ ) und  $[\psi(x)]_a^b = \psi(b) - \psi(a)$ . Unter Benutzung der Eulerschen Summenformel und einer bekannten Eigenschaft der Bernoullischen Polynome  $B_\nu(y)$  können die Verff. die beiden folgenden „Entwicklungstheoreme“ begründen. Theorem 3:  $R$  sei der Rechtecksbereich  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ;  $F(x, y)$  sei stetig in  $R$ , ebenso die partiellen Ableitungen von  $F$  nach  $x$  bis hinauf zur Ordnung  $m$ , wo  $m \geq 1$ . Dann gilt für große natürliche  $N$

$$(4) \quad \iint_R dx dy F(x, y) = \int_0^1 dx F(x, \langle N x \rangle) - \sum_{\nu=1}^{1, n} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{N^\nu} \int_0^1 dy B_\nu(y) \left[ \frac{\partial^{\nu-1} F}{\partial x^{\nu-1}} \right]_{x=0}^{x=1} + O(N^{-m}).$$

Theorem 4:  $S$  sei der Kreisbereich  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , wo  $r, \theta$  Polarkoordinaten bedeuten;  $f(r, \theta)$  sei in  $\theta$  periodisch (Periode  $2\pi$ ), in  $r, \theta$  stetig und besitze partielle Ableitungen nach  $r$  bis zur Ordnung  $m$ ; sei weiter

$$F_\nu(\theta) = f_r^{(\nu-1)}(1, \theta) + (\nu-1) f_r^{(\nu-2)}(1, \theta) - (\nu-1) f_r^{(\nu-2)}(0, \theta),$$

wo  $f_r^{(\nu)}(r, \theta)$  die  $\nu$ -te partielle Ableitung von  $f(r, \theta)$  nach  $r$  bedeutet. Dann gilt für große natürliche  $N$

$$(5) \quad \iint_S r dr d\theta f(r, \theta) = 2\pi \int_0^1 dr \cdot r f(r, 2\pi N r) - \sum_{\nu=1}^{1, m} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{N^\nu} \int_0^{2\pi} d\theta B_\nu\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) F_\nu(\theta) + O(N^{-m}).$$

Speziell ergibt sich für  $m=2$  und wegen  $B_1(y) = y - \frac{1}{2}$  aus (5)

$$(6) \quad \begin{aligned} \iint_S r dr d\theta f(r, \theta) &= 2\pi \int_0^1 dr r f(r, 2\pi N r) \\ &= \frac{1}{2N} \int_0^{2\pi} d\theta \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) f(1, \theta) + O(N^{-2}), \end{aligned}$$

ein Ergebnis, das schärfer ist als das Theorem von Maréchal-Wilkins und auch schärfer als ein von L. C. Hsu früher gewonnenes Resultat. Nimmt man z. B.  $N=10$ ,  $m=4$ , so besteht die rechte Seite von (5) aus nur 4 einfachen Integralen, auf die man wieder eine der bekannten Quadraturformeln anwenden kann. In Theorem 5 verschärfen die Verff. Theorem 3, und studieren auch die Frage, wann der in (4) durch  $O(N^{-m})$  gegebene Rest bei festem  $N$  für  $m \rightarrow \infty$  nach Null geht (Theorem 6). Ein letztes Theorem 7, welches sich auf die Eulersche Summenformel in mehreren Variablen stützt, und vierfache Integrale analog den zweifachen oben zum Gegenstand hat, beschließt die Abhandlung. E. Mohr.

Hsu, Lee-tsch C.: A general approximation method of evaluating multiple integrals. Tôhoku math. J., II. Ser. 9, 44—55, Errata ibid. 340 (1957).

Hier begründet Verf. diejenige Methode, welche er zusammen mit L. W. Lin in der vorstehend referierten Arbeit (dort als zweite Methode bezeichnet) voll entwickelt hat. Der Integrand  $f(x_1, \dots, x_m)$  wird hier lediglich als stetig in einem gewissen  $n$ -dimensionalen abgeschlossenen Bereich  $D$  vorausgesetzt; dazu kommt von Fall zu Fall die Voraussetzung, daß  $f$  für einen Teil der Variablen (natürlich bei



passendem  $D$ ) periodisch ist. Bezeichnungen:

$$M_f = \max_D |f(x_1, \dots, x_n)|; \omega_f(\delta_1, \dots, \delta_n) = \max_D |f(x_1, \dots, x_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)|$$

für  $|x_i - x'_i| \leq \delta_i, (x_1, \dots, x_n) \in D, (x'_1, \dots, x'_n) \in D$ ;

$\langle x \rangle = x - [x]$  (dezimaler Teil von  $x$ ).  $D_n$  bedeute speziell den Würfelbereich:  $0 \leq x_j \leq 1$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Die Untersuchung beruht nun auf einem fundamentalen Lemma, durch welches ein  $2k$ -faches Integral einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$  auf ein  $k$ -faches Integral reduziert wird. Da jedes  $(2k-1)$ -fache Integral über  $D_{2k-1}$  als ein  $2k$ -faches über  $D_{2k}$  geschrieben werden kann, so kann man durch wiederholte Anwendung des Lemmas die Berechnung des mehrfachen Integrals schließlich auf die Berechnung eines einfachen Integrals zurückführen. Um das besagte Lemma bequem formulieren zu können, wird noch folgende kurze Schreibung vereinbart:  $x$  stehe für  $(x_1, \dots, x_k)$ ,  $dx$  für  $dx_1 \cdots dx_k$ , analog  $y$  und  $dy$ , und  $\langle N x \rangle$  für  $(\langle N_1 x_1 \rangle, \dots, \langle N_k x_k \rangle)$ , wo die  $N_j$  ganze Zahlen  $\geq 2$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Dann lautet das Lemma: Für jede auf  $D_{2k}$  ( $0 \leq x_j \leq 1, 0 \leq y_j \leq 1$ ) stetige Funktion  $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = f(x, y)$  gilt

$$\int \int_{D_{2k}} f(x, y) dx dy - \int_{D_k} f(x, \langle N x \rangle) dx \leq 2 \omega_f\left(\frac{1}{N_1}, \dots, \frac{1}{N_k}, 0, \dots, 0\right).$$

Auf Grund dieses wichtigen Lemmas kann Verf. eine Reihe von Theoremen nebst weiteren Folgerungen aufstellen, welche die Auswertung mehrfacher Integrale, besonders zwei- und dreifacher, betreffen, wobei er auch ein Zahlenbeispiel gibt.

E. Mohr.

Sternberg, Robert L., Jerome S. Shipman and Shirley Rose Zohn: Multiple Fourier analysis in rectifier problems. Quart. appl. Math. 16, 335—360 (1959).

Gegeben ist eine Gleichrichter-Charakteristik  $Y = Y^v(X, X_0) = (X - X_0)^v$  für  $X > X_0$ , sonst  $Y = 0$  ( $v \geq 0$ ), und eine Vielfachfrequenzfunktion  $x(t) = \sum_{\mu=1}^m P_\mu \cos(p_\mu t + \theta_\mu)$ . Der Ausgang  $y(t) = Y^v(x(t), X_0)$  läßt sich in eine  $m$ -fache Fourier-Reihe entwickeln, deren Koeffizienten

$$A_{l_1, \dots, l_m}^{(v)}(h, k_1, \dots, k_{m-1}) = \frac{2}{\pi^m} \int \dots \int_{Y > 0} \left( \cos u_1 + \sum_{\mu=2}^m k_{\mu-1} \cos u_\mu - h \right)^v \cos l_1 u_1 du_1 \cdots \cos l_m u_m du_m$$

( $k_\mu = P_{\mu+1}/P_1$ ,  $h = X_0/P_1$ ) gesucht sind (sog. Bennet-Funktionen  $v$ -ter Art und  $(l_1 + \dots + l_m)$ -ter Ordnung). Für  $m = 1$  und 2 ist das Problem in zahlreichen Arbeiten von Bennet, Kaufmann, Sternberg und Shipman behandelt (vgl. z. B. dies. Zbl. 67, 103). In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse für  $m = 1$  und 2 zusammengefaßt und für  $m = 3$  die entsprechenden Ergebnisse angegeben. Es handelt sich dabei um: Rekursionsformeln zur Reduktion der Art; Rekursionsformeln zur Reduktion der Ordnung; Potenzreihen nach Potenzen von  $h$  und  $k$ ; Symmetrieeigenschaften; graphische Darstellungen der Bennet-Funktionen 1. Art und niedriger Ordnung für  $m = 1$  und 2 (15 Nomogramme); Formeln zur Leistungsberechnung. Nach einem Approximationsverfahren von Sternberg-Kaufmann kann man auch beliebige Kennlinien behandeln. Abschließend wird noch auf den Zusammenhang mit den Bohrschen fastperiodischen Funktionen hingewiesen.

H. J. Stetter.

Feuerstein, E.: Intermodulation products for  $v$ -law biased wave rectifier for multiple frequency input. Quart. appl. Math. 15, 183—192 (1957).

Die Arbeit bezieht sich auf die folgende Aufgabe: vorgelegt sei ein Gleichrichter, der die Eingabe  $V$  in die Ausgabe (1)  $I = 0$  für  $V < B$ ,  $I = \wedge (V - B)^v$  für

$V > B$  umwandelt ( $v > 0$ ); dabei hat  $V = V(t)$  die Form

$$(2) \quad V(t) = \sum_r^{0,N} P_r \cos(p_r t + \gamma_r),$$

wo  $P_r, p_r, \gamma_r$  Konstante,  $P_r > 0$  und  $t$  die Zeit ist. Nach S. O. Rice und W. R. Bennett kann die Ausgabe  $I = I(t)$  für den Fall, daß an Stelle von (1) ganz allgemein  $I = \alpha f(V)$  ist, als

$$(3) \quad I(t) = \sum_{m_0}^{0,\infty} \cdots \sum_{m_N}^{0,\infty} \frac{1}{2} A_{m_0 \dots m_N} \varepsilon_{m_0} \cdots \varepsilon_{m_N} \cos m_0(p_0 t + \gamma_0) \cdots \cos m_N(p_N t + \gamma_N),$$

wo  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_{m_k} = 2$  für  $m_k = 1, 2, \dots$ , geschrieben und weiter  $A_{m_0 \dots m_N}$  als ein Konturintegral über einen passenden Weg  $C$  in der komplexen  $u$ -Ebene, in welchem Produkte von Besselfunktionen  $J_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) vorkommen, geschrieben werden:

$$(4) \quad A_{m_0 \dots m_N} = \frac{i^M}{\pi} \int_C du F(iu) \prod_r^{0,N} J_{m_r}(P_r u) \text{ mit } M = \sum m_r$$

$$(5) \quad F(iu) = \int_{-\infty}^{\infty} dV I(V) e^{-iuV}, \quad (6) \quad I(V) = \frac{1}{2\pi} \int_C du F(iu) e^{iVu}.$$

Im Falle (1) ist speziell (7)  $F(iu) = \alpha \Gamma(v+1)^{-v-1} e^{-iuB}$ , und

$$(8) \quad A_{m_0 \dots m_N} = A_{m_0 \dots m_N}^{(v)} = \alpha \Gamma(v+1) \frac{i^M}{\pi} \int_C du (iu)^{-v-1} e^{-iuB} \prod_r^{0,N} J_{m_r}(P_r u)$$

und weiter  $C$  die reelle Achse von  $-\infty$  bis  $+\infty$  mit einer halbkreisförmigen Einbuchtung in die untere  $u$ -Halbebene bei  $u = 0$ . Ordnet man in (2) so an, daß  $P_0 \geq P_1 \geq \dots \geq P_N$ , so schreibt sich (8) wie folgt

$$(9) \quad A_{m_0 \dots m_N}^{(v)} = \alpha P_0^v \Gamma(v+1) \frac{i^M}{\pi} \int_C du (iu)^{-v-1} e^{-iuB} \prod_r^{0,N} J_{m_r}(k_r u),$$

worin  $P_r/P_0 = k_r \leq 1$ ,  $k_0 = 1$  und  $B/P_0 = h$ . (9) zeigt, daß die Beiträge zu dem Integral, die von den Teilen  $|u| \geq R > 0$  herrühren, beschränkt sind. Verf. zeigt, daß dasselbe auch von dem restlichen Beitrag gilt, der von einer Umgebung von  $u = 0$  herrührt; dabei geht er von der Bemerkung aus, daß in dem Falle, wo  $v$  eine natürliche Zahl ist, der Weg  $C$  in (9) durch einen sich ins Unendliche ausweitenden Halbkreis geschlossen werden darf, ohne daß sich das Integral in (9) ändert, wobei dieser Halbkreis in der unteren oder oberen Halbebene liegt, je nachdem  $h \geq \sum_r^{0,N} k_r$  oder  $h \leq -\sum_r^{0,N} k_r$  ist. Für ganze nicht zu große  $v$  liegen für die Koeffizienten (9) bereits Tabellen vor, die auf der numerischen Integration gewisser mehrfacher Integrale basieren. Der Fortschritt, den Verf. bei der Berechnung der Koeffizienten (9), genannt „Bennett-Funktionen“ erzielt, wird durch die Stichworte gegeben:

1. er berechnet die  $A_{m_0 \dots m_N}^{(v)}$  auf neue Weise, ohne daß er dazu mehrfacher Integrale bedarf; 2. er kann auf diese Weise auch die Fälle erfassen, daß  $v$  nicht ganz ist, was vorher nicht möglich war, und 3. er studiert unmittelbar an dem Integralausdruck (9) die funktionentheoretischen Eigenschaften der Bennett-Funktionen. Der von dem kleinen Halbkreis mit dem Radius  $\delta > 0$  herrührende Beitrag zu (9) ist bis auf den Faktor  $\frac{1}{2}$  ein Residuum, das sich leicht erfassen läßt; der Beitrag der Strecke  $-\infty \dots -\delta$  wird mittels der Substitution  $u = -v$  auf  $\delta \dots \infty$  umgeschrieben; so ergibt sich für den restlichen Beitrag (9) ein Integral über  $\delta \dots \infty$ , auf das Verf. eine partielle Integration anwendet, die einen ausintegrierten Bestandteil, der von  $\delta$  abhängt, liefert und ein Integral, das für  $\delta \rightarrow 0$  endlich bleibt. Die Bemerkung, daß (9) unabhängig von  $\delta$  ist, erlaubt ihm den Schluß, daß auch der ausintegrierte Bestandteil für  $\delta \rightarrow 0$  einen endlichen Limes haben muß, womit er am Ziele angelangt ist. Zwei Tabellen nebst vielen wertvollen rechentechnischen Bemerkungen beschließen die Arbeit.

E. Mohr.

**Plainevaux, J. E.:** Calcul graphique des intégrales de Stieltjes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 217—229 (1958).

Verf. entwickelt ein einfaches graphisches Verfahren zur Bestimmung von  $I = \int_{t_0}^{t_1} f(t) h'(t) dt$ . Man trägt  $f(t)$  über einer Skala für  $h(t)$  auf und erhält  $I$  als Maßzahl der unter der so erhaltenen Kurve gelegenen Fläche. Die Zusammensetzung des Fehlers und seine Größenordnung werden diskutiert. Das Verfahren bleibt auch für Funktionen mit Unstetigkeitsstellen anwendbar. Als Beispiele werden u. a. behandelt: Berechnung von Momenten, Berechnung von Entwicklungskoeffizienten für eine Entwicklung nach Legendreschen Polynomen, harmonische Analyse, Integration des Produktes zweier Funktionen. *F. Reutter.*

● **Hall, A. S.:** The construction of graphs and charts. London: Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd. 1958. XII, 172 p. 25 s. net.

Das Buch wendet sich an Studierende der ersten Semester und erfordert keinerlei besondere mathematische Vorkenntnisse. Es führt an Hand von übersichtlichen, sauber gezeichneten und gut ausgewählten Beispielen in folgende Gebiete ein: a) Darstellung von analytisch und von empirisch gegebenen Funktionen einer Veränderlichen (einschließlich Ausgleich von Beobachtungsfehlern). b) Graphische Differentiation und Integration. c) Nomographie (Netztafel- und Fluchtlinien-nomogramme für Funktionen zweier Veränderlichen, Nomogramme für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen). Ein besonderes Anliegen des Verf. ist es, den Leser nicht nur grundsätzlich mit den elementaren graphischen Verfahren vertraut zu machen, sondern ihn dazu zu führen, die für eine bestimmte Aufgabe am besten geeignete graphische Darstellung herauszufinden. *F. Reutter.*

**Eremeev, N. V.:** Ein nomographisches Verfahren zur graphischen Differentiation. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 6, 3—6 (1958) [Russisch].

Verf. benutzt die Tatsache, daß  $|(\pm e^{\pm x})'| = |\pm e^{\pm x}|$  ist, zur graphischen Bestimmung der Ableitung einer graphisch vorliegenden Funktion. Auf einer durchsichtigen Folie sind die vier Funktionen  $\pm e^{\pm x}$  aufgetragen. Diese Folie wird auf dem Grundblatt, das die zu untersuchende Funktion trägt, derart parallel verschoben, daß eine Berührung der Funktionskurve mit einer der Funktionen auf der Folie stattfindet. Der Ordinatenwert der betreffenden Exponentialfunktion in diesem Punkte ist dann gleich dem Absolutwert der gesuchten Ableitung. Über das Vorzeichen entscheidet der Verlauf der Kurve. *K. Bögel — A. Stammberger.*

**Stammberger, A.:** Nomogramme zur Bestimmung der Äquipotentialflächen von elektrischen Feldern. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 4, 103—104 und 3 Tafeln (1958).

**Booth, Andrew D.:** Automatic digital calculators. A retrospect. Nature 180, 1089—1091 (1957).

Verf. erwähnt einige technische und wissenschaftliche Probleme, die mit Hilfe von Rechenautomaten erfolgreich gelöst werden könnten. *H. Rutishauser.*

● **Tukačinskij, M. S.:** Maschinen als Mathematiker. [Mašiny — matematiki.] Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1958. 132 S. R. 1,75 [Russisch].

Populär geschriebene Plauderei über Rechenmaschinen der verschiedensten Arten. *G. Beyer.*

**Krishnamurthy, E. V.:** Lilāvati — a new analogue computer for solving linear simultaneous equations and related problems. II: Design of model II and its application to the solution of secular equations. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 84, 269—283 (1958).



Verf. berichtet über eine modifizierte Ausführung eines früher beschriebenen Apparates für die Lösung linearer Systeme (G. N. Ramachandran und E. V. Krishnamurthy, dies. Zbl. 82, 125). Der Unterschied besteht darin, daß die Resultate nicht mehr an Meßinstrumenten abgelesen, sondern durch Nullabgleich einer Brücke eingestellt werden, was bessere Genauigkeit ermöglicht.

*Ambros. Speiser.*

**Gutenmacher, L. I. und Ju. A. Machmudov:** Die universelle Ziffern-Rechenmaschine LÉM-1. Akad. Nauk Azerbajdz. SSR, Doklady 15, 195—200 (1959) [Russisch].

Verf. berichtet, ohne auf Einzelheiten einzugehen, von einem kleinen binären Rechner mit interessanten Eigenschaften: mit einem Totspeicher aus beschriftbaren Karten, mit Transistoren, Ferrit und mit einem Rechenwerk, das mehrere Operationen zugleich ausführen kann. [Vgl. Commun. Assoc. comput. Mach. 2, Nr. 10, 3—9 (1959).]

*G. Beyer.*

**Wilkinson, J. H. and D. W. Davies:** The automatic computing engine at the National Physical Laboratory. Nature 193, 22—23 (1959).

**Beneš, R.:** Über die Symbolik der Programmierung programmgesteuerter elektronischer Rechenanlagen. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 59, 59—73, französ., ital. und engl. Zusammenfassg. 74 (1959).

**Holt, Anatol W.:** General purpose programming systems. Commun. Assoc. comput. Machin. 1, Nr. 5, 7—9 (1958).

Allgemeine Bemerkungen über Programmsysteme für UNIVAC und LARC.

*G. Beyer.*

**Rappoport, M. G.:** Neue Programme zur Berechnung endlicher Differenzen an Lochkartenmaschinen. Vyčislit. Mat. 3, 186—187 (1958) [Russisch].

**Tocher, K. D.:** Techniques of multiplication and division for automatic binary computers. Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 364—384 (1958).

Methods are developed for representing numbers in a modified ternary scale, which enables the operation of multiplication to be fabricated in an automatic binary computer with the minimum number of additions or subtractions. Two cases arise according to whether a parallel or serial machine is being used. In the former case, the number of additions (or subtractions) can be reduced to an average of a third the number of digits in the multiplier with a maximum of a half the number of digits. In the serial case a multiplication by a  $2p$ -digit multiplier can be achieved as a single operation with only  $p$  adders. The application of this technique to division is also considered. (Author's summary.)

*P. Braunfeld.*

**Valach, Miroslav:** Abbildung der Zahlen und der arithmetischen Operationen im Restklassensystem. Ber. Internat. Math.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 57—59 (1957).

In einem kurzen Bericht wird gezeigt, daß die klassischen Methoden der Addition und der Multiplikation große Nachteile aufweisen, obwohl sie heutzutage größtenteils eine charakteristische Eigenschaft der numerisch arbeitenden Maschinen bilden. Diese Nachteile können durch die Verwendung der Zahlencodes, die auf Überlegungen aus dem Bereich der Zahlentheorie, und zwar auf den Kongruenzen in bezug auf einen  $p_i$ -Modul beruhen, vermieden werden. Im weiteren wird gezeigt, daß die durch Zahlencodes vorgenommene Addition oder Multiplikation keine Weiterleitung der Überträge bzw. keine fortschreitende Addition benötigt. Die Addition und Multiplikation wird an Hand spezieller Tabellen bearbeitet und mittels elektrischer Leiter unabhängig auf jeder Ziffernstelle durchgeführt. Ein praktisches Beispiel erläutert die Effizienz der Methode.

*Gh. Ioanin.*

**Moisil, G. C.:** Sur la théorie algébrique des mécanismes automatiques: synthèse des schémas à relais polarisés. Ber. Internat. Math.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 51—56 (1957).

Polarisierte Relais haben drei Stellungen, je nachdem, ob der Strom in der einen oder anderen Richtung durch die Spule fließt oder ob er ausgeschaltet ist. Mit solchen Relais lassen sich in Schalt- und Rechenanlagen dreiwertige digitale Schaltungen aufbauen. Verf. beschreibt ein Rekursionssystem für die Synthese solcher Schaltungen.

*Ambros. Speiser.*

**Piesch, J.: Beiträge zur modernen Schaltalgebra.** *Sci. electrica* **3**, 16—25 (1957).

Nachdem das Wesen und die Zielsetzung der Schaltalgebra gekennzeichnet worden ist, werden die Symbole und die Rechenregeln dieses Kalküls dargelegt. Es wird die Tatsache hervorgehoben, daß die Schaltalgebra auch auf die Relais-gesteuerten Netzwerke (Sequential circuits) von A. D. Huffman bzw. C. H. Mealy ausgedehnt worden ist, die dafür eine graphische Methode benützten. Durch Auswertung eines Beispiels wird diese Methode in einer von der originalen wenig verschiedenen Form dargestellt. Die Vereinfachung der Schaltung durch Einsparung der Kontakte wird ebenfalls betrachtet und mit der Matrizen-Methode durchgeführt. Der Gegenstand ist in einer klaren und zusammenfassenden Form dargestellt.

*Gh. Ioanin.*

**Constantinescu, Paul: Analyse des schemas  $\pi$  et  $H$  à éléments soupape.** *Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat.* **9**, 156—172, russ. und französ. Zusammenfassg. 172 (1958) [Rumänisch].

L'A. se propose de résoudre le premier et le deuxième problème d'analyse pour les schémas  $H$ : 1<sup>er</sup> problème: déterminer la conductibilité du schéma entre deux noeuds quelconques ( $\alpha, \beta$ ) en connaissant la situation des contacts et la position des redresseurs; 2<sup>e</sup> problème: quelle est la situation des contacts — la position des redresseurs étant connue — pour laquelle le schéma entre deux noeuds quelconques  $\alpha$  et  $\beta$ , conduit de  $\alpha$  vers  $\beta$  et de  $\beta$  vers  $\alpha$ , conduit dans un certain sens, ne conduit ni de  $\alpha$  vers  $\beta$ , ni de  $\beta$  vers  $\alpha$ . On donne des exemples. (D'après le résumé de l'A.) *M. Nedelcu.*

**Roth, J. Paul: Algebraic topological methods for the synthesis of switching systems. I.** *Trans. Amer. math. Soc.* **88**, 301—326 (1958).

For the synthesis of switching systems the author using the cubical complex of a Boolean function of  $n$  variables, introduces some elementary notions of algebraic topology. Let  $K$  be a cubical complex and  $L$  a subcomplex of  $K$ . A covering of  $L$  by cubes of  $K$  consists of a collection  $C$  of cubes of  $K$ , such that each vertex of  $L$  lies on a cube of  $C$ . Let  $q_k$  be the number of  $k$ -cubes of  $C$ . The problem is to find a covering  $C$  such that the form  $\sum_{k=0}^n q_k (n - k)$  be minimized. When  $K = L$  we have the problem of Quine. An elementary cocycle of  $K$  is a cube, which is not the face of a higher dimensional cube of  $K$ . Let  $Z$  be the subspace of elementary cocycles. A cube  $e$  is an  $L$ -extremal if it has a vertex of  $L$  with the property that all of its cofaces are contained in  $e$ . Every minimal covering must contain the subspace  $E$  of extremals. If  $E$  is itself a covering,  $E$  constitutes the unique minimum covering. If  $C$  is a minimized covering then:  $E \subset C \subset Z$ . Some algorithms to find  $Z$  and  $E$ , with examples are given. Some considerations for the synthesis problem for multiple-valued switches are given without proofs. Without introducing topological notions, S. V. Jablonskij [Trudy mat. Inst. Steklov. **51**, 5—142 (1958)] and Ju. I. Žuravlev (ibid. 143—157) obtain similar notions and results.

*M. Nedelcu.*

**Rudeanu, S.: L'emploi des imaginaires de Galois dans la théorie des mécanismes automatiques. X: Classification des fonctions de deux variables en  $GF(2^2)$ .** *Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat.* **9**, 217—287, russ. und französ. Zusammenfassg. 285—287 (1958) [Rumänisch].

L'étude de la classification des schémas à relais temporisés idéaux conduit au problème de la classification des polynômes  $z = P(x, y)$ , avec les arguments et les valeurs en  $GF(2^2)$ . Deux polynômes  $P(x, y)$  et  $P'(x', y')$  seront appelés équivalents par rapport au groupe octaédrique (tetraédrique), s'il existe une transformation

$\varphi$  du groupe octaédrique (tétraédrique)  $x' = \varphi(x)$ ,  $y' = \varphi(y)$  telle que  $z = P(x, y)$  et  $z' = P'(x', y')$  soient liées par la même transformation  $z' = \varphi(z)$ . Les transformations du groupe octaédrique sont  $(T_1) \xi = \alpha \xi' + \beta$  et  $(T_2) \xi = \alpha \xi'^2 + \beta$ ; les transformations  $(T_1)$  forment le sous-groupe tétraédrique. On trouve un système complet de représentants des classes de polynômes équivalents par rapport au groupe octaédrique (tétraédrique). M. Nedelcu.

**Evangelisti, Giuseppe:** *L'analisi frequenziale nello studio dei servosistemi*. Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari **21**, 27 p. (1957).

L'article représente une conférence dans laquelle l'A. présente les notions fondamentales sur les servomécanismes ainsi que les méthodes mathématiques utilisées pour leur étude. L'article comprend six chapitres. Dans les premiers deux chapitres est définie la notion de servosystème et on donne leur classification. Dans les chapitres 4 et 5 on indique les problèmes mathématiques qui apparaissent dans l'étude des servosystèmes, et on met en évidence comment cet étude est bien plus aisée par l'utilisation de la transformation de Laplace. L'A. consacre le reste de son article par un chapitre dédié à l'important problème de la stabilité, et par un autre chapitre à l'analyse fréquentielle. L'article se fait remarquer par une exposition claire et concise. Gh. Ioanin.

● **Hammond, P. H.:** *Feedback theory and its applications*. (Applied Physics Guides.) London: English Universities Press, Ltd. 1958. 348 p. 35 s. net.

Inhalt und Form des vorliegenden englischen Lehrbuches halten sich ganz im Rahmen der bisher erschienenen angloamerikanischen, regelungstechnischen Literatur. Das Ziel dieses Buches ist, den Leser in die Grundprobleme und Methoden der Regelungstechnik einzuführen. Aber gerade solche Leser, die nicht schon mit den Eigenarten der regelungstechnischen Betrachtungsweise vertraut sind, haben es schwer, den Blick für das Ganze zu erlangen. Dies liegt zum Teil an der oft breiten Darstellung von Einzelthemen und zum Teil an der manchmal langatmigen mathematischen Formulierung. Man sollte in Fachbüchern, selbst wenn sie einführenden Charakter haben, wenigstens einige Kenntnisse der grundlegenden Hilfsmittel beim Leser voraussetzen. Es hemmt das zügige Vorwärtsschreiten bis zu dem Punkt, von dem aus man die spezifische Problematik der Regelungstechnik vor sich liegen sieht, wenn man z. B. zunächst mit unzureichenden Mitteln auseinandergesetzt bekommt, wie eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelöst wird oder, was z. B. unter der Laplace-Transformation zu verstehen ist. Man kann derartige Kapitel auch kaum beim Lesen überschlagen, denn sie enthalten gleichzeitig einführende, technische Beispiele, auf die später zurückgegriffen wird. Es besteht die Gefahr, daß einerseits der an praktischen Methoden interessierte Theoretiker das Buch als wenig seriös ( $\sqrt{-1}$  = Operator von Steinmetz) beiseite legt, und daß der Anfänger andererseits keine vollständige Vorstellung von den logischen Zusammenhängen bekommt. Beides wäre bedauerlich, denn der Inhalt der Hauptabschnitte ist ausführlich und sachgerecht — wenn auch nicht in die Tiefe gehend — dargestellt. Das Buch kann in zwei Hauptteile gegliedert werden. Der erste Teil beschäftigt sich mit den linearen Methoden: Differentialgleichungen, Laplace-Transformation, Stabilitätskriterien von Routh und Nyquist. Frequenzgangfunktion, Phasen- und Amplituden-Charakteristik, Phasenebene. An einer Reihe von Beispielen wird die Anwendung der einzelnen Verfahren erläutert. Eine etwas straffere Darstellung der linearen Theorie hätte dem zweiten Teil über nichtlineare Methoden zugute kommen können. Dieses Kapitel ist leider, selbst für ein Lehrbuch, das keine extremen Anforderungen stellt, zu kurz gekommen. Gerade die praktischen Methoden zur Beschreibung nichtlinearer Übertragungsglieder und Regelkreise gelangen heute zu immer größerer Bedeutung. Mindestens hätten mehr Hinweise auf die Literatur über nichtlineare Regelkreise in dem Literaturverzeichnis



aufgenommen werden sollen. Im Rahmen der nichtlinearen Regelkreise wird speziell auf solche eingegangen, die Relais-Glieder enthalten. Die Betrachtungen bleiben im wesentlichen auf die Darstellung in der Phasenebene beschränkt und stützen sich auf das bekannte Buch von I. Flügge-Lotz [Discontinuous automatic control, (1953; dies. Zbl. 51, 156)]. Im abschließenden Kapitel werden die Prinzipien der Analog-Rechner als Hilfsmittel zur Untersuchung von Regelkreisen erläutert. Man findet eine sehr eingehende Studie eines Blockdiagrammes für eine Schiffs-Kursregelung und des entsprechenden Schaltbildes für den Analog-Rechner

*S. H. Lehnigk.*

**Babister, A. W.:** Determination of the optimum response of linear systems (Zero displacement error systems). Quart. J. Mech. appl. Math. 10, 504—512 (1957).

**Babister, A. W.:** Determination of the optimum response of linear systems (Zero-velocity-error and zero-acceleration-error systems). Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 119—128 (1958).

Die in einer früheren Note (dies. Zbl. 79, 109) erhaltenen Ergebnisse werden benutzt, um bei den in den Überschriften näher angegebenen Regelungssystemen das Optimalisierungsproblem in dem früher definierten Sinne zu lösen. Beide Noten bringen Beispiele sowie mehrere Tabellen und Diagramme, welche den Ablauf der Regelung gut erkennen lassen.

*S. Schottlaender.*

**Šeřl, O.:** Filtering of noise in the optimizing control. Sci. Sinica 7, 1144—1150 (1958).

Die Arbeit behandelt ein Regelsystem, das durch den Output  $z(t)$  über einen linearen Filter, eine Entscheidungsvorrichtung und einen Generator gesteuert wird. Der Output soll sich aus einem funktionalen Term  $y(t)$  und einem stationären, Gauß-verteilten Störglied (noise)  $n(t)$  additiv zusammensetzen. Der lineare Filter soll so beschaffen sein, daß 1. die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums bei den Entscheidungen der Regelvorrichtung möglichst klein ist, 2. diese Entscheidungen unabhängig von den Parametern des Systems sind. Auf Grund dieser Forderungen und noch gewisser Zusatzbedingungen lassen sich die Koeffizienten des Filters eindeutig als Funktionen des Input angeben. Zur Konstruktion des Filters stehen zwei Möglichkeiten offen: a) die Konstruktion eines zeit-abhängigen Filters, b) die Konstruktion eines zeitkonstanten Filters, bei dem jedoch die Entscheidungen nur in diskreten Zeitschritten getroffen werden können.

*B. Schneider.*

**Ludwig, G. und H. Rollnik:** Erzwungene Schwingungen und Fehler bei Regelsystemen mit zeitlich variabler Regelstärke. Z. angew. Math. Mech. 38, 16—20 (1958).

Die Verff. setzen ihre (mit Methoden der Funktionentheorie durchgeführten) Untersuchungen über die Regelungssysteme mit zeitlich variabler Regelstärke (dies. Zbl. 80, 117) fort und bestimmen den Einfluß einer äußeren Kraft. Sie nehmen an, daß zur Zeit  $t = 0$  im System der gewünschte Zustand erreicht ist und der Regler um so empfindlicher anspricht, je näher sich das System an diesem Zustand befindet. Dann lautet die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises  $P(s) \{t \varepsilon(t)\} + Q(s) \{t \varepsilon(t)\} = n(t)$ ; hierin ist  $s = d/dt$  der Differentialoperator,  $P$  und  $Q$  sind beliebige Polynome, und  $\varepsilon(t)$  ist mit der „Amplitude“ (Regelabweichung)  $Z(t)$  durch  $Z(t) = t \varepsilon(t)$  verknüpft. Die Lösung der homogenen Gleichung wurde in der vorangehenden Arbeit diskutiert. Es handelt sich jetzt um die Berechnung eines partikulären Integrals der inhomogenen Gleichung bei vorgegebener rechter Seite

$n(t)$ . Für diese nehmen die Verff. die Fourier-Darstellung  $n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  und

behandeln zuerst den Spezialfall  $n(t) = e^{i\omega t}$ , indem sie  $e^{i\omega t} = (2\pi i)^{-1} \oint e^{zt} (z - i\omega)^{-1} dz$  und  $\varepsilon(t) = \oint G(z) e^{zt} dz$  bei geeignet gewähltem Integrationsweg setzen. Sie stellen für  $G(z)$  eine Differentialgleichung auf, die sie mit Hilfe früherer Resultate und durch Variation der Konstanten lösen. Bei der weiteren Rechnung setzen sie

voraus, daß kein Resonanzfall vorliegt. Für die im Endresultat auftretenden Integrale werden Entwicklungen für kleine Zeiten angegeben. Schließlich wird noch in einem einfachen Sonderfall, wobei z. B.  $n(t) = \text{konst.}$  angenommen wird, der Regelfehler berechnet.

*R. Reißig.*

**Eršov, B. A. und Ju. S. Sobolev: Beispiele für dynamische Systeme mit Stabilität im Großen.** Leningradsk. Gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31, 17—21 (1957) [Russisch].

Die Verff. beziehen sich auf eine Arbeit von Stebakov [Doklady Akad. Nauk SSSR 95, 455—458 (1954)], in der dieser ein Verfahren zur Untersuchung der Stabilität im Großen bei gewissen dynamischen Systemen darlegte. Er betrachtete ein Differentialgleichungssystem, wie es beispielsweise in der Regelungstheorie vorkommt:  $\dot{x}_i = f_i(x_i, x_{i-1})$ ;  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_0 = x_n$  und bewies folgenden Satz: Zwischen einem  $n$ -dimensionalen „Kasten“ und einem kleineren, der im ersten enthalten ist, möge sich der Bereich  $G$  befinden. Eine Ebene in  $G$  senkrecht zur Achse  $x_i > 0$  ( $x_i < 0$ ) wird mit  $S_{i+}$  ( $S_{i-}$ ) bezeichnet, ihre Projektion auf die  $(x_i, x_{i-1})$ -Ebene mit  $\Sigma_{i+}$  ( $\Sigma_{i-}$ ). Wenn nun  $\text{sgn} f_i = -1$  ( $+1$ ) für  $(0, \dots, 0, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) \in \Sigma_{i+}$  ( $\Sigma_{i-}$ ), dann geht durch jeden Punkt von  $G$  eine Hülle, die von den Lösungskurven nach innen durchsetzt wird. — Die Verff. bringen mehr oder weniger allgemeine Beispiele aus der Regelungstheorie, bei denen die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind und somit die im Satz enthaltene Stabilitätsaussage zutrifft. 1.  $\dot{x}_i = A_i x_i + B_i x_{i-1}$ , wo  $A_i < 0$ ,  $|(A_1 \cdots A_n)/(B_1 \cdots B_n)| > 1$ . 2.  $\dot{x}_i = A_i x_i + B_i x_{i-1} + \varphi_i(x_i, x_{i-1})$ , wo die Bedingungen für die  $A_i, B_i$  wie soeben sind und außerdem  $\varphi_i(0, 0) = 0$ ,  $|\partial f_i / \partial x_i| / |\partial f_i / \partial x_{i-1}| > |A_i / B_i|$ . 3. Regelung mit Hilfsenergie, nichtlinearem positiven Selbstaussgleich und nichtlinearer Rückführungscharakteristik:  $\dot{x} = -f(x) - b y$ ,  $\dot{y} = c x - \varphi(y)$ . 4. Regelungssystem mit zwei hintereinander geschalteten Stellmotoren und Selbstaussgleich:  $\dot{\xi} = -B \xi - \xi$ ,  $\dot{\xi} = f_2^*(\sigma_2^*)/\psi_2^*$  [ $\sigma_2^* = \eta - \xi$ ],  $\dot{\eta} = f_3^*(\sigma_3^*)/\psi_3^*$  [ $\sigma_3^* = \zeta - \eta$ ]. Dabei werden die Charakteristiken der Regelungssysteme einer Reihe geeigneter Nebenbedingungen unterworfen.

*R. Reißig.*

**Eršov, B. A.: Eine Abschätzungsmethode bei der Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer Regelungssysteme.** Leningradsk. Gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31, 22—27 (1957) [Russisch].

Die Differentialgleichungen des Regelungsprozesses werden in der Form  $dX/dt = AX + F(X)$ ,  $X(0) = X_0$ , angenommen; hierbei soll  $X$  ein  $n$ -dimensionaler Vektor,  $A$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix und  $F(X) = f(X)H$  mit einer skalaren Funktion  $f$  und einem konstanten Vektor  $H$  sein. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $D(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$  seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und mögen lauter negative Realteile haben. Über die Funktion  $f(X)$  wird vorausgesetzt, daß mit ihr der Existenz- und Eindeutigkeitssatz erfüllt,  $f(0) = 0$  und  $|f(x_1, \dots, x_n)| \leq \alpha \sum |x_i|$  sein soll; die Summation erstreckt sich dabei nur über diejenigen  $x_i$ , von denen  $f$  tatsächlich abhängt. Durch eine geeignete nichtsinguläre Lineartransformation mit konstanten Koeffizienten  $Z = BX$  wird die Differentialgleichung in die Gestalt  $dZ/dt = AZ + F^*(Z)$ ;  $A = (\lambda_i \delta_{ij})$ ,  $F^* = (1, \dots, 1)f$  übergeführt. Die äquivalente Integralgleichung lautet

$$Z(t) = e^{At} Z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} F^*(Z(s)) ds.$$

Bezeichnet man  $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ , so folgt

$$\|Z(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|Z_0\| + \alpha \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|Z(s)\| ds;$$

hierin ist  $\lambda = \min_i |\text{Re } \lambda_i|$  und  $\|F^*(Z)\| \leq \alpha \gamma \|Z\|$ . Auf Grund eines Lemmas,

nach dem aus  $|u(t)| \leq M + k \int_0^t |u(s)| ds$  die Beziehung  $|u(t)| \leq M e^{kt}$ , hervorgeht, erhält der Verf. schließlich  $\|Z\| \leq \|Z_0\| e^{(\alpha\gamma - \lambda)t}$  oder  $\|X\| \leq \|B\| \|B^{-1}\| \|X_0\| e^{(\alpha\gamma - \lambda)t}$ . Für  $\alpha\gamma - \lambda < 0$  ist der ungestörte Prozeß  $X(t) \equiv 0$  asymptotisch stabil im Ganzen. Verf. rechnet noch ein Zahlenbeispiel durch.

R. Reißig.

● Vogel, Alfred: Vierstellige Funktionentafeln. Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer 1958. VI, 157 S. Hln. 6,80.

Inhaltsverzeichnis: I:  $x^n$  für  $n = -1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  und  $\sqrt{10}x, \sqrt[3]{10}x, \sqrt[3]{100}x$  für  $x = 1 (0,01) 10, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$  für  $x = 1 (1) 100$ , Binomialkoeffizienten für  $n = 1 (1) 20$ . — II: Zehnerlogarithmen: Vierstellige Logarithmen für  $x = 1000 (1) 10000$ , siebenstellige Logarithmen für  $q = 1 (0,001) 1,159$ , zehnstellige Logarithmen einiger Zinsfaktoren und zwölfstellige Logarithmen der Primzahlen für  $p = 2$  bis 503. — III: Finanzmathematische Funktionen. — IV: Die natürlichen und logarithmischen Werte der Kreisfunktionen für  $x = 0^\circ (1') 90^\circ$ ,  $\cot x$  für  $x = 0^\circ (1'') 0^\circ 7' (10'') 1^\circ$ .  $\lg \sin x$  für  $x = 0^\circ (1'') 0^\circ 7' (10'') 1^\circ$ .  $\lg \tan x$  für  $x = 0^\circ (1'') 0^\circ 7' (10'') 1^\circ$ . V: Umwandlungen: Winkelmaße, Umwandlung von Dezimalteilen des Grades in Minuten und Sekunden und umgekehrt, Umwandlung vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt, Vielfache von  $\frac{1}{2}\pi$ , Umwandlung von Zehnerlogarithmen in natürliche Logarithmen. — VI: Die natürlichen Werte der Kreisfunktionen mit Argumenten im Bogenmaß für  $x = 0 (0,01) 6,30 (0,1) 10$ ,  $\cot x$  für  $x = 0 (0,001) 0,249$ ,  $\tan x$  für  $x \approx \frac{1}{2}\pi$ . — VII: Exponentialfunktionen und Hyperbelfunktionen für  $x = 0 (0,01) 5 (0,1) 10$ , Gaußsche Fehlerverteilung und Fehlerfunktion. — VIII: Arcus- und Areafunktionen für  $x = 0 (0,01) 5 (0,1) 10$  und  $0,9 (0,001) 1,1$ ,  $\text{Ar Tan } x$  und  $\text{Ar Cot } x$  für  $x \approx 1$ . — IX: Natürliche Logarithmen für  $x = 0 (0,1) 50 (1) 1000$ . — X: Zehnerlogarithmen der Fakultäten für  $n = 1 (1) 1000$ . — XI: Lineare und quadratische Interpolation mit Besselkoeffizienten. — XII: Konstanten, Primzahlen. — Anhang: XIII: Grundeinheiten, metrisches Maßsystem, nichtmetrisches Maßsystem. — XIV: Physikalische Tabellen. — XV: Chemische Tabellen. — XVI: Erde und Weltall.

H. Unger.

● Dwight, Herbert Bristol: Mathematical tables of elementary and some higher mathematical functions. 2nd ed. New York: Dover Publications Inc. 1958. 217 p. \$ 1,75.

Gegenüber der 1. Auflage (dies. Zbl. 27, 409) ist eine Reihe neuer Tabellen hinzugefügt worden. Das Tafelwerk ist von besonderer Bedeutung, da neben den üblichen elementaren Funktionen folgende höhere Funktionen tabelliert sind (4–5 gültige Ziffern): Vollständige elliptische Integrale 1. und 2. Art, Integralsinus, Integralcosinus, Exponentialintegral, Legendresche Polynome  $P_n(x)$  in Abhängigkeit von  $x$  bzw. von  $\vartheta$  mit  $x = \cos \vartheta$ , Ableitungen der Legendreschen Polynome, Bernoullische und Eulersche Zahlen, Gammafunktion, Fehlerfunktion und Fehlerintegral, Besselfunktionen  $J_n(x)$  bis zur Ordnung 5, darüber hinaus:  $J'_1(x)$ ,  $J'_2(x)$ ,  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$ ,  $Y'_1(x)$ ,  $Y'_2(x)$ ,  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ ,  $\text{ber } x$ ,  $\text{bei } x$ ,  $\text{ber}' x$ ,  $\text{bei}' x$ ,  $\text{ker } x$ ,  $\text{kei } x$ ,  $\text{ker}' x$ ,  $\text{kei}' x$ , ferner Wurzeln von Determinantengleichungen mit Besselschen Funktionen, Riemannsche Zetafunktion.

H. Unger.

● Table of natural logarithms for arguments from five and ten to sixteen decimal places. (National Bureau of Standards. Appl. Math. Ser. 53.) Washington: U. S. Government Printing Office 1958. XIII, 506 p. \$ 4,00.

$\log_e x$  für  $x = 5 (0,0001) 10$  mit 16 D.  $\log_e x$  für  $x = 2 (1) 10$  mit 40 D.  $\log_e (1+x)$  und  $-\log_e (1-x)$  für  $x = 10^{-n} (10^{-n}) 10^{-n+1}$  mit  $n = 1 (1) 13$  und 25 D.

H. Unger.

● Montagne, P.: Tables abrégées de puissance entières. Spécialement préparées pour servir d'aide à la machine à calculer. Paris: Dunod 1958. XLIV, 411 p.



Petites Tables:  $x^n$  für  $x = 0,2$  und  $n = 2$  (1) 600,  $x = 0,3$  und  $n = 2$  (1) 400,  $x = 0,4$  und  $n = 2$  (1) 250,  $x = 0,5$  (0,1) 0,9 und  $n = 2$  (1) 200,  $x = 1,1$  (0,1) 2,0 und  $n = 2$  (1) 150,  $x = 0,1$  (0,01) 1,53 und  $n = 2$  (1) 78 mit 15 gültigen Ziffern bzw. exakte Werte. Tables Moyennes:  $x^n$  für  $x = 0,1$  (0,001) 1,26 und  $n = 2$  (1) 26 mit 15 gültigen Ziffern bzw. exakte Werte. Grandes Tables:  $x^n$  für  $x = 0$  (0,0001) 1,26 und  $n = 2$  (1) 10 mit 10 gültigen Ziffern bzw. exakte Werte. In einem Tafel-anhang ist eine Reihe von Tabellen und Hilfstafeln für die Interpolation zusammengestellt. Genaue Anweisungen unterrichten den Benutzer in der Handhabung der Tafel.

H. Unger.

● Čistova, É. A.: **Tafeln der Besselschen Funktionen von reellem Argument und ihrer Integrale.** [Tablicy funkcei Besselja ot dejstvitel'nogo argumenta i integralov ot nich.] (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Rechenzentrum. Mathematische Tafeln.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1958. 524 S. R. 45,— [Russisch].

Folgende Funktionen sind für  $x = 0$  (0,001) 15 (0,01) 100 mit 7 Dezimalen bzw. 7 Ziffern vertafelt: Besselfunktionen  $J_0(x)$  und  $J_1(x)$ , Neumannsche Funktionen  $Y_0(x)$  und  $Y_1(x)$  und die Integralfunktionen

$$Ji_0(x) = \int_x^\infty \frac{J_0(u)}{u} du, \quad Ji_1(x) = \int_x^\infty \frac{J_1(u)}{u} du, \\ Yi_0(x) = \int_x^\infty \frac{Y_0(u)}{u} du, \quad Yi_1(x) = \int_x^\infty \frac{Y_1(u)}{u} du.$$

Zwischenwerte können mittels quadratischer Interpolation (Besselformel) ermittelt werden, wenn zweite Differenzen angegeben sind. In den anderen Fällen genügt lineare Interpolation. Für  $x = 0$  (0,001) 0,150 werden neun Hilfsfunktionen mit 7 Dezimalen angegeben, die die Berechnung von  $Ji_0(x)$ ,  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Yi_0(x)$  und  $Yi_1(x)$  in diesem Bereich erleichtern. Ausführliche Formelzusammenstellung, asymptotische und rekurrente Formeln etc.

H. Unger.

● Karpov, K. A.: **Tafeln der Funktion  $F(z) = \int_0^z e^{-x^2} dx$  im Komplexen.**

[Tablicy funkcei  $F(z) = \int_0^z e^{-x^2} dx$  v kompleksnoj oblasti.] (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Rechenzentrum. Mathematische Tafeln.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1958. 520 S. R. 40,— [Russisch].

Die vorliegende Tafel dient zur Bestimmung von Werten des Wahrscheinlichkeitsintegrals  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$  für komplexe Argumentwerte  $z = x + iy$  —  $= \varrho e^{i\vartheta}$ . Genauer untersucht und vertafelt wird

$$F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx = u(\varrho, \vartheta) + i v(\varrho, \vartheta) \quad \text{mit} \quad \Phi(z) = -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} F(iz).$$

Für  $F(z)$ ,  $u(\varrho, \vartheta)$  und  $v(\varrho, \vartheta)$  werden Reihenentwicklungen, Differentialgleichungen, asymptotische Entwicklungen und Beziehungen zu anderen Funktionen angegeben. Mitgeteilt werden Funktionswerte mit 5 Dezimalen von  $u$  und  $v$  für feste  $\vartheta$ -Werte im Winkelraum  $\frac{1}{4}\pi \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}\pi$  in Abhängigkeit von  $\varrho$  für  $\varrho' \leq \varrho \leq \varrho''$  (Schritt 0,001 bzw. 0,01). In einer Tabelle sind die  $\vartheta$ -,  $\varrho'$ - und  $\varrho''$ -Werte zusammengestellt. Außerdem findet man 5-ziffrige Werte von  $F(x)$  für  $x = 0$  (0,001) 3 (0,01) 10. Infolge des Spiegelungsprinzips werden damit in der komplexen  $z$ -Ebene die Winkelbereiche  $\frac{1}{4}\pi \leq \vartheta \leq \frac{3}{4}\pi$  und  $\frac{5}{4}\pi \leq \vartheta \leq \frac{7}{4}\pi$  sowie  $\vartheta = \pi$  erfaßt. Interpolationsmöglichkeiten sowohl in  $\varrho$  als auch in  $\vartheta$  werden genau besprochen unter Beifügung von Hilfstafeln.

H. Unger.

● **Fox, L.: Mathematical tables. Vol. 2: Tables of Everett interpolation coefficients.** (National Physical Laboratory.) London: Her Majesty's Stationary Office 1958. 61 p. 10/6 net.

Der 2. Band der Serie „Mathematical Tables“ enthält die Everettschen Koeffizienten  $E_2(p)$ ,  $F_2(p)$  mit 9 Dezimalen und  $P_4(p)$ ,  $Q_4(p)$  mit 5 Dezimalen für  $p = 0(0,0001)1$  zur Interpolation mit der Formel

$$f_p = (1-p)f_0 + pf_1 + E_2(p)\delta_m^2 f_0 + F_2(p)\delta_m^2 f_1 + P_4(p)\beta^4 f_0 + Q_4(p)\beta^4 f_1.$$

$\delta_m^2$  und  $\beta^4$  sind modifizierte Differenzen, die durch mehrfachen Rückwurf gebildet werden. (Formeln, Fehlerabschätzungen, etc. vgl. Bd. 1; dies. Zbl. **73**, 344). In einem Anhang werden zu den in Bd. I gegebenen Formeln zur Berechnung der 1. und 2. Ableitungen Rechenerleichterungen mit Hilfstabellen mitgeteilt. *H. Unger.*

● **Bierens de Haan, D.: Nouvelles tables d'intégrales définies.** Ed. of 1867, corrected. With an engl. transl. of the introduction by J. F. Ritt. New York: Hafner Publishing Co. 1957. XIV, 716 p. \$ 12,50.

Das als Nachdruck der Ausgabe von 1867 erschienene und in vier Abschnitte eingeteilte Werk (1. Integrale aufgebaut aus einer Funktion, 2. Integrale aus zwei Funktionen, von denen eine algebraisch ist, 3. Integrale aus zwei Funktionen, von denen eine nicht algebraisch ist, 4. Integrale aus drei Funktionen) enthält 8359 bestimmte Integrale. Es ist entstanden durch Weiterentwicklung der Bände IV (1858) und VIII (1862) der „Memoirs of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam“. Angegeben sind die Formeln mit Literaturangaben. Dadurch kann einerseits die Herkunft festgestellt, andererseits die Herleitung nachgelesen werden. In 43% der Fälle bezieht sich der Hinweis auf die obigen Bände IV und VIII. 37% der Integrale konnten aus anderen hergeleitet werden. Die Ausgangsformel ist dann jedesmal vermerkt. Andere Hinweise beziehen sich bei 15% auf Arbeiten des Verf., bei 5% auf andere Literaturstellen. Durch einen sehr sorgfältig aufgebauten Tafelführer und dank des klaren Aufbaus des Werkes kann man schnell das gesuchte Ergebnis eines vorliegenden Integrals auffinden. Bei der Anlage der Tafel wurden grundsätzlich bestimmte Integrale, für die die unbestimmten Integrale leicht ausgerechnet werden können, weggelassen, ebenso solche, die durch einfache Transformationen ineinander übergeführt werden können. Auch wurden nur die Grenzen 0 und 1 bzw. 0 und  $\frac{1}{2}\pi$  bzw. 0 und  $\pi$ , nicht aber -1 und 1 usw. berücksichtigt. Dadurch konnte in Verbindung mit der Beschränkung auf Literaturhinweise eine wesentliche Reduktion des Tafelumfanges erzielt und eine bequeme Benutzbarkeit erreicht werden.

*H. Unger.*

● **Salzer, Herbert E., Charles H. Richards and Isabelle Arsham: Table for the solution of cubic equations.** New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958. XV, 161 p. 58 s.

Zur Lösung einer algebraischen Gleichung 3. Grades wird von der reduzierten Gleichung  $ay^3 + by + c = 0$  ausgegangen, deren Wurzeln durch  $\gamma f_1(\vartheta)$ ,  $\gamma f_2(\vartheta)$  und  $\gamma f_3(\vartheta)$  mit  $\gamma = -c/b$  und  $\vartheta = a c^2/b^3$  ausgedrückt werden können. Die drei Funktionen  $f_i(\vartheta)$  sind vertafelt für  $1/\vartheta = 0,001(-0,001)-1$  und  $0,001(0,001)1$ , sowie für  $\vartheta = -1(0,001)1$  mit 7 Dezimalen. Zur Interpolation sind Differenzen angegeben. *Beispiele.* *H. Unger.*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Pitcher, T. S.: Sets of measures not admitting necessity and sufficient statistics or subfields. *Ann. math. Statistics* **28**, 267—268 (1957).

Exemple de corps de Borel sur l'intervalle 0, 1 jouissant de ces propriétés.

*R. Féron.*

**Erochin (Erohin), V.:  $\varepsilon$ -entropy of a discrete random variable.** Teor. Verojatn. Primen. **3**, 103—106, engl. Zusammenfassg. 106—107 (1958) [Russisch].

Verf. untersucht diskrete zufällige Objekte  $\xi, \xi'$ . Bei vorgegebenem  $\xi$  werden solche diskreten zufälligen Objekte  $\xi'$  betrachtet, die höchstens die gleichen Werte wie  $\xi$  mit positiven Wahrscheinlichkeiten annehmen können. Dabei sei:  $P\{\xi' \neq \xi\} \leq \varepsilon$  (Bedingung  $W_\varepsilon^1$ ) oder  $P\{\xi' \neq \xi | \xi'\} \leq \varepsilon$  (Bedingung  $W_\varepsilon^2$ ). Es bezeichne  $J(\xi, \xi')$  den Gehalt an Information über  $\xi$  in  $\xi'$ . Als „ $W$ -Entropie“ wird definiert:  $H_{W_\varepsilon^1}(\xi) = \inf_{\xi' \in W_\varepsilon^1} J(\xi, \xi')$ . Dann gilt stets  $H_{W_\varepsilon^1}(\xi) \leq H_{W_\varepsilon^2}(\xi)$ . Verf. beweist: es gilt hier sogar Gleichheit. Der gemeinsame Wert  $H_\varepsilon(\xi)$  wird als  $\varepsilon$ -Entropie des zufälligen Objekts  $\xi$  bezeichnet. Sein genauer Wert wird angegeben. *W. Richter.*

**Rubinstejn (Rubinstein), G. Š. and K. Urbanik: Solution of an extremal problem.** Teor. Verojatn. Primen. **2**, 375—377, engl. Zusammenfassg. 377 (1957) [Russisch].

Let  $N$  be a set of pairs of integers  $\langle i, j \rangle$  ( $i, j = 1, 2, \dots, h$ ), and  $M$  a non-empty subset of  $N$ . We shall denote by  $\mathcal{P}_M$  the class of all systems  $P = \{p_{ij}\}$  ( $\langle i, j \rangle \in N$ ) satisfying the following conditions:

$$p_{ij} \geq 0 \text{ for } \langle i, j \rangle \in N, \quad p_{ij} = 0 \text{ for } \langle i, j \rangle \in N \setminus M, \quad \sum_{\langle i, j \rangle \in M} p_{ij} = 1.$$

Let 
$$\Phi(P) = \sum_{\langle i, j \rangle \in N} p_{ij} \log \left[ p_{ij} / \sum_{k=1}^n p_{ik} \sum_{l=1}^n p_{lj} \right]$$

The following theorem is proved:

$$\max_{P \in \mathcal{P}_M} \Phi(P) = \log r(M),$$

where  $r(M)$  is the greatest number of pairs  $\langle i_1, j_1 \rangle, \langle i_2, j_2 \rangle, \dots, \langle i_s, j_s \rangle$  belonging to  $M$ , such that  $i_k \neq i_l, j_k \neq j_l$  for  $k \neq l$  ( $k, l = 1, 2, \dots, s$ ). This is an answer to a problem raised by A. N. Kolmogorov. (From the author's summary.) *W. Richter.*

**Le Cam, L.: Un théorème sur la division d'un intervalle par des points pris au hasard.** Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **7**, Nr. 3/4, 7—16 (1959).

For every integer  $n > 1$ , let the variables  $U_{n,j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) represent the successive intervals into which the segment  $[0, n]$  is divided by  $n - 1$  points taken on it at random. Consider the sequence  $\{V_j\}$  of independent random variables distributed in the interval  $[0, \infty]$  according to the density function  $e^{-x}$ . Let  $\{g_n\}$  be a sequence of Baire functions defined in  $[0, \infty]$ . In this theorem, the asymptotic behaviour, as  $n \rightarrow \infty$ , of the sum  $W_n = \sum_{j=1}^n g_n(U_{n,j})$  is derived from that of the

variable  $[T_n, S_n]$  where  $T_n = \sum_{j=1}^n g_n(V_j)$  and  $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (V_j - 1)$ . The author uses the fact that the distribution of  $W_n$  is equal to the conditional distribution of  $T_n$  given that  $S_n = 0$ . The theorem is demonstrated under the assumption that the distribution of  $[T_n, S_n]$  converges, as  $n \rightarrow \infty$ , to a limiting distribution. Such an assumption is then partially dependent on the form of the functions  $g_n$ . This form has been considered, only, in some particular cases given by the author as examples of application of the theorem. *Saad K. Nasr.*

**Ray, Daniel: Stable processes with an absorbing barrier.** Trans. Amer. math. Soc. **89**, 16—24 (1958).

Mehrere Eigenschaften der konjugierten Verteilung zweier zufälliger Größen  $T(X) = \inf \{t | X(t) \in (a, b), t \geq 0\}$ , der Zeit des ersten Austrittes aus dem Intervall  $(a, b)$  und  $X(T)$ , des Wertes der zufälligen Größe  $X(t)$  im Augenblick des Austrittes, wobei  $X(t)$  ein kontinuierlicher stabiler Prozeß mit dem Exponenten  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ ) und  $X(0) = 0$  ist. Man erhält einen genauen Ausdruck der Verteilungsdichte  $\varrho(x)$  der zufälligen Größe  $X(T)$  für  $x \geq b$ , und es wird der



Wert von  $\int_0^{\infty} P_0(x, t) dt$  bestimmt, wenn  $b$  eine Absorptionsbarriere ist, wobei

$$P_0(x, t) = \frac{d}{dx} \text{Prob} \{X(T) \leq x, T > t\}.$$

Zu diesem Zwecke wird die Gleichung von Desiré André, welche dem Prozesse  $Y(t) = X(T+t) - X(T)$  entspricht, herangezogen. *O. Onicescu.*

**Masani, Pesi:** Sur les processus vectoriels minimaux de rang maximal. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 2215—2217 (1958).

Nous donnons un résumé de notre extension aux processus stochastiques vectoriels stationnaires du théorème de Kolmogorov [Bjull. Moskovsk gosudarst. Univ. Mat. 2, Nr. 6, 1—40 (1941)] sur un processus scalaire ayant une distribution spectrale dont l'univers de la dérivée est sommable. (Résumé de l'A.) *R. Féron.*

**Wiener, Norbert et Pesi Masani:** Sur la prévision linéaire des processus stochastiques vectoriels à densité spectrale bornée. (Détermination de la fonction génératrice.) C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 1655—1656 (1958).

Détermination de la fonction caractéristique, résolvant le problème de la prévision pour un processus stochastique vectoriel, stationnaire et discret. *R. Féron.*

**Masani, Pesi:** Sur la prévision linéaire d'un processus vectoriel à densité spectrale non bornée. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 2337—2339 (1958).

L'A. étend quelques uns des résultats de Wiener et Masani (ce Zbl. **80**, 130 et recension précédente) à des processus stochastiques vectoriels stationnaires ayant des densités spectrales non bornées. *R. Féron.*

**Lévy, Paul:** Un paradoxe de la théorie des ensembles aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 181—184 (1959).

$X$  étant une variable aléatoire à valeurs dans un espace  $\Omega$ , et  $y = f(x)$  une fonction à valeurs dans un espace  $\Omega^*$ , il peut arriver que  $Y = f(X)$  dépend d'une loi continue, et telle cependant que, pour aucun ensemble  $E^* \subset \Omega^*$ ,  $\text{Pr}(Y \in E^*)$  ne soit à la fois bien défini,  $> 0$  et  $< 1$ . Des exemples, dans lesquels les  $Y$  sont des ensembles aléatoires montrent qu'on ne saurait éviter l'étude de ces éléments aléatoires. (Résumé de l'A.) *A. Pistoia.*

**Thomasian, A. J.:** Metrics and norms on spaces of random variables. Ann. math. Statistics **28**, 512—514 (1957).

L'auteur donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la convergence en norme soit équivalente à la convergence en probabilité. *R. Féron.*

**Nasr, Saad K.:** Sur l'unicité de la moyenne de Doss des variables aléatoires situées dans quelques espaces de Banach. Colloquium math. **5**, 85—94 (1958).

L'A. indique quelques cas particuliers importants d'éléments aléatoires dans un espace de Banach, pour lesquels il existe une et une seule moyenne au sens de Doss-Fréchet [cf. S. Doss, ce Zbl. **32**, 289 et Fréchet, ce Zbl. **73**, 347; Giorn. Ist. Ital. Attuari **20**, 1—37 (1959)]. *R. Féron.*

**Badrikian, Albert:** Résultats relatifs aux éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach réflexif non séparable. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 882—884 (1958).

L'A. étend à des espaces de Banach non séparables les résultats obtenus par Mlle Mourier dans le cas séparable (cf. Mourier, ce Zbl. **53**, 95) en ce qui concerne 1. la loi des grands nombres pour la convergence forte, 2. le théorème de Bochner généralisé. Il obtient ainsi le théorème suivant: Si  $F$  est un espace de Banach réflexif et  $\varphi(x^*)$  une fonction définie positive sur  $F^*$  telle que  $\varphi(0) = 1$  satisfaisant à une certaine condition  $C'$  (différente de la condition  $C$  de Mourier), il existe un élément aléatoire à valeurs dans  $F$  dont  $\varphi$  est la caractéristique. *R. Féron.*

**Bass, Jean et Paul Krée:** Sur les fonctions pseudo-aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 1083—1085 (1958).

In Fortsetzung seiner früheren Arbeiten (dies. Zbl. 77, 333; 78, 320) nennt Verf. hier die Funktionen  $u(t)$  der Klasse  $A$  „pseudo-zufällige Funktionen“. Verf. beweist: Wenn  $\gamma(h)$  existiert, so besitzt  $\gamma(h)$  ein Mittel  $M\gamma(h)$ . Ist  $M\gamma(h) = 0$ , so existiert das zeitliche Mittel von  $u(t)$  und ist gleich Null. Auf Grund dieses Resultats werden weitere Beispiele pseudo-zufälliger Funktionen konstruiert. *W. Richter.*

**Bass, Jean:** Fonctions pseudo-aléatoires et fonctions de Wiener. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 1163—1165 (1958).

In Ergänzung der früheren Berichte (s. vorstehendes Referat und die dort angegebenen Literaturzitate) gibt Verf. Beispiele pseudo-zufälliger Funktionen an, die nur endlich viele Werte annehmen. *W. Richter.*

**Tortrat, Albert:** Itération de certaines matrices et processus de Markoff. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1872—1874 (1957).

The author considers a one dimensional random walk with various boundary conditions — one or two barriers which are absorbing, reflecting, or elastic — and with an arbitrary, given initial distribution. He presents and discusses two theorems which give methods of obtaining the probability distributions at the  $n$ -th step, but which do not give explicitly the generating functions. He discusses extending the results to the limiting case of the diffusion process. *L. Cote.*

**A. Sales Vallés, Francisco de:** Über periodische Zufallsfunktionen. Collect. Math. 9, 105—141 (1957) [Spanisch].

Der Verf. nennt einen stochastischen Prozeß  $X(t)$  periodisch mit der Periode  $\omega$ , wenn  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  und  $X(t_1 + \omega), \dots, X(t_n + \omega)$  stets die gleiche gemeinsame Verteilung haben, wobei  $\omega$  positiv und minimal sei. Ein Prozeß heißt quasi-periodisch, wenn er die Summe eines periodischen Prozesses und eines rein stochastischen Prozesses ist. An verschiedene einfache Umformungen dieser Begriffe und Aussagen darüber, insbesondere im Zusammenhang mit der Kovarianzfunktion, schließt sich die Betrachtung von Periodizitätseigenschaften verschiedener Prozesse, die aus den gegebenen abgeleitet sind, z. B. durch Summen- oder Mittelbildung über gewisse diskrete oder kontinuierliche  $t$ -Bereiche. Ein periodischer Prozeß  $X(t)$  heißt konvex, wenn  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  bei voneinander verschiedenen  $t_1, \dots, t_n$  immer linear unabhängig sind. Verf. untersucht den von allen zufälligen Variablen  $X(t)$  erzeugten Hilbertschen Raum  $L_2$  und die Eigenschaften von Trajektorien von Punkten aus  $L_2$ , insbesondere im Fall eines konvexen Prozesses. Als Anwendung wird die Existenz des Zeitmittels des Prozesses über ein Periodenintervall durch Schlüsse geometrischer Natur bewiesen und der übliche Integralausdruck hergeleitet: dieses Mittel ist infolge der vom Verf. gegebenen Definition nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Schließlich werden stationäre periodische Prozesse mit Hilfe von Entwicklungen der Form  $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n e^{i\lambda_n t}$  mit paarweise orthogonalen zufälligen Variablen  $U_n$  behandelt. *K. Krickeberg.*

**Driml, Miloslav et Otto Hanš:** Trois théorèmes concernant l'expérience dans le cas continu. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 629—631 (1959).

Let  $T_t(\omega, x)$  be a random transform for all  $t \geq 0$ , being a transformation of space  $X$  into itself for  $\omega \in \Omega$ . Three theorems give sufficient conditions for  $x_t(\omega) \in X$  to converge almost surely to  $\varphi(\omega)$ , a random element, when  $t \rightarrow \infty$ . *S. Vajda.*

**Durand, David and J. Arthur Greenwood:** Random unit vectors. II: Usefulness of Gram-Charlier and related series in approximating distributions. Ann. math. Statistics 28, 978—986 (1957).

Verf. untersuchen die Brauchbarkeit einiger Approximationsformeln für die Verteilung der Summe von  $n$  zufälligen zweidimensionalen Vektoren und einer Komponente dieser Summe in dem Fall, daß  $n$  klein ist. Vgl. Teil I der Arbeit (dies. Zbl. 66, 124). *W. Richter.*

**Blum, J. R. and Murray Rosenblatt:** A class of stationary processes and a central limit theorem. *Duke math. J.* **24**, 73—78 (1957).

Es sei  $\eta = (\eta_i; i = \dots, -1, 0, 1, \dots)$  eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler,  $T$  der Verschiebungsoperator  $T\eta = (\eta'_i; i = \dots - 1, 0, 1, \dots)$  mit  $\eta'_i = \eta_{i+1}$  und  $g$  eine quadratisch integrierbare Funktion, die auf dem von  $\eta$  erzeugten Wahrscheinlichkeitsraum definiert ist. Durch  $X_n = g(T^n \eta)$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , werde ein stationärer Prozeß erklärt, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte  $E(X_n) = 0$ . Weiter sei  $F$  die zugehörige spektrale Verteilungsfunktion, also

$$E(X_n X_{n+s}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} dF(\lambda).$$
 Die Verf. beweisen, daß  $F$  totalstetig ist. Unter gewissen Voraussetzungen über die Momentenstruktur des Prozesses gilt der zentrale Grenzwertsatz, und zwar ist  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i$  asymptotisch normal mit der Varianz  $2\pi f(0)$ , wobei  $f$  die spektrale Dichte bedeutet. K. Krickeberg.

**Shapiro, J. M.:** Sums of independent truncated random variables. *Ann. math. Statistics* **28**, 754—761 (1957).

Let  $\{x_{nk}\}$  ( $k = 1, \dots, k_n; n = 1, 2, \dots$ ) be a double sequence of infinitesimal random variables (c. f. Gnedenko-Kolmogorov. Limit distributions ..., this Zbl. **56**, 360), and let  $S_n = \sum_k x_{nk}$  have the cumulative distribution function  $F_n(x)$ .

The double sequence  $\{x_{nk}^a\}$  with sums  $S_n^a$  having cumulative distribution functions  $F_n^a(x)$  is formed from the above by truncating at  $\pm a$ , i. e.,  $x_{nk}^a = x_{nk}$  or 0 according as  $-a < x_{nk} \leq a$  or not. When  $F_n(x)$  has a limit distribution  $F(x)$ , the author shows that  $F_n^a(x)$  has the limit distribution  $F^a(x)$  whose characteristic function in the Levi-Khintchine form has the truncation of the  $G(u)$  from the characteristic function of  $F(x)$  and a corresponding adjustment of the  $\gamma$  (for notation see Gnedenko-Kolmogorov). He shows further that all moments of  $F^a(x)$  are finite and are limits of the corresponding moments of  $F_n^a(x)$ . L. Cote.

**Franckx, Ed.:** La loi forte des grands nombres des variables uniformément bornées. Critère des sous-suites caractéristiques. *Trabajos Estadíst.* **9**, 111—115 (1958).

The author considers, essentially, a sequence  $\{X_i\}$  of possibly dependent random variables with  $E\{X_i\} = 0$  and  $|X_i| < L$ . Defining  $S_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)$ , he asserts that  $P\{\lim_n S_n = 0\} = 1$  if and only if some subsequence,  $\{S_{n_i}\}$  with  $n_{i+1}/n_i \rightarrow 1$ , has this property. Since he shows that  $\{S_n \rightarrow 0\}$  is equivalent to  $\{S_{n_i} \rightarrow 0\}$  the proposition is not actually concerned with random variables. L. Cote.

**Rozanov, Ju. A. (Yu. A.):** On a local limit theorem for lattice distributions. *Teor. Veroyatn. Primen.* **2**, 275—280, engl. Zusammenfassg. 281 (1957) [Russisch].

Es wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß für die ganzwertigen unabhängigen Zufallsveränderlichen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  mit dem endlichen Erwartungswert  $M(\xi_k) = a_k < \infty$  und mit der endlichen Streuung  $D^2(\xi_k) = b_k^2 < \infty$ , die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(A) \quad B_n = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \rightarrow \infty \text{ wenn } n \rightarrow \infty,$$

$$(B) \quad \frac{1}{b_k^2} \sum_{|j-a_k| \leq N} (j-a_k)^2 p_{kj} \rightarrow 1 \text{ wenn } N \rightarrow \infty \text{ gleichmäßig } k,$$

wobei  $p_{kj} = P(\xi_k = j)$ , die starke Form des lokalen Grenzwertsatzes gültig sei, d. h. daß für die Folge  $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n, \dots$ , die so entsteht, daß von den  $\xi_k$  endlich



viele abgeändert werden, die Relation

$$P\left(\sum_{i=1}^n \xi'_i = m\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{B'_n} e^{-(m-A'_n)^2/2B'_n} + O\left(\frac{1}{B'_n}\right)$$

erfüllt sei, wobei

$$A'_n = \sum_{k=1}^n M(\xi'_k), \quad B'_n = \sqrt{D^2(\xi'_1) + \dots + D^2(\xi'_n)}$$

gesetzt wurde. Die angegebene notwendige und hinreichende Bedingung lautet folgendermaßen: Besteht  $p_{k_0} \geq p_{k_j}$  und ist  $I$  eine Menge ganzer Zahlen mit  $\prod_{k=1}^{\infty} P(\xi_k \in I) > 0$ , so ist der größte gemeinsame Teiler der Elemente von  $I$  gleich 1.

*L. Schnell.*

**Girault, Maurice:** Files d'attente. Loi de survie d'un intervalle à partir d'un instant quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 2838—2839 (1958).

L'A. donne une résolution du problème suivant: l'axe de temps est divisé par un ensemble ordonné de points  $A_i$  qui forment une succession de segments aléatoires consécutifs  $A_i A_{i+1} = u > 0$ . La fonction de répartition  $F(u)$  et la fonction caractéristique  $\varphi(z)$  sont les mêmes pour tous ces intervalles indépendants (durées de services qui se succèdent sans interruption); on suppose que  $A_i A_{i+1} = u$  admet un moment du premier ordre au moins. On s'intéresse à la loi de  $V = M A_j = \min [M A_i \geq 0]$  ou  $M$  est un point qui a une loi uniforme sur l'axe de temps. L'A. prouve que la fonction caractéristique de  $V$  est  $\varphi_V(z) = [\varphi(z) - 1]/z \varphi'(0)$ . Puis l'A. démontre le théorème suivant: Si  $\varphi(z)$  est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire  $U$  admettant un moment d'ordre  $k$  et si de plus l'une au moins des conditions suivantes est réalisée: 1.  $k$  est pair 2.  $U$  est presque sûrement non négative, alors

$$\Phi(z) = [\varphi^{(k-1)}(z) - \varphi^{(k-1)}(0)]/z \varphi^{(k)}(0)$$

est une fonction caractéristique.

*W. Kryszicki.*

**Steinhaus, H. and S. Trybula:** On a paradox in applied probabilities. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 67—69, russ. Zusammenfassg. VI (1959).

Es gibt unabhängige Zufallsgrößen  $x, y, z$ , so daß jede der Ungleichungen  $x < y$ ,  $y < z$ ,  $z < x$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $> \frac{1}{2}$  eintritt. Dieses Paradoxon macht es schwierig, Warensendungen durch Vergleich von Stichproben zu prüfen.

*H.-J. Roßberg.*

**Newman, D. J. and M. S. Klamkin:** Expectations for sums of powers. Amer. math. Monthly **66**, 50—51 (1959).

"A sequence of independent random variables with a uniform distribution is chosen from the interval  $(0, 1)$ . The process is continued until the sum of the  $n$ th powers of the chosen numbers exceeds 1. One problem that arises is to determine the expected number of such choices."

**Isbell, J. R.:** Homogeneous games. Math. Student **25**, 123—128 (1958).

An  $n$ -player game is called simple, if there exist winning coalitions, two disjoint sets are not both winning, and any set containing a winning coalition is also winning. Such a game is strong, if there are no ties between coalitions and it is homogeneous, if given any two players  $A$  and  $B$  it is possible to permute the players so as to take all winning sets into winning sets and  $A$  into  $B$ . The following theorems are proved in this paper: (1) If  $n$  is a natural number, half of whose prime factors, or more, are odd, then there exists a strong simple homogeneous  $n$ -player game. If  $n$  is a power of 2, or if  $n = 12$ , there is no such game. (2) If some winning set in a simple homogeneous  $n$ -player game contains only  $k$  players, then  $n$  cannot exceed  $k^2 - 1$ . (3) There are exactly three strong simple homogeneous games which have the same number of minimal winning sets as of players, one each for  $n = 1, 3, 7$ . — It is not known whether, in (2),  $k^2 - 1$  could be replaced by  $k^2 - k + 1$ .

*S. Vajda.*

Isbell, J. R.: A class of simple games. *Duke math. J.* **25**, 423—439 (1958).

Gurk and the author have shown [*Ann. Math. Studies* **40**, 247—267 (1958)] that every strong simple game (for definitions, see review above) has at least as many minimal winning sets as non-dummy players. In the present paper all cases of equality are listed. They are a seven-player projective game, and an infinite set given in another paper by the same author (this *Zbl.* **73**, 134). *S. Vajda.*

● Chintschin, A. J. (Chinčin, A. Ja.), D. K. Faddejew (Faddeev), A. N. Kolmogoroff (Kolmogorov), A. Rényi und J. Balatoni: *Arbeiten zur Informationstheorie. I.* (Mathematische Forschungsberichte. IV.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957. 134 S. brosch. DM 18,40.

Actually, the information theory may be considered as a new chapter of modern probability theory and therefore a rigorous mathematical foundation of this theory is a very important problem. It is well-known that the beginning in this direction was made by Shannon's famous pioneering article published in *Bell System techn. J.* **27**; 379—423, 623—656 (1948). In the same direction, the collection under review presents five articles with an accentuate theoretical character.

The first article is due to A. Ja. Chinčin and deals with the elementary notions of information theory. A detailed review of this article appeared already in this *Zbl.* **50**, 354, so that we are referring to it for supplementary details.

The second article „Über grundlegende Sätze der Informationstheorie“ (S. 26—85) is due also to A. Ja. Chinčin [*Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 1 (67), 17—75 (1956)] and may be considered as fundamental for the mathematical developments of information theory, being the first treatment for the discrete case in a precise language. In the first chapter the definition of entropy of a finite probability field is given and certain auxiliary inequalities are proved.

Chapter II is concerned with ergodic sources. Let  $A$  be a finite alphabet, containing  $a$  letters, used by an information source and denote by  $A^I$  the set of all sequences  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ , where  $x_\alpha \in A$ ,  $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . The random character of the source is given by a probability  $\mu$  defined on the smallest Borel field  $F_A$  containing all cylinder sets of  $A^I$ . Consequently, a source is denoted by  $[A, \mu]$ . Since  $H = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} H_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M(-n^{-1} \log \mu(C))$  exists always for a stationary source  $[A, \mu]$ , then by definition  $H$  is the entropy of the given source (here  $H_n$  is the corresponding entropy of the probability field generated by the  $n$ -sequences  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ ). Further, properties of ergodic sources are discussed and the theorem of McMillan (this *Zbl.* **50**, 355) is rigorously proved: for any stationary information source the sequence  $((f_n(x) = -n^{-1} \log \mu(C))_{1 \leq n < \infty})$  converges in mean (and hence in probability) to an invariant function  $h(x)$ ; moreover, if the source is ergodic,  $h(x)$  is a. e. in  $A^I$  equal to the source entropy  $H$ . This result yields the so-called property  $E$ : for each ergodic source, arbitrarily small  $\varepsilon > 0$  and  $\delta > 0$  and sufficiently large  $n$ , all  $a^n$   $n$ -sequences  $C$  fall into two classes a) a class containing all  $C$  for which  $|n^{-1} \log \mu(C) + H| < \varepsilon$  and b) a class whose total probability is  $< \delta$ .

Chapter III deals with channels and the information sources which are feeding them. A channel is characterized by a) an input alphabet  $A$ , b) an output alphabet  $B$  and c) a conditional probability  $\nu_x(S)$  of obtaining  $y \in S$ ,  $S \in F_B$ , given  $x \in A^I$ . Shortly, a channel is denoted by  $[A, \nu_x, B]$ . Associating a stationary channel  $[A, \nu_x, B]$  with a stationary information source  $[A, \mu]$  feeding the channel, we are conducted to consider the transmission speed  $R(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$ , where  $H(X)$  and  $H(Y)$  are respectively the channel input and output entropy and  $H(X, Y)$  the joint entropy of the input and output. Some properties are then discussed, especially for the ergodic case.

Chapter IV is devoted to Feinstein's fundamental lemma (*Trans. Inst. Radio Engineers, profess. Group Inform.-Theory* **4**, 2—22 (1954)). Let us consider a

stationary channel  $[A, v, B]$  with finite memory  $m$ , no foresight and fed by a stationary source  $[A, \mu]$ . The ergodic transmission capacity is then defined as the supremum of  $R(X, Y)$  over all ergodic sources  $[A, \mu]$  which might be used as input to the channel. This notion is essential in the estimation of the number of a certain class of  $n$ -sequences given by Feinstein's lemma. Further, the precise proof of this result is given.

The last chapter is devoted to Shannon's theorems. Firstly, the coding problem is investigated, since the source alphabet  $A_0$  differs generally from the channel input alphabet  $A$ . According to hitherto obtained results, proofs are provided for the two Shannon-theorems, given a stationary channel  $[A, v, B]$  with finite memory  $m$ , no foresight and ergodic transmission capacity  $C$  and a stationary ergodic information source  $[A_0, \mu]$  of entropy  $H_0 < C$ . Finally, for  $H_0 > C$  the author states to be unable to prove the impossibility of finding a corresponding code with the specified properties, due to the definition of  $C$  (problem actually solved by I. P. Caregradskij in *Uspechi mat. nauk.* **13**, Nr. 6 (84), 49—61 1958).

In the third article D. K. Faddeev (this Zbl. **71**, 131) simplifies the system of axioms defining the entropy  $H(p_1, \dots, p_n)$  of a finite probability scheme (see A. Ja. Chinčhin, this Zbl. **50**, 354 and C. E. Shannon, loc. cit.). It is assumed that: a)  $H(p, 1-p)$  is continuous and positive for at least one point; b)  $H(p_1, \dots, p_n)$  is symmetric in  $p_1, \dots, p_n$ ; c) for  $n \geq 2$ ,

$$H(p_1, \dots, p_{n-1}, q_1, q_2) = H(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) + p_n H(q_1/p_n, q_2/p_n),$$

where  $p_n = q_1 + q_2$ . Under these conditions,  $H(p_1, \dots, p_n)$  is given by

$$-\lambda \sum_{j=1}^n p_j \log p_j \quad (\lambda > 0).$$

The fourth article inserted in the present collection, due to A. N. Kolmogorov [Sess. Akad. nauk. SSSR. Probl. Avtomat. proizvod., 15—20 oct. 1956, 66—99], is entitled „Theorie der Nachrichtenübermittlung“ (S. 91—116), and apart new results added, has an expository character. The article is divided into two chapters. Chapter I, Origin and object of the theory, begins by mentioning the connection between the estimation of the amount of information and certain tabulation problems concerning continuous functions (see also A. N. Kolmogorov, this Zbl. **70**, 115). Using simple examples, the concepts of transmission capacity and rate of creating information are discussed for noiseless channels. Further, the notions of entropy and amount of information are introduced for the discrete case. The transmission capacity is then considered for a noisy channel. A brief discussion on Shannon's fundamental concepts is then made and finally, connection with certain results obtained by R. Fisher and V. A. Kotel'nikov (Materialy 1. vsesojuzn. mat. S'ezd. Vopros. Rekonstrukc. Svjaz. 1933) is mentioned.

Chapter II, Foundations of the theory for continuous communications, has six sections. § 1 is on the amount of information  $I(\xi, \eta)$  contained in one random object  $\xi$  relative to the random object  $\eta$  and on several properties of this quantity. (See also A. N. Kolmogorov, A. M. Jaglom, I. M. Gel'fand, Doklady 3. vsesojuzn. mat. S'ezd., Moskva, Ijuń-Ijul' 1956; idem, this Zbl. **71**, 345). For two Gaussian random vectors an explicit formula for  $I(\xi, \eta)$  is mentioned (see also I. M. Gel'fand, A. M. Jaglom, this Zbl. **78**, 322—324). § 2 contains a brief abstract explanation of the principles of the Shannon theory of information transmission. § 3 presents the general definition of the concept of  $\varepsilon$ -entropy and certain results concerning its calculation, especially for the normal case. Stationary processes are considered in § 4 in connection with the notions of amount of information and rate of creating information. The calculation and estimation of the amount of information and of the rate of creating information using the spectral theory of random functions is sketched in § 5 [see M. S. Pinsker, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **99**, 213—216 (1954)]. For stationary Gaussian processes the notion of  $\varepsilon$ -entropy per unit time



is introduced and its expression in terms of the spectral density is given; special mention is made for processes with approximately bounded spectrum. The results here given clarify within what limits a certain formula obtained by Shannon (loc. cit. p. 652) can be applied to processes with unbounded spectrum. Furthermore, connection with a formula given by Kotel'nikov (loc. cit.) is made. The last section (§ 6) deals with the calculation and estimation of the transmission capacity in certain particular cases; moreover, explicit formulae are given for the Gaussian case.

In the present german translation, Chapter III of the original russian version was omitted. For Chapter II, see also A. N. Kolmogorov, *Inst. Radio Trans. Information-Theory*, IT-2, Nr. 4, 102–109 (1956).

The last article „Über den Begriff der Entropie“ (S. 117–134) is due to V. A. Rényi and J. Balatoni [*Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 1 1–2, 9–40 (1956)] and is divided into four sections. § 1 contains a brief discussion on the usual entropy of a finite scheme and its properties. In § 2 the notion of dimension  $d$  and  $d$ -dimensional entropy of a distribution function is introduced. Let  $\xi$  be an arbitrary bounded random variable and denote by  $[x]$  the integer part of  $x$ . If the following limit relation holds true

$$(*) \quad H_0([n\xi]/n) = d \log_2 n + H + o(1),$$

where  $H_0$  means the usual entropy in the discrete case, then by definition  $d = d(\xi)$  and  $H = H_d(\xi)$  are respectively the dimension  $d$  and the  $d$ -dimensional entropy of the distribution function of  $\xi$ . The cases when  $\xi$  is not bounded or when (\*) is not valid, are not investigated. For a discrete type random variable  $\xi$ ,  $P(\xi = x_i) = p_i$ ,  $1 \leq i < \infty$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ , the dimension  $d(\xi) = 0$  and  $H_0(\xi)$  is none other than the well-known expression  $-\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k$ , provided that this series is convergent; this fact yields a justification for the subscript 0, attached by the authors to the usual entropy of a finite scheme. Moreover, if the probability density  $f(x)$  of  $\xi$  is piecewise continuous in a finite interval and vanishes outside this interval, then

$$d(\xi) = 1 \quad \text{and} \quad H_1(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_2 f(x) dx.$$

It is also shown that for any  $d \in (0, 1)$  there exists a distribution function with dimension  $d$  and with a corresponding  $d$ -dimensional entropy. § 3 is on characteristic properties of dimension and entropy. The distribution function of  $\xi$  is called to be elementary if it is obtained as a mixture with certain weights  $p$  and  $q$  of a finite discrete distribution function  $\{p_1, \dots, p_n\}$  and of an absolutely continuous probability function whose probability density  $f(x)$  is piecewise continuous in a finite interval and vanishes outside this interval. If it is assumed that two numbers  $d = d(\xi)$  and  $H = H_d(\xi)$  verifying a suitable system of axioms are attached to a random variable  $\xi$  whose probability function belongs to the above mentioned class, then  $d(\xi) = q$  and

$$H_d(\xi) = -p \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k - q \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_2 f(x) dx - p \log_2 p - q \log_2 q;$$

furthermore, (\*) is valid and therefore these numbers represent exactly the dimension  $d$  and the  $d$ -dimensional entropy. A similar axiomatical treatment was made previously by A. Ja. Chinč'in (this *Zbl.* 50, 354) and D. K. Faddeev (loc. cit.) for the entropy of a finite scheme, i. e. of the 0-dimensional entropy. The last section (§ 4) is concerned with the entropy of multidimensional probability functions. The definition of dimension and  $d$ -dimensional entropy is introduced by an analog of (\*).

If the probability density  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$  of a random vector  $\vec{\zeta}$  is continuous inside the sphere  $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_r^2} \leq R$  and vanishes outside this sphere, then  $d(\vec{\zeta}) = r$  and

$$H_r(\vec{\zeta}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) \log_2 f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

If  $\xi$  and  $\eta$  are random variables and the following quantities exist, then with usual notations,

$$d(\xi, \eta) = d(\eta) + \overline{d(\xi|\eta)} \quad \text{and} \quad H_{d(\xi, \eta)}(\xi, \eta) = H_{d(\eta)}(\eta) + \overline{H_{d(\xi|\eta)}(\xi|\eta)};$$

if  $\xi$  and  $\eta$  are mutually independent random variables, then

$$d(\xi, \eta) = d(\xi) + d(\eta) \quad \text{and} \quad H_{d(\xi, \eta)}(\xi, \eta) = H_{d(\xi)}(\xi) + H_{d(\eta)}(\eta).$$

Finally, we mention that the original hungarian version has a section dealing with the connection between the notion of entropy of a probabilistic scheme and that used in statistical mechanics and information theory, which was omitted in the german text.

*R. Theodorescu.*

### **Statistik:**

● Anderson, T. W.: An introduction to multivariate statistical analysis. (Wiley Publications in Statistics.) New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1958. XII, 374 p. \$ 12,50.

This very useful book pulls together a large amount of information scattered over the literature: the bibliography (which the reviewer found not quite complete in a few subjects) contains some 450 titles. Even so, its author correctly remarks that the book does not treat certain topics in the field. Of the simpler topics that are omitted we mention: multivariate Čebyšev inequality, the theory of so-called categorical data, distribution-free methods. The author justifies the almost exclusive use of the normal distribution by the remark (which the reviewer would like to have seen corroborated) that the multivariate normal distributions have been found to be sufficiently close approximations to the populations, and by the fact that normal theory is amenable to exact mathematical treatment. The chapter headings are as follows: I. Introduction; II. the multivariate normal distribution (theorem 2. 6. 3 on the derivation of the density from the characteristic function omits the condition that the latter should be absolutely integrable, pp. 25—27 give a careful discussion of the singular normal distribution); III. estimation of the mean vector and the covariance matrix (maximum likelihood estimation, with some nice general properties of maximum likelihood estimators, and confidence regions); IV. the distribution and uses of sample correlation coefficients (proofs are neatly done by means of conditional distributions and do not depend on Wishart distribution, Hotelling's very useful alternative form of the distribution of the correlation coefficient is given in some detail, and there is a neat argument leading to „Fisher's  $z$ “ although the rapidity of its approach to normality is not explained); V. the generalized  $T^2$ -statistics (with, amongst other things, a section on non-central chi-square and  $F$ -distributions, and on Bennett's extension of Scheffé's solution of the Behrens-Fisher problem); VI. classification of observations (Bayes and minimax procedures, a large part of this chapter holds for general distributions); VII. the distribution of the sample covariance matrix and the sample generalized variance; VIII. testing the general linear hypothesis, analysis of variance (a multivariate analogue of  $F$ -test, an extensive discussion of Box's theory of the asymptotic expansion of its distribution, an illuminating account of invariant tests of the linear hypothesis); IX. testing independence of sets of variables; X. testing hypotheses of equality of covariance matrices and equality of mean vectors and covariance matrices (much of the distribution theory of Chs. IX and X is a further development and application of the distribution theory in Ch. VIII); XI and XII give the definition of principal components, canonical correlations, canonical variables and their estimators, while XIII shows that the distribution theory of Chs. VIII through XII largely depends on the distribution of the roots of  $|A - \lambda B| = 0$  ( $A$  and  $B$  Wishart matrices) and a few related equations (it might be worth-while to inquire if the treatment of these Chapters might

not be shortened and unified by means of an earlier presentation of the contents of Ch. XIII); XIV, a (very short) review of some other work in multivariate analysis (amongst other things: factor analysis, stochastic equations, time series analysis). Finally there is a useful appendix on matrix algebra. The various chapters have short introductory sections which give an lucid account on what the chapter will be about, they are concluded by several pages of problems ranging from elementary to quite advanced. Throughout the book the author gives much attention to geometric interpretations (e. g. in connection with ordinary and multiple correlation coefficients,  $T^2$ -statistic (p. 104), sample generalized variance (p. 167—170), estimation of regression coefficients (p. 181)), and to optimum properties of the tests discussed, in particular to invariance properties (e. g. in connection with ordinary and multiple correlation coefficients, regression coefficients,  $T^2$ -test, testing equality of covariance matrices, and testing independence of sets of variates). The likelihood ratio criterion is used as an elegant, unifying principle to derive test statistics. It is only natural that in a book of this scope some desires go unfulfilled. For instance, the reviewer feels that the characteristic function has been too much neglected as an elegant tool by which a number of proofs could have been shortened considerably. Some statements may puzzle the reader, so on p. 17 the statement that the covariance matrix is positive definite is not proved, neither is the statement (p. 22) that the implication of independence by lack of correlation depends on the assumption of normality. Some proofs could be made simpler or more direct, so on p. 136 the maximization of the function of  $d$  which leads to Mahalanobis' generalized distance, and on p. 164 the proof of Cochran's theorem. There is no difference between the notations for random matrices and random vectors; this will sometimes lead to confusion. Finally, although there are several useful sections on numerical computations (e. g. in connection with regression coefficients—Doolittle method and pivotal condensation shown to be essentially the same —,  $T^2$ -statistic, and latent roots and vectors), little attention seems to have been devoted to the effects of ill-conditioned matrices. On the whole, however, this is a very useful and stimulating book.

*H. R. van der Vaart.*

**Tukey, John W.:** On the comparative anatomy of transformations. *Ann. math. Statistics* 28, 602—632 (1957).

Es wird die Familie aller Transformationen betrachtet, die  $y$  in  $z = (y + c)^p$  überführen. Eingeschlossen sind  $z = \log(y + c)$  und  $z = e^{my}$  sowie  $z = 0$  ( $y = y_{\min}$ ),  $= 1$  sonst. Es wird eine Topologie auf dem Raum dieser Abbildungen eingeführt, weiter der Begriff der Strenge. Die vergleichende Anatomie befaßt sich mit den Eigenschaften dieser Abbildungen, Verhalten bei additiven Parametern der transformierten Zufallsvariablen, Übertragung von Konfidenzbereichen, Verhalten bei Hintereinanderausführen mehrerer Transformationen u. dgl.

*F. Wever.*

**Feldt, Leonard S.:** A comparison of the precision of three experimental designs employing a concomitant variable. *Psychometrika* 23, 335—353 (1958).

**Lord, Frederic M.:** Some relations between Guttman's principal components of scale analysis and other psychometric theory. *Psychometrika* 23, 291—296 (1958).

**Gaito, John:** The single latin square design in psychological research. *Psychometrika* 23, 369—378 (1958).

**Page, E. S.:** On problems in which a change in a parameter occurs at an unknown point. *Biometrika* 44, 248—252 (1957).

$x_1, \dots, x_n$  seien Stichprobenwerte in der Reihenfolge der Beobachtung aus einer Verteilung  $F(x, \theta)$ . Es soll die Nullhypothese:  $\theta_0$  gilt für die ganze Stichprobe, gegen die Hypothese: von der  $m$ -ten Beobachtung,  $m < n$ ,  $m$  unbekannt, gilt ein Parameter  $\theta_1 \neq \theta_0$ , getestet werden. Behandelt werden die beiden Fälle (1):  $\theta_0$  und  $\theta_1$  sind bekannt, Wechsel tritt bei der  $m$ -ten Beobachtung ein. (2):  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  sind be-



kannt, Wechsel bei der  $m$ -ten Beobachtung tritt von  $\theta_0$  nach  $\theta_1$  oder von  $\theta_0$  nach  $\theta_2$  ein ( $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ ). Das Verfahren benutzt die cumulative Summe der Beobachtungen und konstruiert damit eine Irrfahrt (Random walk). F. Wever.

**Good, I. J.:** On the serial test for random sequences. *Ann. math. Statistics* 28, 262—264 (1957).

Es sei  $a_1, \dots, a_N$  eine endliche Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit  $P(a_j = r) = p_r$  ( $j = 1, \dots, N$ ,  $r = 0, \dots, t-1$ ). Es bezeichne  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_v)$  und  $P(\mathbf{r})$  die Wahrscheinlichkeit für  $(a_j = r_1, a_{j+1} = r_2, \dots, a_{j+v-1} = r_v)$  die Inzidenz  $j+k$  modulo  $N$  verstanden. Weiter sei

$$P(a_{j+m} = r_1, \dots, a_{j+m+v-1} = r_v | a_j = r_1, \dots, a_{j+v-1} = r_v) = P_m(\mathbf{r}).$$

Dann gilt der folgende Satz: Wenn  $v + |m| \leq N$ , dann ist

$$\sum_{\mathbf{r}} P_m(\mathbf{r}) = 1 \text{ für } m \neq 0, = v^v \text{ für } m = 0.$$

Es wird noch eine Prüffunktion für Unabhängigkeit der  $a_j$  eingeführt und deren Streuung mit Hilfe des Satzes berechnet. F. Wever.

**Chakravarti, I. M.:** Simplified proofs of some results in the theory of optimal designs. *Sankhyā* 19, 189—194 (1958).

Let  $y$  denote a vector of  $n$  mutually independent normal random variables with equal variance and with the expectation vector  $\alpha \cdot A'$ , where  $A'$  is the  $(k \times n)$ -type design matrix and  $\alpha$  a  $k$ -dimensional vector of unknown parameters. It is desired to test the linear hypothesis  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p$  ( $p \leq k$ ). Four theorems are proved concerning the characterization of the matrix  $A'$  of most efficient designs. The efficiency of a design is judged by two criteria suggested by Wald, viz. 1. by the smallest non-zero latent root of  $C_1^{-1}$ , where  $C_1$  is the  $p \times p$  submatrix appearing in the upper left-hand corner of  $(A' A)^{-1}$ , or 2. by the determinant of  $C_1^{-1}$ . The remaining two parts of the paper deal with the bounds of variances of least squares estimates and with the conditions for two orthogonal estimable linear parametric functions to possess mutually uncorrelated estimates. J. Machek.

**Wherry, Robert J.:** Hierarchical factor solutions without rotation. *Psychometrika* 24, 45—51 (1959).

**Blasbalg, H.:** Transformation of the fundamental relationships in sequential analysis. *Ann. math. Statistics* 28, 1024—1028 (1957).

Es werden Sequentialtests einer Hypothese  $H_0$  (Parameter  $\theta_0$ ) gegen eine Hypothese  $H_1$  (Parameter  $\theta_1$ ) untersucht bei Verteilungen der Form

$$dP(x, \theta) = \exp[r(\theta)A(x) + s(\theta)B(x)] dw(x).$$

Im allgemeinen führt ein Paar von Verteilungen zu einer Zwei-Parameterfamilie von Wahrscheinlichkeitsverhältnissen und damit zu einer Vier-Parameterfamilie von Sequentialtests. Hier wird gezeigt, daß unter gewissen Umständen nur eine Drei-Parameterfamilie solcher Tests entsteht. Ein Beispiel solcher Vereinfachung gab L. L. Savage (dies. Zbl. 82, 350). In der Verteilung  $P(x, \theta)$  können  $A(x)$ ,  $B(x)$  weitgehend beliebig gewählt werden,  $w(x)$  ist irgendein positives Maß,  $r, s$  müssen so gewählt werden, daß  $\int dP = 1$ . Der Sequentialtest wird ausgeführt mit der Größe

$$z(n) = [r(\theta_1) - r(\theta_0)] \sum A(x_i) + [s(\theta_1) - s(\theta_0)] \sum B(x_i).$$

$H_1$  ist anzunehmen, wenn  $z(n) = \log \frac{1-\beta}{\alpha} + \log \frac{\xi}{1-\xi}$ , worin  $\alpha, \beta$  die Wahrscheinlichkeiten für die Annahme von  $H_1$  ( $H_0$ ), wenn  $H_0$  ( $H_1$ ) richtig ist.  $\xi$  ist die a priori-Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von  $H_0$ . F. Wever.

**Weiss, Lionel:** Tests of fit in the presence of nuisance and scale parameters. *Ann. math. Statistics* 28, 1016—1020 (1957).

Suppose  $\{X_i; i = 1, \dots, n\}$  are independent random variables with a common absolutely continuous cumulative distribution function  $F(x)$ . Let  $\{Y_i\}$  be the

ordered values of the  $X_i$ ,  $Y_i \leq Y_{i+1}$  and let  $U_i = Y_{i+1} - Y_i$ . The author gives two theorems concerning the stochastic convergence of certain linear combinations of  $U_i^r$  for fixed  $r$ , as  $n \rightarrow \infty$ . He proposes a test of the hypothesis that  $F(x) = G(Cx + D)$  for  $x$  in a certain interval where  $G(x)$  is a given cumulative distribution function and  $C$  and  $D$  are unspecified constants; using the theorems he shows it to be consistent against a wide class of alternatives. In the concluding paragraph he makes a conjecture about the limit distribution of the test statistic and justifies it heuristically.

L. Cote.

**Lişcu, Traian:** Sur les moments stochastiques des moments de sélection. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ştiţ., Sect. Şti. mat. fiz. **4**, 791—797, russ. und französ. Zusammenfassg. 797—799 (1952) [Rumänisch].

Let  $x_1, \dots, x_n$  be a sample from a given population and  $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_i u(x_i)$ ,  $\bar{u}' = \frac{1}{n} \sum_i u'(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$ . By making use of a certain relation established by the author concerning the partial derivative  $\varphi_{rr'}$  of order  $r$  with respect to  $x$  and of order  $r'$  with respect to  $x'$  of a function  $\varphi(x, x') = F(f(x, x'))$ , it is shown that

$$E(\bar{u}^r) = \sum_{j_i} \frac{r!}{j_1! \dots j_r!} \cdot \frac{n_j}{n^r} \left( \frac{E(u)}{1!} \right)^{j_1} \dots \left( \frac{E(u^r)}{r!} \right)^{j_r},$$

where  $j_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,  $\sum_i j_i = r$ ,  $j = \sum_i j_i$  and

$$n_j = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-j+1), & 1 \leq j \leq n, \\ 0, & j \geq n+1. \end{cases}$$

Moreover,

$$E(\bar{u}^r \bar{u}'^{r'}) = \sum_{j_{i0} j_{01} \dots j_{rr'}} \frac{r! r'!}{j_{i0}! j_{01}! \dots j_{rr'}!} \cdot \frac{n_j}{n^{r+r'}} \left( \frac{E(u)}{1!0!} \right)^{j_{i0}} \left( \frac{E(u')}{0!1!} \right)^{j_{01}} \dots \left( \frac{E(u^r u'^{r'})}{r! r'!} \right)^{j_{rr'}},$$

where  $j_{ii'} \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq i' \leq r'$ ,  $\sum_{i,i'} j_{ii'} = r$ ,  $\sum_{i,i'} i' j_{ii'} = r'$ ,  $j = \sum_{i,i'} j_{ii'}$  and  $n_j$  has the same expression. If  $u = x^p$ ,  $u' = x^{p'}$ , then  $\bar{u}$  and  $\bar{u}'$  become the moments of the sample  $a_p$  and  $a_{p'}$  and these formulae give the expressions for  $E(a_p^r)$  and  $E(a_p^r a_{p'}^{r'})$ , calculated by means of the theoretical moments  $\alpha_p$ .

R. Theodorescu.

**James, G. S.:** On moments and cumulants of systems of statistics. Sankhyā **20**, 1—30 (1958).

Die Taylorentwicklung der momentenerzeugenden Funktion (moment generating function)

$$E(e^{\theta X}) = E\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\theta X)^r}{r!}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_r' \theta^r}{r!}$$

und diejenige des Logarithmus der gleichen Funktion

$$\log E(e^{\theta X}) = \log \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_r' \theta^r}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{k_r \theta^r}{r!}$$

ergeben den formalen Zusammenhang zwischen den Momenten  $\mu_r'$  und den Kumulanten (cumulants)  $k_r$  der Verteilung von  $X$ . Verf. diskutiert in dieser Arbeit die Zusammenhänge von Momenten und Kumulanten von Grundgesamtheiten und Stichproben. Bekanntlich hat Fisher seine „ $k$ -statistics“ zu dem Zwecke eingeführt, geeignete Schätzfunktionen für die Kumulanten zu finden, und hat auch die Regeln angegeben, wie mit diesen Größen zu rechnen ist. Kendall hat gezeigt, daß die „ $k$ -statistics“ die einfachsten homogenen ganzrationalen und gegenüber Verschiebungen invarianten Stichprobenfunktionen sind, welche den Fisherschen Rechenregeln genügen. Verf. zeigt nun, wie die Fisherschen Rechenregeln auch ohne die recht komplizierten Methoden Kendalls bewiesen werden können. Zusätzlich werden

die Eigenschaften der allgemeinen homogenen ganzrationalen Stichprobenfunktionen untersucht, wobei der eindimensionale wie der mehrdimensionale Fall diskutiert werden.

*H. Jecklin.*

**Castellano, Vittorio:** Sulla suddivisione in intervalli di una variabile già divisa in intervalli, nella ipotesi che la distribuzione delle frequenze sia una poligonale. *Scritti mat. in Onore di F. Sibirani* 63—80 (1957).

Verf. untersucht im Anschluß an eine frühere Arbeit [V. Castellano, *Statistica*, Bologna 16, 151—186 (1956)] die Korrekturen, die man an den aus Häufigkeitstabellen mit Klasseneinteilung berechneten Mittelwerten und Varianzen anbringen muß, wenn man die Annahme zugrunde legt, in jedem Intervall sei die Verteilung linear und der Endwert eines Intervalls sei gleich dem Anfangswert des nächsten. Hierbei wird auch der Fall ungleich großer und nochmals unterteilter Intervalle betrachtet. Die Beziehungen zu anderer Literatur über Sheppard- und ähnliche Korrekturen werden diskutiert, auch an Hand eines numerisch durchgerechneten klassischen Beispiels über Säuglingssterblichkeit.

*O. Ludwig.*

**Guttman, Louis:** To what extent can communalities reduce rank? *Psychometrika* 23, 297—308 (1958).

**Karon, Bertram P. and Irving E. Alexander:** A modification of Kendall's tau for measuring association in contingency tables. *Psychometrika* 23, 379—383 (1958).

**Törnqvist, Leo:** A method for calculating changes in regression coefficients and inverse matrices corresponding to changes in the set of available data. *Skand. Aktuarietidskr.* 1957, 219—226 (1958).

Zwischen der Größe  $y$  und der Vektorgröße  $x = (x_1, \dots, x_n)$  bestehe eine lineare Regression der Form:  $y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  = Residualterm). Die Vektorgröße  $x$  ändere sich systematisch, z. B. mit der Zeit  $t$ . Es seien bereits für eine Reihe von  $x$ -Werten Beobachtungen  $y$  gemacht und daraus die Schätzwerte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  der Regressionskoeffizienten  $A_1, \dots, A_n$  berechnet worden. Wenn nun zu einem neuen  $x$ -Wert die Größe  $y'$  beobachtet wird und diese neue Beobachtung ebenfalls mit zur Berechnung der Schätzwerte herangezogen werden soll, dann ist es sehr wichtig zu wissen, wie durch diese zusätzliche Beobachtung die Schätzwerte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  verändert werden. In der Arbeit wird hierfür eine Formel hergeleitet, nach der die neuen Schätzwerte  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  aus den alten und der zusätzlichen Beobachtung  $(x, y')$  berechnet werden können. Diese Formel wird auf den Fall erweitert, daß mit der Hinzunahme der neuen Beobachtung ein Teil der Information der älteren Beobachtungen weggelassen wird, so daß der mittlere „Lag“  $T$  bei allen neu berechneten Regressionskoeffizienten unverändert bleibt. Man erhält so eine Folge vergleichbarer Regressionskoeffizienten. Im letzten Abschnitt verallgemeinert Verf. die Matrizenformeln, die er zur Herleitung der Ergebnisse benötigte.

*B. Schneider.*

**Quenouille, M. H.:** Discrete autoregressive schemes with varying time-intervals. *Metrika* 1, 21—27 (1958).

Bei den diskreten, autoregressiven Zeitreihen ist es üblich, die für die Beobachtungen gewählten Zeitabstände (Beobachtungsintervalle) auch dem Schema und den Störgliedern (error terms, residual terms) zugrunde zu legen. In der Arbeit wird der Fall untersucht, daß diese Annahmen nicht mehr gelten. Verf. kann zeigen, daß die Ordnung des Schemas sich nicht ändert, wenn als Beobachtungsintervall das  $p$ -fache des ursprünglichen Intervalls gewählt wird. Ebenso beeinflusst eine zufällige Variation des Beobachtungsintervalls die Ordnung des Schemas nicht, vorausgesetzt, daß die Beobachtungsintervalle voneinander und von der Verteilung der Störglieder unabhängig sind. Dagegen werden die Abhängigkeitsverhältnisse der Störglieder durch eine Variation der Beobachtungsintervalle verändert. Verf. untersucht hier insbesondere die Frage, wann die Störglieder als unabhängig angesehen werden können, und findet hierfür spezielle Bedingungen, die bei einer Variation der Beobach-



tungsintervalle im allgemeinen nicht mehr erfüllt sind. Praktisch bedeutet dies, daß ein autoregressives Schema mit autokorrelierten Störgliedern — etwa mit Störgliedern, die einem Gleitmittelschema folgen — einer beobachteten Zeitreihe besser angepaßt ist, als ein Schema mit unabhängigen Störgliedern. Für autoregressive Zeitreihenschemen von 2. Ordnung mit Gleitmittel-Störgliedern wird das Anpassen an eine empirische Zeitreihe ausführlich diskutiert und an einem Beispiel von Kendall demonstriert.

B. Schneider.

**Hudimoto, Hiroshi:** A note on the probability of the correct classification when the distributions are not specified. Ann. Inst. statist. Math. 9, 31—36 (1957).

Eine Population  $\pi$  sei aus zwei Populationen  $\pi_1, \pi_2$  gemischt, die mit  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  verteilt sein mögen. Die Wahrscheinlichkeiten für Antreffen eines Elementes aus  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  seien  $p$  und  $q = 1 - p$ . Es bedeute  $x$  die Grenze, nach der entschieden werden soll, ob ein Element zu  $\pi_1$  gehört. Es werde jetzt eine Stichprobe vom Umfang  $N$  gezogen, in der  $m$  Elemente aus  $\pi_1$  enthalten sind. Dann wird

$$\hat{C}_N(x) = \frac{m}{N} c_m(x) + \frac{N-m}{N} (1 - c_{N-m}(x))$$

als Schätzfunktion für die Wahrscheinlichkeit der richtigen Klassifizierung durch  $x$  angesetzt. Es sei

$$C(x) = p F_1(x) + q (1 - F_2(x))$$

und  $c_m(x)$  bzw.  $c_{N-m}(x)$  bezeichne ihre empirisch gefundene Verteilungsfunktion. Dann gilt für gegebene  $\eta$  und  $x$

$$P \{ |\hat{C}_N(x) - C(x)| > 3\eta \} \leq \frac{1}{5N^2\eta^4} \left[ 1 + \left\{ \frac{p^4}{(p-\eta)^2} + \frac{q^4}{(q-\eta)^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{5N^2\eta^4} \right\} \right].$$

Unter der Bedingung der Stetigkeit von  $F_1$  und  $F_2$  wird eine bessere Ungleichung angegeben und schließlich eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, daß das Maximum von  $\hat{C}_N(x)$  unter dem von  $C(x)$  bleibt. Für einige Werte von  $p$  werden Zahlentafeln für  $N$  bei vorgegebenen Sicherheitsgrenzen mitgeteilt. F. Wever.

**Gautschi, Werner:** Some remarks on systematic sampling. Ann. math. Statistics 28, 385—394 (1957).

A comparison of two types of systematic sampling of the population  $\{y_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = nls$ . For the first,  $s$  elements are chosen at random from the first  $ls$   $y$ 's, then every  $(ls)$ th  $y$  after each of these is taken to make up a sample of size  $ns$ . For the second, one element is taken at random from the first  $l$   $y$ 's and every  $l$ 'th  $y$  thereafter to make up a sample of equal size. The population is assumed to be an outcome of an  $N$ -dimensional random scheme of one of three types: random order, linear trend, serial correlation. The expected variances of the estimates of the population mean are compared for the two types of sampling with the results generally in favor of the second. Some asymptotic results are given for the relative precision of the two types in a serially correlated population having an exponential correlogram.

L. Cote.

**Goodman, Leo A.:** Simple statistical methods for scalogram analysis. Psychometrika 24, 29—43 (1959).

**Fabian, Václav:** Some modifications of interval estimation and choice of number of observations for a binomial random variable. Českosl. Akad. Věd. apl. Mat. 4, 35—50, russ. und engl. Zusammenfassg. 51—52 (1959) [Tschechisch].

Two modifications of the usual two-sided interval estimates are considered, which have the following feature: at the cost of giving up a bit of information provided by the usual  $100(1 - 2r)$  per cent confidence interval they increase the probability of the right statement to  $1 - r$ . The modified procedures are then applied to the following problems: 1. if  $p$  is the unknown parameter of a probability distri-

bution and  $p_1 < p_2$  are given numbers, to select one of the two decisions  $p < p_2$  or  $p > p_1$ ; 2. if  $k$  is a given number, to select one of the three decisions,  $p < k$ ,  $p > k$ ,  $p$  approximately equal to  $k$ . The probability of selecting the right decision is at least equal to a given number  $1 - r$  for all procedures. The problem of comparing the expectation of a normal random variate with a given number is considered as an example. Further applications are concerned with the binomial distribution. Two tables are presented as an aid in applying the procedures to a binomial variate. The values are compared with those resulting from the use of the common inverse sine transformation and the normal approximation. *J. Machek.*

**Sibuya, Masaaki and Hideo Toda:** Tables of the probability density function of range in normal samples. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 155—165 (1957).

Es werden Tabellen für die Dichtefunktion  $f_n(w)$  für die Spannweite  $w$  (range) von Stichproben aus Normalverteilung vom Umfang  $n = 3, 4, 5, \dots, 20$  mitgeteilt.  $f_n(w)$  ist für Schritte um 0,05 von  $w$  tabelliert. *F. Wever.*

● **Croxton, Frederick E.:** Elementary statistics with applications in medicine and the biological sciences. Unabridged and corrected republ. of the first ed. 1953. New York: Dover Publications, Inc. 1959. VII, 376 p. \$ 1,95.

Verf. beschreibt die Grundbegriffe der Statistik — wie arithmetisches Mittel, Zentralwert, häufigster Wert, Streuung, Schiefe, Korrelation — und die üblichen Methoden, z. B.  $\chi^2$ -Test, Varianzanalyse,  $F$ -Test. Er setzt nur Schulkenntnisse voraus. Am Anfang jedes Kapitels werden die darin vorkommenden Bezeichnungen erläutert. Das ist für den Praktiker, der nicht das ganze Buch durcharbeiten will, sehr nützlich. Alle Verfahren werden an Beispielen aus der Praxis erläutert. Die Darstellung wird durch viele leicht verständliche Abbildungen ergänzt. Im Anhang finden sich Tabellen für die Durchführung von Signifikanztests, Tafeln von Quadrat-zahlen, Quadratwurzeln, reziproken Werten und sogar eine Logarithmentafel mit einer Erläuterung der Logarithmen und des Rechnens mit ihnen. Da das Buch leicht zu lesen ist und keine Anforderungen in bezug auf höhere Mathematik an den Leser stellt, ist es für Ärzte, Biologen und andere Naturwissenschaftler, denen die Mathematik fern liegt, sehr geeignet. *G. Reißig.*

● **Kempthorne, Osear:** An introduction to genetic statistics. (A Wiley Publication in Applied Statistics.) New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd. 1957. XVII, 545 p. \$ 12,75. 102 s. net.

The book consists of 23 chapters. It attempts to present extensively the statistical materials which the research workers of genetics pure and applied need to understand those aspects of their field. The mathematical theory of genetics is combined with a description of the statistical techniques. The prerequisites for reading the book is, as the author says, essentially nil, while its contents include some modern topics. Several references, literatures for further reading and problems are listed at the end of almost all chapters. The first ten chapters are intended to present the basic concepts and tools in Mendelian genetics. Problems of segregation at individual loci are dealt with from several view-points in formal genetics. They begin with illustrating the elementary probability with examples mostly from genetics and then its uses to simple problems on random mating populations. Discussions are made in turn on selection problems, stochastic theory of genetic populations, inbreeding and its generation matrix, tests of genetic hypotheses, estimation of genetic parameters, the planning of experiments and others. The remaining chapters are devoted to the study of quantitative inheritance which contains many topics recently developed by several workers including the author himself. The contents of this part will be well explained by the titles of the chapters: analysis of variation, partition of variance, multiple regression, correlation, adjustment of data, path analysis, inheritance of quantitative characters in a random mating population, non-random mating di-

ploid populations with one locus segregating, correlations between relatives under inbreeding with one locus segregating, one-locus polyploid populations, diploid populations with arbitrary number of segregating loci and arbitrary epistacy, inbreeding with an arbitrary diploid population, populations derived from inbred lines, infinite-simal equilibrium theory of assortative mating, selection for quantitative characters.

Y. Komatu.

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:**

**Abraham, Jaromir:** An approximative method for nonlinear programming. Časopis Mat. 83, 425—435, russ. und engl. Zusammenfassg. 435—439 (1958) [Tschechisch].

In linear programming one has to find the extremum value of a linear form

$L(X) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$  on the set  $\mathfrak{M}$  of all non-negative solutions of a given system

$\sum_{j=1}^{m+k} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m; k > 0)$ . This problem has been solved e.g. by

G. B. Dantzig in "Activity Analysis of Production and Allocation", edited by T. C. Koopmans, Chap. XXI (this Zbl. 45, 98). The same problem is attempted here

for a strictly convex function  $f(X)$ . Let the given system  $\sum_{j=1}^{m+k} a_{ij} u_j = 0$  be homo-

geneous. Assuming further that  $f(X + tV) \rightarrow \infty$  as  $t \rightarrow \infty$  for every solution  $X$

and every solution  $V$  such that  $v_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m+k)$ ,  $\sum_{i=1}^{m+k} v_i > 0$ , it is

shown that  $f(X)$  has a finite minimum on the subspace of all solutions  $U$  of the homo-

geneous system. A point  $X$  is said to be minimal with respect to a vector  $V$  if for any real  $t$  such that  $X + tV$  is a positive solution, one has  $f(X + tV) \geq f(X)$ .

For an  $f(X)$  having partial derivatives of the first and second order it is shown that

$f(X_0) = \min_{X \in \mathfrak{M}} f(X)$  if and only if  $X_0$  is minimal with respect to all vectors of a

suitably chosen basis of  $\mathfrak{M}$ . Now a convergent iterative process is defined by means of which the point  $X_0$  can be determined. In particular the case is considered that  $f(X)$  is the sum of a linear and a positive definite quadratic form. The method is then applied to a numerical example.

H. Schwerdtfeger.

**Munkres, James:** Algorithms for the assignment and transportation problems. J. Soc. industr. appl. Math. 5, 32—38 (1957).

Die Abhandlung behandelt die beiden für die Praxis wichtigen Probleme der Arbeitsanweisung (Problem I) und des Transportes (Problem II). Das Problem I lautet: Gegeben sind  $n$  Personen  $M_i$  und  $n$  Arbeiten (jobs)  $J_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ );  $r_{ij}$  sei

die Geschwindigkeit, mit welcher die Person  $M_i$  die Arbeit  $J_j$  ausführt; gesucht ist die optimale Arbeitsanweisung:  $M_1 \rightarrow J_{j_1}, M_2 \rightarrow J_{j_2}, \dots, M_n \rightarrow J_{j_n}$ , derart,

daß  $r_{1j_1} + r_{2j_2} + \dots + r_{nj_n}$  ein Maximum wird. Da es  $n!$  mögliche Anweisungen

gibt, benötigt man in der Praxis dringend einen Algorithmus, der schrittweise zu der optimalen Anweisung hinführt. Ein solcher wurde von H. Kuhn [Naval Research Logistics Quarterly 2, 83—97 (1955)] angegeben. Verf. legt

einen neuen Algorithmus vor, welcher eine Variante des Kühnschen Algorithmus ist, von diesem aber in einem wichtigen Punkt abweicht. Um das

Problem I mathematisch zu fassen, wird folgendes verabredet:  $m$  Elemente einer

Matrix heißen unabhängig, wenn niemals zwei Elemente derselben Reihe angehören (Reihe d. h. Zeile oder Spalte). Dann lautet die Aufgabe: Gesucht  $n$  unab-

hängige Elemente der Matrix  $(r_{ij})$  derart, daß ihre Summe ein Maximum ist. Diese

Aufgabe formuliert und behandelt Verf. in der gleichwertigen Form: Sei  $r = \max_{i,j} r_{ij}$

und  $x_{ij} = r - r_{ij}$ ; gesucht sind  $n$  unabhängige Elemente der Matrix  $A = (x_{ij})$  derart, daß ihre Summe ein Minimum ist; dabei nimmt er zunächst an, daß die  $x_{ij}$

ganze Zahlen  $\geq 0$  sind. Bei der Lösung werden die beiden Tatsachen benutzt: (1) ein



Satz von König, der besagt: Ist  $A$  eine Matrix, und  $m$  die maximale Anzahl unabhängiger 0-Elemente, so existieren  $m$  Reihen (i. a. teils Zeilen und teils Spalten), welche sämtliche 0-Elemente von  $A$  enthalten; (2) die Lösung für das oben formulierte Problem für die Matrix  $(x_{ij})$  bleibt dieselbe, wenn die Matrix  $(x_{ij})$  durch die Matrix  $(y_{ij})$  ersetzt wird, wo  $y_{ij} = x_{ij} - u_i - v_j$  und  $u_i, v_j$  beliebige Konstanten sind. Der Kuhn'sche Algorithmus besteht nun in den folgenden vier Schritten.  $\alpha$ ) Ist  $s = \min x_{ij}$ , so ersetzt man  $A = (x_{ij})$  durch  $A_1 = (x_{ij}^{(1)})$ , wo  $x_{ij}^{(1)} = x_{ij} - s$  und  $A_1$  mindestens ein 0-Element enthält.  $\beta$ ) Man bestimmt einen minimalen Satz  $S_1$  von Reihen — ihre Anzahl sei  $n_1$  —, welche alle 0-Elemente von  $A_1$  enthalten. Falls  $n_1 = n$ , so besitzt  $A_1$   $n$  unabhängige 0-Elemente  $x_{1j_1}, \dots, x_{1j_n}^{(1)}$  und  $x_{1j_1}, \dots, x_{n j_n}$  liefern dann bereits die gewünschte Lösung.  $\gamma$ ) Falls  $n_1 < n$ , so sei  $h_1$  das kleinste Element von  $A_1$ , das keiner Reihe von  $S_1$  aus  $\beta$ ) angehört; es ist dann  $h_1 > 0$ . Alsdann addiert man  $h_1$  zu jedem Element jeder Reihe von  $S_1$  und subtrahiert anschließend von allen Elementen der Gesamtmatrix wieder  $h_1$ ; die neue Matrix heiße  $A_2$ .  $\delta$ ) Die Schritte  $\beta$ ) und  $\gamma$ ) werden wiederholt, wobei  $A_2$  an Stelle von  $A_1$  tritt. . . . Da bei jedem Schritt  $\gamma$ ) die Summe aller Matrixelemente um  $n(n - n_k)h_k$  abnimmt, endet der Prozeß nach endlich vielen Schritten. — Verf. ergänzt diesen Algorithmus dahingehend, daß er eine konstruktive Vorschrift für die Ausführung des Schrittes  $\beta$ ) gibt, genauer eine Vorschrift, um 1. einen Maximalsatz von Reihen, welche alle 0-Elemente enthalten, und 2. einen Maximalsatz von unabhängigen 0-Elementen schrittweise zu bekommen. Das geschieht in scharfsinniger Weise in drei Teilschritten, die hier nicht wiedergegeben werden können. Dabei zeigt sich nachträglich, daß die eingangs gemachte Voraussetzung, die  $x_{ij}$  sollen ganze Zahlen sein, fallen gelassen werden kann. Wie gut aber dieser neue Algorithmus arbeitet, geht eindringlich daraus hervor, daß man bei ihm höchstens  $\frac{1}{6}(11n^3 + 12n^2 + 31n)$  Operationen ausführen muß. Das Problem II kann anschaulich so gefaßt werden:  $N$  Schiffe liegen an den Stellen  $P_1, \dots, P_n$ ,  $r_i$  Schiffe mögen sich in  $P_i$  befinden. Die Schiffe sollen an neue Punkte  $Q_1, \dots, Q_m$  gebracht werden, derart, daß  $c_j$  Schiffe in  $Q_j$  liegen. Die Kosten, die man benötigt, um ein Schiff von  $P_i$  nach  $Q_j$  zu bringen, seien durch  $d_{ij}$  gegeben. Weiter sei  $x_{ij}$  die noch unbekannte Anzahl von Schiffen, welche von  $P_i$  nach  $Q_j$  gebracht werden sollen;  $x_{ij}$  heiße die zu  $d_{ij}$  gehörige Quote. Die Aufgabe lautet: Wie sind die Quoten  $x_{ij}$  zu wählen, damit die Gesamtkosten  $\sum_{i,j} x_{ij} d_{ij}$  möglichst klein werden? An der Matrix  $D = (d_{ij})$  bedeutet das: Bei gegebenen natürlichen Zahlen  $r_1, \dots, r_n$  und  $c_1, \dots, c_m$  mit  $\sum r_i = \sum c_j = N$  sind die ganzen Zahlen  $x_{ij} \geq 0$  so gesucht, daß  $\sum_{i,j} x_{ij} d_{ij}$  ein Minimum wird unter den Nebenbedingungen  $\sum_i x_{ij} = c_j, \sum_j x_{ij} = r_i$ . Diese Aufgabe löst Verf. durch einen dem obigen verwandten Algorithmus.

E. Mohr.

Parisot, Georges: Les programmes logarithmiques. Leur application au calcul des programmes linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 1470—1472 (1959).

L'introduction de termes supplémentaires logarithmiques dans la fonction à optimiser d'un problème d'optimum linéaire remplace le cheminement de sommet en sommet par un cheminement intérieur que l'on effectue par une méthode de gradient. On évite ainsi divers inconvénients de la méthode simpliciale. J. Kuntzmann.

Billeter, E. P.: Elektronische Rechenautomaten im Dienste der industriellen Unternehmensforschung. Unternehmensforsch. 2, 1—15 (1958).

Fasching, G.: Eine Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in der Marktforschung. Unternehmensforsch. 1, 173—177 (1957).

Wetzel, W.: Bemerkung zur Rationalisierung betriebswirtschaftlicher Entscheidungen mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitungsmaschinen. Unternehmensforsch. 1, 123—133 (1957).

**Billeter, E. P.:** Hauptprobleme der Unternehmensforschung. Unternehmensforsch. 1, 149—159 (1957).

**Pfanzagl, J.:** Statistische Qualitätskontrolle. Unternehmensforsch. 1, 69—77 (1957).

**Klingst, A.:** Optimale Lagerhaltung bei bekannter Verteilung des Bedarfes und unter der Voraussetzung, daß diese Verteilung einen Jahresgang aufweist. Unternehmensforsch. 2, 140—147 (1958).

**Klingst, A.:** Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfes. Unternehmensforsch. 1, 166—172 (1957).

**Klingst, A.:** Zur optimalen Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfes. Unternehmensforsch. 2, 16—19 (1958).

**Adam, A.:** Industrielle Systemforschung. Unternehmensforsch. 2, 105—117 (1958).

**Wetzel, W.:** Lineare Verteilungsmodelle in der Betriebswirtschaft — Beispiele für den praktischen Einsatz der Linearplanung in Unternehmen. Unternehmensforsch. 1, 46—60 (1957).

**Soom, E.:** Die Anwendung der Korrelationsrechnung im Arbeits- und Zeitstudienwesen. Unternehmensforsch. 1, 61—68 (1957).

**Ferschl, F.:** Entscheidungsproblem und Strategische Spiele. Unternehmensforsch. 2, 49—59 (1958).

**Meřuk, I. A.:** Über das maschinelle Übersetzen aus dem Ungarischen ins Russische. Probl. Kybernetik 1, 222—264 (1958) [Russisch].

Eine sehr ausführliche Darstellung des Übersetzungsprozesses: 1. Aufsuchen der Worte und Überbringen der Information ins Gedächtnis, 2. Bearbeitung der Worte, insbesondere Abgliederung der Suffixe, 3. Unterscheidung der Homonyme, 4. Zergliederung der Sätze; 5. Analysis (Regeln der Übersetzungen der verschiedenen Wortarten), 6. Synthese, 7. Redaktion der russischen Sätze. (Da Ref. die ungarische Sprache nicht beherrscht, kann er die Einzelheiten nicht würdigen.)

*H. Freudenthal.*

**Molořnaja, T. N.:** Fragen der Unterscheidung von Homonymen beim maschinellen Übersetzen aus dem Englischen ins Russische. Probl. Kybernetik 1, 215—221 (1958) [Russisch].

Beim Übersetzen aus dem Englischen spielt eine Hauptrolle die Unterscheidung von Homonymen zwischen verschiedenen Wortklassen (z. B. complete, Adj. und Verb.; result, Subst. und Verb.). Alle möglichen dieser Homonymien werden mittels systematischer Kontextkriterien eingengt.

*H. Freudenthal.*

**Kulagina, O. S.:** Über ein Verfahren zur Bestimmung der grammatischen Begriffe auf der Basis der Mengenlehre. Probl. Kybernetik 1, 203—214 (1958) [Russisch].

Verf. entwickelt mit einfachen Mitteln eine doch durchaus nicht triviale Sprachstruktur-Theorie.  $\mathcal{E}$  sei der Wortschatz,  $\theta$  die Menge formgerechter Sätze (d. h. gewisser geordneter Wortfolgen). Es werden Zerlegungen  $B$  von  $\mathcal{E}$  betrachtet (jedes  $x \in \mathcal{E}$  bestimmt eindeutig ein  $B(x)$  mit  $x \in B(x) \in B$ ). Eine spezielle Zerlegung ist die in „Umgebungen“,  $\Gamma$  genannt (man denke etwa an die Zusammenfassung der Flexionsformen jedes Hauptwortes in Klassen). Der Zerlegung von  $\mathcal{E}$  nach  $B$  entspricht eine Zerlegung von  $\theta$ : in jedem Satz aus  $\theta$  wird jedes Wort  $x$  durch alle möglichen  $x'$  mit  $B(x) = B(x')$  ersetzt. Ein Begriff der Äquivalenz wird eingeführt: Zwei Elemente von  $B$  heißen äquivalent, wenn sie jeden Kontext gleichzeitig formgerecht oder nicht formgerecht machen (z. B. „gut“ und „klein“). Die von diesem Äquivalenzbegriff aus  $B$  erzeugte Zerlegung von  $\mathcal{E}$  heißt  $B'$ . Es ist  $B'' = B'$ . Geht man von der trivialen Zerlegung  $B$  aus (jedes Wort bildet für sich ein Element von  $B$ ), so erhält man als  $B'$  die Zerlegung  $S$  von  $\mathcal{E}$  in „Familien“. Eine Sprache heißt einfach, wenn 1.  $\Gamma(x) \cap S(x) = \{x\}$  für alle  $x \in \mathcal{E}$ , 2. aus  $x' \in \Gamma(x)$  und  $y \in S(x)$  folgt  $S(x') \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$ . Obwohl natürliche Sprachen bei naheliegenden Festsetzun-

gen über  $I'$  meistens nicht einfach sein werden, ist der Begriff wohl recht brauchbar. (Bei den früheren Festsetzungen verletzt das Deutsche mindestens die zweite Forderung der Einfachheit, da z. B. „Knaben“ nicht durchgängig formgerecht durch „Mannes“ ersetzt werden kann.) „Klasse“ des Wortes  $x$  heißt die Menge der  $x'$  mit  $I'(x) \cap S(x') \neq 0$  oder  $I'(x') \cap S(x) \neq 0$ . In einfachen Sprachen bringen die Klassen eine Zerlegung  $K$  zustande.  $K'$  heißt die Zerlegung in Typen. Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der Äquivalenz von „Konfigurationen“ (z. B. „gut“ und „sehr gut“). Dieser wird noch nach „Rängen“ abgestuft. *H. Freudenthal.*

**Mittenecker, E.:** Zur Entwicklung exakter Modelle in der psychologischen Lerntheorie. *Unternehmensforsch.* 2, 85—96 (1958).

**Skellam, J. G.:** The mathematical foundations underlying the use of line transects in animal ecology. *Biometrics* 14, 385—400 (1958).

Verf. schildert eine Methode zur Taxierung einer Gesamtheit von Tieren, z. B. von Vögeln. Dabei muß ein mathematisches Modell aufgestellt werden. Obgleich der Ornithologe besonders günstige Verhältnisse vorfindet — die Lebensgewohnheiten der Vögel sind weitgehend studiert worden — treten bei der Zählung der Vögel große technische Schwierigkeiten auf, und große Fehler sind unvermeidlich. Bei den Vögeln rechnet man mit einer festen Verteilung der Niststätten. Bei der Probeflächenmethode wird eine Stichprobe genommen, d. h. innerhalb einer bestimmten Fläche werden die dort nistenden Vögel gezählt. Die Linientaxierungsmethode ist daraus entstanden, daß ein langes schmales Stück als Probefläche verwendet wird. Zufällige Veränderungen spielen dabei eine große Rolle. Z. B. können Vögel mitgezählt werden, die außerhalb des Streifens nisten. Yapp schlägt zur Behandlung des Problems Formeln aus der kinetischen Gastheorie vor. Die Bewegung vom Beobachter und von den beobachteten Tieren wird mit der Bewegung von zwei Sorten von Molekülen verglichen. Die Begegnung von Beobachter und Vogel wird als Analogon zum Zusammenstoß von zwei Molekülen betrachtet. Natürlich kann man nicht erwarten, daß die Geschwindigkeiten von Beobachter und beobachtetem Organismus der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung entsprechen, aber doch kann in vielen praktischen Fällen damit gearbeitet werden. Im vorliegenden Fall zeigt sich, daß die relative Geschwindigkeit eine gleichartige Wahrscheinlichkeitsverteilung wie die Komponenten hat. Verf. gibt die Ergebnisse von Beobachtungen an und berechnet das Verhältnis vom beobachteten Wert der Varianz zur mittleren Anzahl von Begegnungen. Bei etwas unregelmäßigen Wegen des Beobachters überschreitet dieses Verhältnis den Wert 1. — 13 Literaturstellen, 2 Tabellen, 2 Abbildungen.

*G. Reißig.*

**Tedeschi, Bruno:** La risoluzione delle equazioni trinomie e la determinazione del tasso di interesse delle annualità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 20, 51—89 (1958).

L'A. si occupa della determinazione del tasso d'interesse usando il metodo delle funzioni trigonometriche per la risoluzione delle equazioni trinomie. Nel primo capitolo tratta del procedimento, introdotto dal Cantelli, che è fondato sull'uso dei logaritmi comuni, approfondendo le indagini già da altri fatte; mentre nel secondo si occupa dell'analogo procedimento basato sull'uso dei logaritmi d'addizione e sottrazione (che secondo Gauss conducono ad una „doppia esattezza“). L'analisi svolta porta l'A. alle seguenti conclusioni: 1. quando si usino tavole logaritmiche a sette decimali, i risultati del problema finanziario considerato possono ritenersi soddisfacenti per i comuni usi pratici, tanto se ottenuti col procedimento preferito da Gauss (logaritmi di addizione e sottrazione) quanto se calcolati col procedimento preferito dal Cantelli. 2. Non essendo generalmente sufficiente, per il problema finanziario l'uso delle tavole logaritmiche a cinque decimali e non essendo facile procurarsi le tavole dei logaritmi di addizione e sottrazione a sette decimali, torna più conveniente il procedimento che implica il solo uso dei comuni logaritmi a sette decimali. Perciò l'A. conclude che fra i due procedimenti è preferibile il primo. *T. Salvemini.*



## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

**Dubikajtis, L.:** On the incidence axioms of various geometries. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 423—427, russ. Zusammenfassg. XXXV (1958).

Verf. betrachtet recht schwache, von drei ganzzahligen Parametern  $p, q, m$  (mit  $0 \leq p, q$  und  $p + q < m$ ) abhängige Inzidenzaxiome, denen neben der  $n$ -dimensionalen projektiven und affinen Geometrie auch die  $n$ -dimensionalen Geometrien von Möbius, Laguerre und Lie genügen. Den Ausgangspunkt bilden zwei Mengen  $X, Y$  und eine Inzidenzrelation  $\sim$ , die zwischen den Elementen aus  $X$  und  $Y$  erklärt ist. Wie üblich wird erklärt, wann  $k$  Elemente aus  $X$  bzw.  $Y$  unabhängig sind. Zwischen den aus unabhängigen Elementen bestehenden endlichen Teilmengen  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X$  und  $\{y_1, \dots, y_h\} \subset Y$  wird eine weitere Relation  $s$  definiert ( $\{x_1, \dots, x_k\} s \{y_1, \dots, y_h\}$  bedeutet  $x_i \sim y_j$  für  $i = 1, \dots, k$ ;  $j = 1, \dots, h$ ), die drei von den Parametern  $p, q, m$  abhängigen Axiomen zu genügen hat. Dann wird ein verallgemeinerter Simplexbegriff eingeführt, für die Simplexe eine Äquivalenzrelation erklärt und zwischen den Äquivalenzklassen eine Halbordnung (teilweise Ordnung) definiert. Es wird gezeigt, daß die Äquivalenzklassen bezüglich der Halbordnung einen Verband bilden, für den der Dimensionssatz gilt. Für die  $n$ -dimensionale projektive oder affine Geometrie stimmt dieser Verband mit dem Verband der linearen Teilräume überein. Indem man für die Parameter  $p, q, m$  andere als die den bekannten Geometrien entsprechenden Werte einsetzt, kann man auch neue Geometrien erhalten.

H. Karzel.

**Jankowski, A.:** The system of axioms of the Möbius geometry. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 489—494, russ. Zusammenfassg. XXXIX (1958).

L. Dubikajtis (s. vorstehendes Referat) hat ein allgemeines Axiomensystem angegeben, dem verschiedene Geometrien genügen, u. a. die Möbius-Geometrie. Verf. ergänzt dieses Axiomensystem durch eine Reihe weiterer Axiome und zeigt, daß hierdurch genau die Möbius-Geometrien gekennzeichnet sind.

H. Karzel.

**Permutti, Rodolfo:** Spazi affini generalizzati e relative proprietà reticolari. Convegno internaz. Reticoli Geom. proiettive, Palermo-Messina 1957, 120—121 (1958).

Vortragsauszug, in dem ohne Beweis mitgeteilt wird, daß sich genau jeder oberhalbmodulare, relativ komplementäre Verband der Länge 3 als Verband der Unterräume einer verallgemeinerten affinen Ebene auffassen läßt. Dabei entsteht ein verallgemeinerter affiner Raum der Dimension  $n$  aus einem  $n$ -dimensionalen projektiven Raum durch Wegnahme einer beliebigen Menge von Unterräumen und allen ihren Teilräumen, wobei nur wenigstens  $n + 1$  Punkte in allgemeiner Lage übrig bleiben müssen. Offene Fragen: Läßt sich jede endliche verallgemeinerte affine Ebene in eine endliche projektive Ebene einbetten? Gelten entsprechende Aussagen in höheren Dimensionen?

H. Salzmann.

**Fryer, K. D. and Israel Halperin:** On the construction of coordinates for non-desarguesian complemented modular lattices. I, II. Nederl. Akad. Wet., Ser. A 61, 142—150, 151—161 (1958).

Nach v. Neumann kann man einen komplementären modularen Verband mit einem normierten Rahmen der Länge  $n \geq 4$  durch einen assoziativen regulären Ring darstellen. Hier wird nun im Fall  $n = 3$  unter einschränkenden Bedingungen für den normierten Rahmen gezeigt, daß der Verband einen alternativen regulären Ring liefert; das ist ein Ring, in dem das Assoziativgesetz  $(x y) z = x (y z)$  nur in

dem Fall gefordert ist, daß mindestens eines der Elemente  $x, y, z, xy, yz$  idempotent ist, und in dem zu jedem Element  $x$  ein Idempotent  $e$  und ein Element  $y$  mit  $xe = x$ ,  $ey = y$ ,  $yx = e$  vorhanden sind sowie für jedes solche  $y$  auch  $xy$  idempotent ist. Falls der normierte Rahmen aus Atomen besteht (also eine projektive Ebene vorliegt), folgen die einschränkenden Voraussetzungen über den Rahmen sämtlich aus dem kleinen Viereckschnittsatz (hier  $Q_5$  genannt); da dieser mit dem kleinen Desarguesschen Satz gleichwertig ist, erhält man als Sonderfall den Koordinatenalternativkörper einer Moufang-Ebene. Zum Schluß wird noch eine einfache Herleitung von  $Q_5$  aus dem Satz vom vollständigen Viereck ( $Q_4$ ) gegeben (unter Voraussetzung nichtkollinearer Diagonalepunkte). *G. Pickert.*

**Zarovnyj (Zarovny), V. P.:** Eine Interpretation der ebenen Axiome der affinen Geometrie in einer gewissen abstrakten Gruppe. Ukrain. mat. Žurn. 10, 351—364, engl. Zusammenfassg. 364 (1958) [Russisch].

In dieser übertrieben ausführlich geschriebenen Note übersetzt Verf. die Hilbertschen Axiome für eine affine angeordnete desarguessche Ebene in die Sprache einer Gruppenkongruenz [s. G. Pickert, Projektive Ebenen (1955; dies. Zbl. 66, 387)], d. h. Zerlegung einer Gruppe in ein System paarweise fremder eigentlicher Normalteiler, die zu je zweien die Gruppe aufspannen, wobei die Gruppenelemente als Punkte und die Nebenklassen nach den Normalteilern der Kongruenz als Geraden gedeutet werden. Es fehlt jeder Hinweis auf frühere Veröffentlichungen (z. B. J. André, dies. Zbl. 56, 385). Verf. bemerkt auch nicht, daß aus der Existenz einer Kongruenz die Kommutativität der Gruppe folgt, was seine Rechnungen unnütz erschwert.

*H. Salzmann.*

**Dubikajtis, L.:** On the order of points and hyperplanes in  $n$ -dimensional projective geometry. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 607—610, russ. Zusammenfassg. XLIX (1958).

In einer eindimensionalen projektiven Geometrie ist die Anordnung durch eine Trennbeziehung zwischen den Punktepaaaren, also durch eine Relation, die von vier Argumenten abhängt, gegeben. Verf. befaßt sich mit der Frage, ob man in einer  $n$ -dimensionalen projektiven Geometrie die Anordnung durch eine Relation, die von  $n + 3$  Argumenten (Punkten in allgemeiner Lage) abhängt, beschreiben kann. Eine derartige Relation definiert er mit Hilfe der gewöhnlichen Anordnung des  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes und zeigt, daß diese Relation dann analoge Eigenschaften besitzt wie die Anordnung der projektiven Geraden. Abschließend stellt Verf. das Problem, welchen axiomatischen Forderungen diese Relation zu genügen hat, damit man umgekehrt die klassischen Anordnungsaxiome herleiten kann.

*H. Karzel.*

**Kustaanheimo, Paul:** On the relation of order in finite geometries. (Abstract.) 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 139—140 (1958).

**Zappa, Guido:** Il punto di vista gruppale nello studio dei piani grafici finiti. Convegno internaz. Reticoli Geom. proiettive, Palermo-Messina 1957, 62—71 (1958).

Verf. berichtet über endliche projektive Ebenen mit einer auf einer geeigneten Menge von Punkten und Geraden scharf einfach transitiven Kollineationsgruppe, insbesondere zyklische projektive und affine Ebenen und die von D. R. Hughes (dies. Zbl. 72, 381) untersuchten Verallgemeinerungen, sowie Translationsebenen. Er hebt dabei hervor, wie sich Fragen nach Existenz und Struktur solcher Ebenen als Fragen nach Existenz und Struktur gewisser Gruppen ausdrücken lassen. Mehrfach transitive Ebenen werden streifend erwähnt. Das ausführliche Literaturverzeichnis enthält 26 Arbeiten.

*H. Salzmann.*

**See, Michele:** Sulla completezza degli archi nei piani proiettivi finiti. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 43—51 (1958).

Verf. stellt notwendige Bedingungen dafür auf, daß ein  $k$ -Bogen [eine Menge von  $k$  Punkten, von denen keine 3 kollinear sind] in einer endlichen projektiven

Ebene der Ordnung  $q$  ( $\geq k-1$ ) vollständig ist, d. h. in keinem  $(k+1)$ -Bogen enthalten ist. Als Index des  $k$ -Bogens  $C$  bezeichnet er die kleinste positive Zahl  $h$ , so daß durch jeden Punkt der Ebene entweder keine oder mindestens  $h$  Sekanten von  $C$  [Geraden, die mit  $C$  genau 2 Punkte gemeinsam haben] hindurchgehen. Ist  $C$  vollständig, so gehen sogar durch jeden Punkt mindestens  $h$  Sekanten. Ein  $k$ -Bogen kann nur dann vollständig sein, wenn  $2d = (k-1)(k-2) - 2hq \geq 0$  ist; für  $2(h^2 - h + 1) < k \equiv 0 \pmod{2}$  und  $h > 1$  muß  $d \neq 0$  sein, für  $6 < k \equiv 0 \pmod{2}$  und  $h = 1$  oder  $2h(h+1) < k \equiv 0 \pmod{2}$  und  $h > 1$  muß  $d \neq 1$  sein, für  $k \equiv 1 \pmod{2}$  muß  $2d \leq (\sqrt{3}-1)k - (1+\sqrt{3^{-1}})h + (2\sqrt{3^{-1}}-1)$  sein, für  $\lambda = q-k$ ,  $(\lambda+3)(\lambda^2+\lambda+1) < k \equiv 1 \pmod{2}$  muß  $2d \neq (\lambda+1)(\lambda+2)$  sein, für  $2(h+1) + \sqrt{2}h+1 > k \equiv 1 \pmod{2}$  muß  $2d \neq k-2h-1$  sein.

H. Salzmann.

**Neculcea, M.:** Extension de l'axiome de congruence des triangles dans le plan. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 4, 693—697, russ. und französ. Zusammenfassg. 698—699 (1952) [Rumänisch].

Das Problem, Eigenschaften einer gewissen Unterfamilie geometrischer Objekte auf die ganze Familie geometrischer Objekte auszudehnen, ist zuerst von Legendre gelöst worden, der bewiesen hat: Wenn man zuläßt, daß die Winkelsumme eines bestimmten Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln ist, so gilt dasselbe für jedes beliebige Dreieck. Der Gegenstand vorliegender Mitteilung ist, zu beweisen, daß eine solche Ausdehnung auch für das Axiom III<sub>5</sub> der Kongruenz (nach der Hilbertschen Bezeichnung) möglich ist. Man ersetze das Axiom III<sub>5</sub> durch das „reduzierte“ Axiom III<sub>5</sub>, in dem  $ABC$  ein besonderes, ein für alle Male gewähltes Dreieck sei. Wenn dann für das von  $ABC$  verschiedene Dreieckspaar  $abc$  und  $a'b'c'$  die Kongruenzen  $ab \equiv a'b'$ ,  $ac \equiv a'c'$  und  $\sphericalangle bac \equiv \sphericalangle b'a'c'$  bestehen, so folgen daraus die Kongruenzen  $\sphericalangle abc \equiv \sphericalangle a'b'c'$  und  $\sphericalangle acb \equiv \sphericalangle a'c'b'$ . M. Zacharias.

**Hofmann, Ludwig:** Über ein bei den Cliffordschen Flächen bestehendes Analogon des Satzes von Dandelin. Monatsh. Math. 62, 1—15 (1958).

Sei  $\mathcal{P}$  eine Drehfläche 2. Ordnung im Sinne einer Cayley-Kleinschen Metrik. Für den Schnitt  $l$  von  $\mathcal{P}$  mit einer allgemeinen Ebene  $\varepsilon$  gilt dann das nichteuklidische Analogon des Satzes von Dandelin, wonach jene beiden Brennpunkte von  $l$ , die der die Rotationsachse treffenden Hauptachse angehören, die Berührungspunkte zweier  $\mathcal{P}$  eingeschriebenen Kugeln mit  $\varepsilon$  sind. Eine Cliffordsche Fläche  $\mathcal{P}$  — die Abstandsfläche einer Geraden — läßt sich nun in doppelter Weise als Drehquadrak auffassen, so daß sich bei deren ebenen Schnitten vier der sechs Brennpunkte mittels Dandelinscher Kugeln ermitteln lassen. Dieser Sachverhalt wird erörtert und an zwei speziellen Beispielen verifiziert.

W. Wunderlich.

## Elementargeometrie:

• Smogorževskij, A. S.: Das Lineal in den geometrischen Konstruktionen. [Linejka v geometričeskich postroenijach.] (Populäre Vorträge über Mathematik). Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1957. 64 S. R. 0,95 [Russisch].

In this little book constructions by ruler are described. The exposition uses at a most part synthetic methods and it is accessible to students of higher classes of secondary school. In the first part there are given the foundations of projective geometry (harmonic section, conics, theorems of Brianchon and Pascal). The second part is devoted to the constructions (by ruler, by ruler with given two parallel lines, by ruler with given parallelogram, by ruler with given circle, when its centre is known). It is proved, that it is impossible to find only by means of ruler the centres of two nonconcentric circles, which do not intersect. The possibility of finding the centers of given circles is studied in details in §§ 19—20.

M. Sekanina.



**Hofmann, L.:** Über eine elementar-geometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt. *Elemente Math.* **13**, 49—55, 79—85 (1958).

Verf. behandelt die Aufgabe, durch zwei Systeme von je fünf Punkten  $P_i, P'_i$  der reellen Ebene ein Paar kongruenter Strahlenbüschel so zu bestimmen, daß jedes Punktepaar  $P_i, P'_i$  auf entsprechenden Strahlen liegt. Es existieren im allgemeinen drei Lösungen, davon ist notwendig eine reell. Teil 2 bringt ein Zahlenbeispiel mit konstruktiv-geometrischer Auswertung. H. Germer.

**Goormaghtigh, R.:** Sur les droites de Simson. *Mathesis* **68**, 64—67 (1959).

**Leuenberger, F.:** Einige Dreiecksungleichungen. *Elemente Math.* **13**, 121—126 (1958).

Es sei ein Dreieck mit den Seiten  $a_1, a_2, a_3$  gegeben, welches den Umkreisradius  $r$  und den Inkreisradius  $\varrho$  hat. Als Hauptresultat werden in der vorliegenden Arbeit folgende drei Ungleichungen bewiesen:

$$9\varrho \leq S_h \leq \frac{9}{2}r, \quad 9\varrho \leq S_m \leq \frac{9}{2}r, \quad 9\varrho \leq S_w \leq \frac{9}{2}r,$$

wo  $S_h$  die Höhensumme,  $S_m$  die Summe der Mittellinien und  $S_w$  die Summe der Winkelhalbierenden des gegebenen Dreiecks bedeutet. Gleichheit kann dann und nur dann bestehen, wenn das Dreieck regulär ist. Mit derselben Gleichheitsbedingung werden noch folgende Ungleichungen angeführt:

$$\frac{9\varrho}{2F} \leq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} \leq \frac{9r}{4F}, \quad 36\varrho^2 \leq \sum_{i,j} a_i a_j \leq 9r^2, \quad \frac{1}{r^2} \leq \sum_{i,j} \frac{1}{a_i a_j} \leq \frac{1}{4\varrho^2},$$

( $F$  ist der Inhalt des Dreiecks), von denen die ersten zwei sehr leicht mit Hilfe der obigen bewiesen werden können. L. Kosmák.

**Florian, A.:** Zu einem Satz von P. Erdős. *Elemente Math.* **13**, 55—58 (1958).

Man bezeichne mit  $R_i$ , bzw.  $r_i$  die Abstände der Ecken bzw. Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen inneren Punkte  $O$  des Dreiecks ( $i = 1, 2, 3$ ) und es sei

$$M_k = [(R_1^k + R_2^k + R_3^k)/(r_1^k + r_2^k + r_3^k)]^{1/k}.$$

Es wird gezeigt, daß  $M_k \geq 2$  für  $|k| \leq 1$  und  $M_k > 2^{1/|k|}$  für  $|k| > 1$  ist; Gleichheit gilt nur für ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkt  $O$  (damit ist ein Satz von P. Erdős verallgemeinert, welcher dem Werte  $k = 1$  entspricht). Verf. gibt zwei Beweise dieses Satzes; durch Anwenden der Methode des zweiten Beweises wird die allgemeinere Ungleichung für ein konvexes  $n$ -Eck:

$$R_1 + \dots + R_n \geq \frac{1}{\cos \pi/n} (r_1 + \dots + r_n)$$

(eine Vermutung von L. Fejes Tóth) für  $n = 4$  verifiziert. L. Kosmák.

## Algebraische Geometrie:

**Godeaux, Lucien:** Les recherches de géométrie dans ces dernières années en Belgique. *Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut* **73**, 55—67 (1959).

**Gemignani, Giuseppe:** Sulle trasformazioni cremoniane che appartengono ad una reciprocità non degenera. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* **12**, 479—488 (1958).

Eine Cremona-Transformation  $\tau$  und eine nichtsinguläre Korrelation  $\omega$  zwischen zwei Räumen  $S_r(x_0, x_1, \dots, x_r)$  und  $S'_r(y_0, y_1, \dots, y_r)$  ( $r \geq 2$ ) mögen die Eigenschaft besitzen, daß die Bilder  $\tau P$  und  $\omega P$  des allgemeinen Punktes  $P$  von  $S_r$  in  $S'_r$  inzidieren. Verf. zeigt, daß die einzigen Cremona-Transformationen dieser Art durch  $r$  linear unabhängige Korrelationen erzeugt werden und auf der Segreschen Mannigfaltigkeit der beiden Räume durch einen linearen Raum der Dimension  $r(r+1)$  ausgeschnitten werden. Für  $r = 2$  sind die Transformationen quadratisch. Bei entarteten Korrelationen erhält man im Fall  $r = 2$  Transformationen von de Jonquières.

W. Engel.

**Mallol, Rafael:** Über das Verhalten einer algebraischen Mannigfaltigkeit bei Erweiterungen des Grundkörpers. Collect. Math. 10, 125—136 (1958) [Spanisch].

Etant donnée une variété algébrique  $V$ , irréductible sur un corps  $\Delta$ , et une extension  $\Sigma$  de  $\Delta$ , la décomposition de  $V$  en variétés irréductibles sur  $\Sigma$  dépend uniquement de l'intersection  $\Sigma \cap \Delta_s$  ( $\Delta_s$  fermeture algébrique séparable de  $\Delta$ ). Pour que  $V$  soit absolument irréductible il faut et il suffit que l'intersection  $K = \Delta(\xi)$  ( $\xi$  point générique de  $V$  sur  $\Delta$ ) avec  $\Delta_s$  coïncide avec  $\Delta$ . Bien que ce soient des résultats connus [voir P. Samuel, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique (1955; ce Zbl. 67, 389) et S. Lang, Introduction to Algebraic Geometry (New York 1958)], l'exposition donnée ici par l'A. qui semble ne pas avoir eu connaissance des résultats précédents, conserve son intérêt. D'une part, parce que les outils algébriques sont bien choisis et les démonstrations toujours ingénieuses et, d'autre part, parce qu'on dispose ainsi d'un traitement autonome, clair et bref de ces questions fondamentales pour la géométrie algébrique.

G. Ancochea.

**Marchionna, Ermanno:** Varietà intersezioni complete e varietà di diramazione. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85 (III. Ser. 16), 82—102 (1952).

L'A. démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété à  $r - 2$  dimensions, privée de points multiples, d'ordre  $m, n$ , dans  $S_r$ , soit l'intersection complète de deux hypersurfaces d'ordres  $m, n$ , est que sa projection d'un point générique sur un hyperplan ait une variété double d'ordre  $\frac{1}{2} m n (m - 1) (n - 1)$  située sur une forme d'ordre  $(m - 1) (n - 1)$  de l'hyperplan. Cette condition peut être remplacée par celle-ci: les hypersurfaces d'ordre  $m + n - r - 1$  coupent la variété suivant des variétés de son système canonique. Il passe ensuite aux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété à  $r - d$  dimensions, privée de variétés multiples, soit l'intersection complète de  $d$  hypersurfaces. Il faut que sa section par un hyperplan générique soit l'intersection complète de formes de cet hyperplan, théorème équivalent à un théorème de Jongmans (ce Zbl. 36, 377). Ce théorème est d'abord établi pour  $r - d > 1$ , puis dans le cas  $r - d = 1$  mais lorsque le genre de la variété, actuellement une courbe, satisfait à une certaine condition. Extension aux variétés possédant un point double et application à la détermination des variétés de diramation des espaces multiples.

L. Godeaux.

**Marchionna, Ermanno:** Curve e varietà di diramazione per superficie ed iper-superficie multiple generali. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85 (III. Ser. 16), 474—483 (1952).

L'A. démontre que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe irréductible  $C$ , appartenant à une surface  $F$  d'ordre  $m$  de  $S_3$ , soit la courbe de diramation d'une surface multiple d'ordre  $\mu > 2$  ayant  $F$  comme support, sont: L'ordre de  $C$  est  $n = m\mu(\mu - 1)$ ; son genre  $p$  est donné par  $2p = n[m + \mu + (\mu - 1) - 5] + 1$ ;  $C$  possède  $m\mu(\mu - 1)(\mu - 2)$  points de rebroussement;  $C$  contient un groupe  $R_0$  de  $n$  points équivalent à un groupe section plane,  $R_0$  étant l'intersection de trois surfaces d'ordres  $m, \mu, \mu - 1$ ; la série déterminée par  $R_0$  et par un groupe section plane de  $C$  n'a pas comme couple neutre quelque point double de  $C$ . Extension aux variétés algébriques.

L. Godeaux.

**Gaeta, Federico:** Sul calcolo effettivo della forma associata  $F(W_{\alpha+\beta-n}^{g_l})$  all'intersezione di due cicli effettivi puri  $U_{\alpha}^g, V_{\beta}^l$  di  $S_n$ , in funzione delle  $F(U_{\alpha}^g), F(V_{\beta}^l)$  relative ai cicli secanti. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 269—276 (1958).

L'A., preseguedo con eguale atteggiamento e con analoghi mezzi una ricerca precedente (questo Zbl. 79, 372), affronta il problema indicato nel titolo. La soluzione completa è rinviata ad una Nota II; qui si mostra come sempre ci si possa ricondurre al caso  $l = 1$ . Si utilizza perciò una fruttuosa idea di A. Weil, già però prima occorsa

a B. Segre. Così lo studio della intersezione di  $U, V$  viene ricondotto a quello del prodotto  $U \times V$  costruito sul prodotto di due coppie dell'ambiente affine con la „varietà diagonale“ o „identità“.

V. E. Galafassi.

Orgeval, Bernard d': Sur une inégalité de Commessatti. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 1/2, 11—14, russ. Zusammenfassg. 14 (1957).

Verf. beweist geometrisch die Ungleichung von Commessatti, welche die zwei Charaktere  $q_3$  (Differenz  $P_g - P_a$ ) und  $q_2$  (dieselbe Differenz für kanonische Flächen) einer dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit verbindet, wenn die betreffende Mannigfaltigkeit entweder ein Bündel von Flächen oder eine Kongruenz von Kurven besitzt. Die Ungleichung heißt  $q_3 \leq q_2 - 4$  und wurde bis jetzt nur transzendent bewiesen. Man erweitert zuerst die auf Flächen gültige Ungleichung von Castelnuovo für die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten in der Form  $P_g \geq \left(\frac{q_2}{3}\right)$

und allgemein für jede Dimension  $d$ :  $P_g \geq \left(\frac{q}{d}\right)$ . Aus dieser Formel folgt dann für  $d = 3$  die Ungleichung von Commessatti. Für  $d > 3$  stößt die Methode auf große Schwierigkeiten und die Erweiterung der Ungleichung von Commessatti für mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten bleibt also noch offen.

J. Metelka.

Orgeval, B. d': A propos des surfaces algébriques se touchant le long d'une courbe et du nombre maximum de leurs points doubles. Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A 2, 247—250 (1957).

The author gives a formula for the number of singularities of an algebraic surface  $F$  lying on a curve along which  $F$  touches another algebraic surface, thereby generalizing a result of L. Godeaux (this Zbl. 56, 395). By means of this formula the author deduces that, if an asymptotic expression valid for very large  $n$  exists for the maximum\* number of double points of an algebraic surface of order  $n$ , then the leading term in such an expression is  $\frac{2}{3}n^3$ .

E. Stein.

Godeaux, Lucien: Sur le contact de deux surfaces algébriques le long d'une courbe. Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A 4, 103—106 (1958).

The author states the formula, also given by B. d'Orgeval (see the previous review), for the number of double points of an algebraic surface  $F$  lying on a non-singular curve  $C$  along which  $F$  touches another algebraic surface  $F'$ , thereby generalizing an earlier result due to the author (this Zbl. 56, 395). In preparation for a future generalization of the present result to the case when  $F$  and  $F'$  have contact of a higher order along  $C$ , the author discusses the resolution, by means of a quadratic transformation, of singularities of  $F$  lying on  $C$  in this case.

E. Stein.

Godeaux, Lucien: Note sur une surface dont le système canonique a des composantes fixes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 304—311 (1958).

Sur la surface d'équations:

$$a_1 x_1^{3n+1} x_2 + a_2 x_2^{3n+1} x_3 + a_3 x_3^{3n+1} x_4 + a_4 x_4^{3n+1} x_1 + a_5 x_1 x_2 x_3 x_4^{3n-1} + \dots + a_{n+4} (x_1 x_2 x_3)^n x_4^2 = 0$$

l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : e x_2 : e^{9n^2+1} x_3 : e^{6n^2+n+1} x_4 \quad (e^p = 1)$$

détermine une involution d'ordre  $p = 9n^2 + 3n + 1$  supposé premier. L'image de cette involution est une surface  $F'$  dont le système canonique contient trois composantes fixes rationnelles de degré virtuel  $-3$ , trois composantes rationnelles fixes de degré virtuel  $-(n+1)$  et une courbe rationnelle de degré virtuel  $-1$ ; cette dernière n'appartient pas au système bicanonique. Etude détaillée des systèmes canonique et pluri-canoniques; le système  $p$ -canonique ne contient plus les compo-



santes fixes. La courbe de degré  $-1$  est exceptionnelle. L'A. construit un modèle projectif de la surface  $F'$  sans courbes exceptionnelles, un point correspondant sur ce modèle à la composante de degré  $-1$ . B. d'Orgeval.

**Godeaux, Lucien:** Sur certaines surfaces algébriques contenant des involutions cycliques n'admettant que des points unis de première espèce. Arch. der Math. 9, Festschrift Hellmuth Kneser, 155—160 (1958).

Soit dans  $S^4$  la surface d'équations:

$$f_1(x_0, x_1) + g_1(x_2, x_3, x_4) = 0; \quad f_2(x_0, x_1) + g_2(x_2, x_3, x_4) = 0,$$

les  $f$  étant des formes binaires sans racine commune, les  $g$  des formes ternaires de degré  $p$  premier  $\neq 2$ . La surface  $F$  est transformée en elle-même par l'homographie

$$H: x'_0: x'_1: x'_2: x'_3: x'_4 = x_0: x_1: e x_2: e x_3: e x_4 \quad (e^p = 1).$$

L'involution  $I$  engendrée par  $H$  sur  $F$  possède  $p^2$  points unis, tous de première espèce; son image est une surface  $F'$  sur laquelle aux points unis correspondent des points multiples d'ordre  $p$  à cône tangent rationnel. Le système complet canonique de  $F$  étant découpé par les hypersurfaces d'ordre  $2p-5$ , d'où  $p^{(1)} = p^2(2p-5)^2 + 1$ , celui de  $F'$  donnera pour genre linéaire  $p(p-3)(3p-7)+1$ ; on aura de même  $p_a = p_g = \frac{1}{12}p^2(7p^2 - 30p + 35) - 1$  et  $p'_a = p'_g = p(p^2 - 4p + 5) - 1$ . L'A. construit un modèle canonique de cette surface  $F'$  dont les sections hyperplanes constituent le système canonique complet. L'exposé de cette construction assez complexe est facilité par l'étude complète du cas particulier  $p=5$ . B. d'Orgeval.

**Lavis, A.:** Sur des involutions cycliques appartenant à certaines surfaces algébriques. I, II. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 708—722, 767—779 (1958).

Im linearen Raum  $S_{r+4}$  wird durch eine zyklische Projektivität auf der speziellen Fläche  $F$ , welche invariant bleibt, eine Involution der Ordnung  $p = 2r + 1$  induziert. Diese Involution hat  $2^r r! (2r + 1)^2$  invariante Punkte. Als Abbildung der Involution ergibt sich eine Fläche  $F'$  von der Ordnung  $2^r r! (2r + 1)$  im linearen Raum  $S_{r+2}$ . Den invarianten Punkten der Involution entsprechen auf der Fläche  $F'$  biplanare Doppelpunkte, welche spezielle Singularitäten zeigen. Der größte Teil des Artikels ist der Untersuchung dieser Singularitäten gewidmet, wozu auch quadratische Cremonasche Transformationen benutzt werden. Es zeigt sich z. B., daß man jeden dieser Doppelpunkte als eine Folge von  $r$  unendlich benachbarten biplanaren Doppelpunkten ansehen kann. Endlich bildet man die Durchschnittskurven von  $F$  mit gewissen Systemen von Hyperflächen in  $S_{r+4}$  und studiert den Durchgang der entsprechenden Kurven auf  $F'$  durch die Doppelpunkte. Leider finden sich im Artikel sehr viele Druckfehler, die zum Teil sogar zu Mißverständnissen führen können. In der zweiten Note ist die Fläche  $F$  im Raume  $S_{r+4}$  so gewählt, daß die Fläche  $F'$ , das Bild der Involution im  $S_{r+2}$ , insgesamt  $p!/r!$  ( $p = 2r + 1$ ) singuläre Punkte hat von der Multiplizität  $r + 1$ . Der tangentielle Kegel in jedem von diesen singulären Punkten zerfällt in einen rationalen Kegel der Ordnung  $r$  und eine Ebene, die den Kegel nur in einer einfachen Geraden schneidet. Auch diesmal studiert man in diesen Punkten die Durchgangsverhältnisse der Kurven auf  $F'$ , welche den Kurven auf  $F$  entsprechen, die mit gewissen Systemen von Hyperflächen geschnitten werden.

J. Metelka.

**Godeaux, Lucien:** Remarque sur la surface du quatrième ordre possédant un point double inflexionnel. Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A 2, 241—245 (1957).

The author shows that the quartic surface which has an inflexional double point as its only singularity can be considered as the image of an involution of order 2 on a surface  $F$  in  $S_4$  having genera  $p_a = P_4 = 1$ . He determines three homographies leaving  $F$  invariant which are commutative in pairs, and he constructs a surface of order 16 and section genus in  $S_9$  which is a projective model of  $F$ . E. Stein.

**Mersch, Jacques:** Sur la surface du quatrième ordre contenant une quintique rationnelle tracée sur une quadrique. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 839—850 (1958).

Si l'on considère sur une quadrique une quintique rationnelle tétrasécante d'un des systèmes de génératrices, par cette quintique passent des surfaces  $F$  du 4<sup>e</sup> ordre coupant ultérieurement la quadrique selon trois tétrasécantes  $d_1, d_2, d_3$ . Les droites s'appuyant à deux de ces tétrasécantes définissent sur  $F$  une involution; il existe trois de ces involutions  $V_{12}, V_{13}, V_{23}$ ;  $V_{12}$  par exemple, fait correspondre à une section plane de  $F$  une courbe d'ordre 14 unisécante de la quintique, pentasécante de  $d_3$ , 11-sécante de  $d_1$  et  $d_2$ ; détermination des homologues de la quintique et des tétrasécantes. Les droites s'appuyant à la quintique et à une tétrasécante définissent trois autres involutions  $T_1, T_2, T_3$ ; détermination des homologues des sections planes, de la quintique et des tétrasécantes. Les produits des  $T$  ou des  $V$  ne sont pas permutable. B. d'Orgeval.

**Godeaux, Lucien:** Asymptotiques de la surface cubique possédant quatre points doubles. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 413—417 (1957).

La surface cubique  $F$  possédant quatre points doubles forcément coniques se représente sur le plan par les cubiques circonscrites à un quadrilatère complet. Les asymptotiques de la surface se représentent par les coniques inscrites au quadrilatère. Etude menée en considérant la surface  $F$  comme image de l'involution plane:  $xx' = 1, yy' = 1$  dont l'A. donne plusieurs représentations. B. d'Orgeval.

### Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

**Lehti, Raimo:** Tensorrechnung und projektive Geometrie. I: Grundlagen der Multivektoralgebra und Inzidenzgeometrie. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 21, Nr. 6, 86 S. (1958).

Die Bruchstelle in Graßmanns „Linealer Ausdehnungslehre“ erfolgt dort, wo nach der affinen Vektorrechnung neue Bildungen (Ergänzung und gewisse Produkte) eingeführt werden, die nur noch metrisch invariant sind. Erst später erkannte man, daß diese Bildungen einen durchaus realen affinen Hintergrund haben, der jedoch erst zum Vorschein kommt, wenn man jedem Vektorraum seinen dualen als gleichberechtigt zur Seite stellt. Die vorliegende Arbeit bringt einen in diesem Sinne konsequenten Aufbau der Theorie der Multivektoren und Multi-Kovektoren, wobei stets die Konsequenzen für einen dual symmetrischen Aufbau der projektiven Geometrie beachtet werden. Wie Verf. selbst betont, liegen Parallelen vor zu den entsprechenden Stellen der „Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung“ des Ref. (dies. Zbl. 77, 148). Der Hauptunterschied besteht darin, daß die Multivektoren bei Verf. als vektorielle, multilineare, alternierende Bilder höchstmöglicher Dimensionszahl auftreten, während sie sich beim Ref. an das allgemeine tensorielle Produkt anschließen.

H. Reichardt.

**Kopcik, V. A.:** Über die Superposition der Symmetriegruppen in der Kristallphysik. Kristallografija 2, 99—107 (1957) [Russisch].

Es werden die linearen Gleichungen der Verbindungen zwischen homogenen Tensorfeldern in homogenen anisotropen Medien untersucht. Es wird gezeigt, daß die Symmetrie des Tensors und die Zahl seiner unabhängigen Komponenten invariante Eigenschaften des Tensors sind, die von der konkreten Form der Matrix des Tensors in einem beliebigen zulässigen Koordinatensystem nicht abhängen. Ferner wird gezeigt, daß die Symmetriegruppen der in die Gleichungen der Verbindungen eingehenden Tensoren in der Überschneidung ein und dieselbe Gruppe ergeben. Beziehungen sind abgeleitet, die die Symmetrie der wechselwirkenden kristallphysikalischen Objekte zu bestimmen oder abzuschätzen gestatten. (Nach deutscher Übers. ref.) W. Nowacki (Bern).

**Želudev, I. S.:** Die Symmetrie der Skalare, Vektoren und Tensoren zweiten Ranges. *Kristallografija* 2, 207—216 (1957) [Russisch].

Die Symmetrie der polaren und axialen Tensoren wird aus der Untersuchung der Superposition der Elemente der symmetrischen und antisymmetrischen Teile bestimmt. Die nach diesem Verfahren erhaltenen Ergebnisse stimmen mit den entsprechenden Ergebnissen für die analytisch untersuchten Fälle überein. Eine neue Symmetriegruppe des antisymmetrischen axialen Tensors ist gefunden; es wird gezeigt, daß dieser Tensor einen polaren Vektor bestimmt und seine Symmetrie besitzt ( $\infty \cdot m$ ). Eine neue Symmetriegruppe 4 wird gefunden, die sich als Resultat der Superposition der Symmetrieelemente eines polaren und eines axialen Tensors von bestimmter Form ergibt. Es wird festgestellt, daß die Zahl der Gruppen der polaren und axialen Tensoren sowie ihrer Kombinationen durch 17 Gruppen erschöpft ist. (Nach deutscher Übers. ref.)  
*W. Nowacki (Bern).*

**Strauss, Martin:** Grundlagen der Kinematik. I: Die Lösungen des kinematischen Transformationsproblems. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-naturw. R.* 7, (1957/58), 609—615 (1958).

Um die Frage zu entscheiden, ob die Lorentz-Transformation wirklich die allgemeinste Lösung des kinematischen Transformationsproblems im euklidischen Raum ist, wird eine Neubegründung der Kinematik versucht. Als Hauptproblem der Kinematik wird die Frage der Zusammensetzung kollinearer (konstanter) Geschwindigkeiten betrachtet: die übliche Definition der Geschwindigkeit ( $v = dx/dt$ ) wird wegen ihrer Unsymmetrie hinsichtlich der Bezugssysteme nur zur Definition der Systemzeitmetrik verwendet. Zur Lösung des Transformationsproblems werden nur Postulate benutzt, die sich auf den Begriff der Geschwindigkeit beziehen, nämlich P 1.  $v_{QP} = -v_{PQ}$  und P 2.  $-(v_1 + v_2) = (-v_1) + (-v_2)$ . Als allgemeinste Lösungen des Transformationsproblems ergeben sich so (a) die Lorentztransformation und (b) diejenige Transformation, die aus der Lorentztransformation entsteht, indem man die Geschwindigkeit  $c^2$  durch  $-c^2$  ersetzt; im Falle (a) ist  $c$  die Maximalgeschwindigkeit, im Falle (b) ist  $c$  eine universelle Konstante. Der Fall (a) der gewöhnlichen Lorentztransformation entspricht dabei einem offenen Raum, der Fall (b) einem geschlossenen Raum mit euklidischer Metrik. Die zugehörige relativistische Dynamik wird entwickelt. Abschließend werden zwei heuristische Folgerungen gezogen.

*K. Strubecker.*

**Blaschke, Wilhelm:** Sull'uso dei quaternioni duali nella cinematica. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 24, 291—293 (1958).

Fußend auf der Eulerschen Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt mittels Quaternionen und dem Studyschen Übertragungsprinzip der Liniengeometrie, werden die Formeln für die Bewegung nicht nur von Geraden, sondern auch von Punkten und Ebenen im Raum hergeleitet. Hierbei bedingt die Einführung eines kanonischen Achsenkreuzes eine Vereinfachung des analytischen Apparates zur Behandlung der räumlichen Kinematik.  
*H. R. Müller.*

**Ciobanu, Gh.:** Cinématique des mouvements de roulement avec glissement des systèmes matériels. *Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser.* 4 (8), Nr. 1/2, 303—304, russ. und französ. Zusammenfassg. 304 (1958) [Rumänisch].

**Tavchelidze, D. S.:** Etude positionnelle des organes d'un mécanisme pentalàtère à glisseur. *Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser.* 4 (8), Nr. 1/2, 305—313, französ. Zusammenfassg. 314 (1958) [Russisch].

**Bogdan, R., Cr. Pelecudi and L. Calmaciue:** Study on the mechanical transducers for the determination of paths in plane mechanisms, in cartesian or polar co-ordinate systems. *Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser.* 4 (8), Nr. 1/2, 315—326, russ. Zusammenfassg. 326 (1958).



# Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Pa, Chen-kuo: On the equations of structure of a Riemannian space. Science Record, n. Ser. 1, 199—203 (1957).

Since the structural equations of a Riemannian space

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \quad \Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{ikl}^j [\omega^k \omega^l]$$

represent certain relations between two families of curves of a net, the author intends to give them a geometrical interpretation. He sets up a surface  $S$  formed by two families of curves  $u$  and  $v$  imbedded in the subspace  $V_3$  of  $V_n$ . At each point of  $S$  he introduces the formulas to a curve  $C$ :

$$De_1 = e_2 (\tau ds - d\theta) + e_3 (R \cos \theta - T \sin \theta) ds,$$

$$De_2 = -e_1 (\tau ds - d\theta) + e_3 (R \sin \theta + T \cos \theta) ds,$$

$$De_3 = -e_1 (R \cos \theta - T \sin \theta) ds - e_2 (R \cos \theta + T \cos \theta) ds,$$

where  $e_3$ ,  $\theta$ ,  $\tau$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $ds$  denote the unit normal to  $S$ , angle between  $e_1$  and  $C$ , geodesic curvature, normal curvature, geodesic torsion and arc element, and applying these forms to the structural equations the author derives six identities involving the Gauss's and Codazzi's equations, and he points out that these identities contain 3 ( $n - 1$ ) equations which are less than those contained in the structural equations. Therefore the latter is to be clarified by the selection of curves and of  $S$ . Thus referring to the so-called contact invariants of curves in  $S$  associated to Codazzi's equations, he inserts some theorems in the intrinsic forms.

T. Okubo.

Sen, Hrishikes: On certain conformal mapping of a non-simple  $K^*$ -space. Bull. Calcutta Math. Soc. 49, 193—197 (1957).

A non-flat Riemannian space  $\bar{V}_n$  with the metric tensor  $\bar{g}_{ij}$  is called a  $K^*$ -space if its curvature tensor  $\bar{R}_{hijk}$  satisfies at all points either  $\bar{R}_{hijk|l} = \bar{R}_{hijk} \lambda_l$  or  $\bar{R}_{hijk|l} \lambda_l + \bar{R}_{hikl} \lambda_j + \bar{R}_{hilj} \lambda_k = 0$  and  $\bar{R}_{hijk|l} = 0$  for some non-zero vectors  $\lambda_i$ , where the solidus denotes the covariant differentiation with respect to  $g_{ij}$ . It is known that the vector  $\lambda_i$  is a gradient or can be chosen to be a gradient  $\lambda_i = \partial \lambda / \partial x^i$ . The author considers a Riemannian space  $V_n$  with the metric tensor  $g_{ij}$  which is conformal to the non-simple  $K^*$ -space  $\bar{V}_n$  defined by  $g_{ij} = e^{2\lambda} \bar{g}_{ij}$  and shows that under certain conditions  $V_n$  may also be a  $K^*$ -space and under others the covariant derivative of the curvature tensor  $R_{hijk}$  in  $V_n$  may be expressed simply in terms of  $\bar{R}_{hijk}$  and  $\lambda_l$ .

Su Buchin.

Couty, Raymond: Sur les transformations définies par le groupe d'holonomie infinitésimale. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 553—555 (1957).

Couty, Raymond: Transformations définies par le groupe d'holonomie infinitésimale. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 1871—1873 (1957).

Soit  $V$  une variété riemannienne à  $n$  dimensions et  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées normales associées à un point arbitraire 0 de  $V$ . L'A. considère les familles  $\tau^p$  ( $p = 0, 1, \dots$ ) de transformations locales de la variété  $V$  engendrées par les champs de vecteurs à composantes  $\xi^i = (\bar{\Omega}_k^i)_0 x^k$  où  $(\bar{\Omega}_k^i)_0 = (R_{kmn|a_1 \dots a_p}^i)_0 \cdot U^m V^n W_1^{a_1} \dots W_p^{a_p}$ ,  $U, V, W_\alpha$  étant des vecteurs quelconques au point 0 et  $R_{kmn|a_1 \dots a_p}^i$  les composantes du tenseur dérivé de courbure, et trouve des conditions, en termes des transformations  $\tau$ , dans lesquelles la variété  $V$  est symétrique ( $R_{kmn|a}^i = 0$ ) ou variété  $\mathfrak{S}$  ( $H_{ijkl, mn} = R_{ijk|m|n} - R_{ijk|n|m} = 0$ ). — Citons quelques résultats. Si les transformations  $\tau^0$  sont affines,  $V$  est une variété  $\mathfrak{S}$ . Si la métrique est définie positive et les transformations  $\tau^1, \tau^2$  sont affines  $V$  est symétrique. Pour les variétés d'Einstein les mêmes énoncés restent valables lorsqu'on change „affines“ avec „conformes“. Pour les variétés pseudo-kähleriennes on change dans les

énoncés ci-dessus les mots „cont affines“ avec „sont conformes“ ou avec „laissent invariante la structure presque complexe“. De même l'A. obtient, si les transformations  $\overset{0}{\tau}$  conservent l'élément de volume de  $V$ , un système infini d'équations analogues à celles de Copson et Ruse de la théorie des espaces harmoniques.

*T. Hangan.*

**Miron, R.: La courbure et la torsion de parallélisme dans la géométrie des variétés non holonomes.** An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I 3, 171—180, russ. und französ. Zusammenfassg. 180—181 (1957) [Rumänisch].

Soit donné le long d'une courbe  $C$  de l'espace euclidien  $E_3$  un champ  $\vec{\xi}$  de vecteurs unitaires et un champ de plans (on désigne par  $\vec{n}$  le champ de leurs normales unitaires) contenant en chaque point  $M \in C$  le vecteur  $\vec{\xi}(M)$ . En s'inspirant des travaux de O. Mayer, A. Miller et E. Bortolotti, l'A. définit la courbure et la torsion de parallélisme du champ  $\vec{\xi}$  dans le système de plans  $\vec{n}$ ,  $K(\xi, d)$ ,  $T(\xi, d)$ , par les formules  $K(\xi, d) = \vec{n} d\vec{\xi}/ds$ ,  $T(\xi, d) = (\vec{\xi} \vec{n} d\vec{n}/ds)$  où  $ds$  désigne l'élément d'arc sur  $C$  et  $(\vec{\xi} \vec{n} d\vec{n}/ds)$  le produit mixte des vecteurs entre parathèses (l'A. impose de plus au champ  $\vec{\xi}$  la condition de se transporter par parallélisme dans le système de plans  $\vec{n}$  mais le Réf. a l'impression que cette restriction n'est pas respectée dans le travail). On applique ces notions à l'étude des espaces nonholonomes  $\bar{E}_3^2$  en généralisant quelques résultats établis par O. Mayer dans la théorie des surfaces.

*T. Hangan.*

**Miron, Radu: Quelques observations sur certaines formules de la géométrie des variétés non holonomes.** Bull. Inst. Politehn. Iaşi, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 19—23, russ. und französ. Zusammenfassg. 24 (1957) [Rumänisch].

L'A. établit les formules qui donnent les valeurs de la courbure normale et de la torsion géodésique le long des différentes lignes principales d'une variété non-holonyme. Il établit aussi les théorèmes de Bianchi concernant les lignes de courbure d'une variété holonyme, qui sont en même temps géodésiques, pour les variétés nonholonomes.

*Gh. Th. Gheorghiu.*

**Sasayama, Hiroyoshi: On the extended non-holonomic system of fractional order.** J. spatial Math. Sasayama Res. Room 1, 1—15 (1958).

**Sasayama, Hiroyoshi: On the multiple parameter extensor of fractional grade and its substance.** J. spatial Math. Sasayama Res. Room 1, 16—28 (1958).

**Koszul, J.-L. et B. Malgrange: Sur certaines structures fibrées complexes.** Arch. der Math. 9, Festschrift Hellmuth Kneser, 102—109 (1958).

Sei  $P$  ein differenzierbares Prinzipalbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit  $V$ , dessen Strukturgruppe eine komplexe Liesche Gruppe  $G$  ist;  $G$  operiere von rechts auf  $P$ . Jedem linksinvarianten Vektorfeld  $a$  auf  $G$  entspricht dann ein Vektorfeld  $Z_a$  auf  $P$ , dessen Wert in  $y \in P$  mit  $ya$  bezeichnet wird. Eine Zusammenhangsform  $\gamma$  auf  $P$  ist eine Differentialform 1. Grades auf  $P$  mit Werten in der Lieschen Algebra  $\mathfrak{g}$  der linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$ , für welche (1)  $\gamma(ya) = a$  für alle  $y \in P$ ,  $a \in \mathfrak{g}$ , (2)  $\gamma(vs) = s^{-1}\gamma(v)s$  für alle  $s \in G$  und alle Vektoren  $v$  auf  $P$  gilt. Auf  $P$  existiert dann genau eine fastkomplexe Struktur derart, daß  $\gamma$  in ihr den Doppelgrad (1, 0) hat und die Projektion  $P \rightarrow V$  fastkomplex ist. Die Krümmungsform  $d\gamma + [\gamma, \gamma]$  von  $\gamma$  werde mit  $R_\gamma$  bezeichnet. Ferner sei mit  $I_\gamma$  als dem Tensor der durch  $\gamma$  definierten fastkomplexen Struktur ( $I_\gamma^2 = -id$ )

$$E_\gamma(X, Y) = [X, Y] + I_\gamma[I_\gamma X, Y] + I_\gamma[X, I_\gamma Y] - [I_\gamma X, I_\gamma Y],$$

$X, Y$  Vektoren auf  $P$ . Verff. beweisen die Äquivalenz der folgenden Bedingungen: (a)  $I_\gamma$  ist eine komplexe Struktur, (b)  $E_\gamma = 0$ , (c) die (0, 2)-Komponente von  $R_\gamma$  ist Null, (d) ist  $P$  mit der durch  $\gamma$  definierten fastkomplexen Struktur versehen, so gibt

es zu jedem  $x \in V$  eine Umgebung  $U$  und einen fastkomplexen Schnitt in  $P$  über  $U$ . Corollar: Ist  $V$  komplex eindimensional, so ist  $I_\gamma$  eine komplexe Struktur. Zum Beweise dieses Satzes wird folgende Verallgemeinerung eines Satzes von A. Grothendieck benützt: ist  $\alpha$  eine differenzierbare 1-form vom Typ  $(0, 1)$  in einer Umgebung  $U$  des Nullpunktes des  $C^n$  mit Werten in  $g$ , so gilt in einer Umgebung des Nullpunktes  $d''\alpha + [\alpha, \alpha] = 0$  genau dann, wenn es eine Umgebung  $U'$  des Nullpunktes und eine differenzierbare Abbildung  $f: U' \rightarrow G$  derart gibt, daß  $f^{-1}d''f = \alpha$  auf  $U'$  erfüllt ist.

H. Röhrli.

**Pan, T. K.:** Surfaces in a conformal correspondence. Proc. Amer. math. Soc. 8, 563—571 (1957).

Let  $v, \bar{v}$  be two unit vector fields associated to the surfaces  $S, \bar{S}$  respectively. A curve on  $S$  relative to which the vectors  $v$  are parallel in the sense of Levi-Civita is called an indicatrix of  $v$  on  $S$ . The magnitude of the component normal to  $S$  of the derived vector of  $v$  along a curve  $C$  on  $S$  is called the normal curvature of  $v$  with respect to  $C$ . The author studies the existence of surfaces  $S, \bar{S}$  in conformal correspondence preserving the curves, indicatrices and normal curvatures of associated unit vector fields  $v, \bar{v}$ . The general solution depends on six arbitrary functions of one variable. The characteristics are the curves and the indicatrices of the associated vector fields.

L. A. Santaló.

**Murgeseu, Viorel:** Sur les espaces à connexion affine, à courbure récurrente. An. sti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I 4, Nr. 1, 76—79, russ. Zusammenfassg. 79 (1958).

Ein affinzusammenhängender Raum von rekurrenter Krümmung ist durch die Relation  $R_{ijk}^h = \varphi_k R_{ij}^h{}_{jk}$  charakterisiert, wo  $R_{ij}^h{}_{jk}$  den Krümmungstensor und  $\varphi_k$  einen kovarianten Vektor bedeutet. Eine Transformation der Übertragungsparameter von der Form:  $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + 2\delta_j^i \sigma_k$  nennt man koparallel. Es werden hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß der transformierte Raum eines Raumes von rekurrenter Krümmung wieder ein solcher Raum sei. Diese Bedingungen sind die folgenden:  $\sigma_{jkl} = \varphi_l \sigma_{jk}$ , wo  $\sigma_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_j \sigma_k - \partial_k \sigma_j$ . Z. B. sind für  $\sigma_k = \partial_k \sigma$  die angegebenen Bedingungen erfüllt. Dann untersucht Verf. im zweiten Teil die von ihm  $E$ -metrisierbar genannten Räume. Ein Raum wird  $E$ -metrisierbar genannt, wenn die Metrik von einem metrischen Grundtensor  $g_{ij}$  von der Form  $g_{ij} = e^{-\lambda} E_{ij}$  bestimmt wird, wo  $E_{ij} = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji})$  und  $R_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ikj}^k$  bedeutet. Verf. beweist, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die  $E$ -Metrisierbarkeit eines affinzusammenhängenden Raumes von rekurrenter Krümmung  $\varphi_k = \text{grad}_k \varphi$  ist, wo  $\varphi_k$  den rekurrenten Vektor bedeutet. Sind jetzt zwei  $E$ -metrisierbare Räume von rekurrenter Krümmung noch koparallel, so ist  $g_{ij} = e^{4\sigma} g_{ij}$ , wo  $g_{ij}$  bzw.  $g_{ij}$  die entsprechenden metrischen Grundtensoren sind. Endlich betrachtet Verf. diejenigen Räume, in denen eine Winkelmetrik mit dem Grundtensor  $E_{ij}$  bestimmt werden kann. Es wird gezeigt, daß die Räume von rekurrenter Krümmung und die durch  $R_{ijk} = \varphi_k R_{ij}$  charakterisierten Räume solche Räume sind.

A. Moór.

**Haimovici, Adolf:** Sur quelques invariants attachés à une direction d'un espace bi- et tridimensionnel à connexion affine. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Cluj. Studii Cerc. Mat. 8, Nr. 1/2, 133—141, russ. und französ. Zusammenfassg. 141 (1958) [Rumänisch].

Soit donné un espace  $A_n$  à connexion affine  $\Gamma_{jk}^i$  et un vecteur  $X^i$  qui est transporté par parallélisme d'un point  $x^i$  au point  $x^i + dx^i$  donc nous avons

$$dx^i + \Gamma_{ab}^i X^a dx^b = 0.$$

On cherche les conditions pour qu'une fonction  $f(x^i, X^i)$  homogène de degré zéro  $(\partial f / \partial X^a) dX^a = 0$  soit un invariant par parallélisme ( $df = 0$ ), donc que

$$\partial f / \partial x^i - \Gamma_{ai}^b (\partial f / \partial x^b) X^a = 0.$$



Dans le cas  $n = 2$  on montre que l'espace possède un invariant par parallélisme s'il est à parallélisme absolu. Dans le cas  $n = 3$ , on trouve les espaces ayant un seul invariant et on montre que ceux qui ont deux invariants sont à parallélisme absolu.

G. Vranceanu.

**Postelnicu, Tiberiu:** Étude des espaces  $A_2$  à connexion affine linéaire, localement Euclidiens. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 8, 279—301, russ. und französ. Zusammenfassg. 299—301 (1957) [Rumänisch].

L'A. considère les espaces à connexion affine à deux dimensions  $A_2$ , définis dans un système de coordonnées  $x^1, x^2$  par des formules de la forme  $\Gamma_{jk}^i = A_{jk}^i x^l + C_{jk}^i$ ,  $A_{jk}^i, C_{jk}^i$  étant des constantes, telles que la courbure et la torsion de la connexion  $\Gamma_{jk}^i$  soient nulles. Dans le premier chapitre on donne des formes canoniques pour les connexions  $\Gamma_{jk}^i$ , en utilisant les transformations affines des variables  $x^1, x^2$ . A savoir, on montre qu'on a six types de connexions  $\Gamma_{jk}^i$ : en posant  $\Gamma_{22}^1 = a, \Gamma_{11}^2 = b, \Gamma_{12}^1 = u, \Gamma_{12}^2 = v, \Gamma_{11}^1 = \alpha, \Gamma_{22}^2 = \beta$ , on peut avoir (I)  $a = x^2, u = \varepsilon x^2 + \varrho, \beta = v = 0, \alpha = 1/\varrho, \beta = \varepsilon x^2 + \varrho - \varepsilon/\varrho, (\varepsilon = \pm 1, \varrho = \text{const.})$  (II)  $a = u = \beta = 0, b = -\varepsilon x^2 + (\varepsilon - 1)\varrho, v = \varepsilon\varrho, \alpha = \varepsilon\varrho - 1/\varrho, (\text{III}) a = x^2, b = u = 0, v = \alpha = 1, \beta = \varrho x^2 + \sigma, (\sigma = \text{const.})$  (IV)  $a = x^2, b = u = v = \alpha = 0, \beta = \tau x^2 + \varrho, (\tau = 0, \pm 1; \varrho = 1 \text{ pour } \tau \neq 0),$  (V)  $a = x^2, u = 1, b = v = 0, \alpha = \varrho, \beta = -\varrho x^2 + 1, (\text{VI}) a = \varepsilon x^1, b = \varepsilon' x^2, u = \beta = \varepsilon x^2, v = \alpha = \varepsilon' x^1 (\varepsilon' = \pm 1).$  Dans le second chapitre, l'A. montre que les seules de ces connexions qui définissent dans le plan  $(x^1, x^2)$  une géométrie équivalente en grand avec la géométrie euclidienne sont données par les formules (II) pour  $\varepsilon = 1, \varrho = \pm 1$  et (IV),  $\varrho = \tau = 0$ .

G. Teleman.

**Dumitraş, Viorel:** Les groupes de mouvement à 6 paramètres des espaces  $A_3$ . Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 8, 303—342, russ. und französ. Zusammenfassg. 338—341 (1957) [Rumänisch].

En poursuivant ses travaux sur la classification des espaces à connexion affine  $A_3$  (à trois dimensions) qui admettent un groupe transitif d'automorphismes, l'A. détermine dans ce travail les groupes de Lie locaux de transformations à six paramètres  $G_6$  qui peuvent être groupes d'automorphismes transitifs pour des espaces  $A_3$ . En dehors des espaces  $A_3$  riemanniens et de ceux qui admettent un groupe d'automorphismes à plus de six paramètres, l'A. trouve qu'il existent 10 types de tels groupes et détermine pour 9 de ces types les connexions  $A_3$  correspondantes. La méthode utilisée est la suivante: on détermine les groupes linéaires homogènes en trois variables  $GL_3$  qui peuvent être groupes de stabilité pour un espace  $A_3$  et on les plonge dans un groupe transitif  $G_6$  de transformations. On fait usage de la classification de Sophus Lie des groupes  $GL_3$ . Parmi les résultats obtenus citons le suivant: les espaces  $A_3$  ayant le groupe  $GL_3$  donné par les opérateurs  $x^i \partial/\partial x^2, i = 1, 2, 3$  peuvent être considérés comme le cas particulier, pour  $n = 3$ , des espaces  $A_n$  à connexion semi-symétrique  $\Gamma_{jk}^i = \delta_j^i q_k^1 + \delta_k^i q_j^2, q_i^\sigma = (\alpha_i + \varepsilon^\sigma \beta_i)/M, M = 1 + \lambda x^1 + \varrho x^2$  où  $\sigma = 1, 2; \varepsilon^1 = 1, \varepsilon^2 = -1; \alpha_i = \beta_i = 0$  si  $i > 2$ , qui possèdent un groupe d'automorphismes à  $n^2 - n$  paramètres. L'A. démontre que parmi les espaces  $A_3$  homogènes ayant le groupe de stabilité  $x^3 \partial/\partial x^1, x^3 \partial/\partial x^2, x^1 \partial/\partial x^1 - x^3 \partial/\partial x^3$  il existe des espaces symétriques au sens de Raševskij ( $T_{jk,l}^i = R_{jkl,h}^i = 0$ ). De l'énoncé du Théorème 10 on pourrait déduire que ce sont les seuls espaces ayant ce groupe de stabilité, quoi que l'A. affirme qu'il peuvent exister aussi d'autres. En réalité il y en a aussi d'autres. Dans l'énoncé des théorèmes 1 (2) du résumé il y a des fautes d'impression; on doit remplacer les nombres III (IV) par IV (V).

T. Hangan.

**Murgescu, Viorel:** Les invariants d'un champ tensoriel dans les espaces à parallélisme absolu. Bul. Inst. Politechn. Iaşi, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 29—35, russ. und französ. Zusammenfassg. 35—36 (1957).

En désignant par  $\tau_{pq}$  les composantes d'un tenseur covariant à deux indices, l'A. se propose l'étude des fonctions  $F(x^k, \tau_{pq})$  qui restent invariantes au transport

parallèle du tenseur  $\tau_{pq}$ , dans un espace à connexion affine  $n$ -dimensionnel, à courbure nulle. Ces fonctions ont la forme générale  $J_{\alpha\beta} = \lambda_{(\alpha)}^i \lambda_{(\beta)}^j \tau_{ij}$ , où  $\lambda_{(\alpha)}^i$  sont les composantes de  $n$  vecteurs linéairement indépendants intégrales du système  $\partial \lambda^h / \partial x_{\alpha} + \Gamma_{ik}^h \lambda^i = 0$ .  
*Adolf Haimovici.*

**Mastrogiacomo, Pasquale:** Sulle connessioni tensoriali per tensori controvarianti e covarianti  $m$ -pli. Giorn. Mat. Battaglini 85 (V. Ser. 5), 305—321 (1957).

Tensor connections (as different from the usual vector connections) have been introduced by E. Bompiani and largely studied by A. Cossu. They are defined by a system of components  $L^i_{jk}$  satisfying a fundamental system of partial differential equations allowing the definition of covariant (tensor) derivatives and differentials. By symmetrization and alternation two tensors  $\Phi, \Psi$  can be deduced from the  $L$ 's. Their vanishing are the necessary and sufficient conditions for the permanence of the symmetric and alternating character of a controvariant or covariant tensor through differentiation. Relations between these two tensors are examined (they coincide if the connection is defined for double tensors, a case studied by Bompiani). Tensor connections giving rise to the same tensors  $\Phi$  and  $\Psi$  are determined. The geometric meanings of  $\Phi$  and  $\Psi$  and of  $\Phi \equiv \Psi$  are also given. Tensor connections of particular types (f. i. deduced from one or more vector connections) are examined.

*E. Bompiani.*

**Hu, Hou-sung:** A new geometry of a space of  $K$ -spreads. Science Record, n. Ser. 3, 107—111 (1959).

In an  $N$ -dimensional space of  $K$ -spreads defined by the equations  $\partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta + \Gamma_{jk}^i(x; p) p_\alpha^j p_\beta^k = 0$  ( $p_\alpha^j = \partial x^j / \partial u^\alpha$ ),  $i, j, k = 1, \dots, N$ ;  $\alpha, \beta = 1, \dots, K$  the author considers the parameter transformations  $u^\alpha = u^\alpha(v; a)$ , such that  $\Gamma_{jk}^i$  is transformed into  $'\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i A_k + \delta_k^i A_j$ , where  $A_i$  denotes a covariant vector. This leads to a projective transformation of parameters in the ordinary sense, and gives rise to a new geometry, called the projective geometry by the author, of a space of  $K$ -spreads lying between the affine and descriptive geometries of Douglas. The fundamental projective invariants associated with a necessary and sufficient condition for the projective flatness of a space of  $K$ -spreads are derived in an usual way.

*Su Buchin.*

**Castoldi, Luigi:** Attorno all'antica relatività di Weyl. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 27, 45—47 (1957).

Es wird daran erinnert, daß in der Weylschen Geometrie aus dem Verschwinden der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektorfeldes  $v^i$  i. a. nicht folgt, daß auch die kovariante Ableitung des zugehörigen kovarianten Feldes  $v_k = g_{ki} v^i$  verschwindet. Verf. sieht darin den Grund für das Scheitern des Weylschen Versuchs einer einheitlichen Feldtheorie.

*D. Laugwitz.*

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

**Derry, Douglas:** On polygons in real projective  $n$ -space. Math. Scandinav. 6, 50—66, S 4 (1958).

$C_n$  sei ein Polygon im projektiven  $R_n$ , das von jeder Hyperebene, die keine Seite von  $C_n$  enthält, in höchstens  $n$  Punkten getroffen wird.  $C_n$  kann erhalten werden aus einer Folge von Polygonen  $P_1, P_2, \dots, P_k = C_n$ , wobei  $P_1$   $n+1$  Ecken eines  $n$ -Simplex verbindet,  $P_i$   $n+i$  Ecken enthält und die Ecken von  $P_{i+1}$  auf den Seiten von  $P_i$  liegen ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ). — Der Satz läßt sich dualisieren. Eine Folgerung davon ist: Wenn  $C_n$  eine Kurve  $n$ -ter Ordnung im projektiven  $R_n$  ist und durch einen Punkt im  $R_n$   $q$  Hyperebenen  $H_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ) gehen, welche  $C_n$  in den Punkten  $p_{n(i-1)+1}, p_{n(i-1)+2}, \dots, p_{ni}$  schneiden, wobei  $p_1, p_2, \dots, p_{nq}$  bei einer Orientierung von  $C_n$  aufeinanderfolgen, dann ist  $q \leq n$ .

*H. Künneht.*

**Greenspan, Donald:** On vertices of space arcs. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 44, 45—72 (1957).

Es handelt sich um dasjenige Juelsche Problem, bei welchem die Ordnungswerte gewisser (vgl. unten) beschränkter, einfacher Bogen  $B$  im euklidischen  $E_n$  mit  $n \geq 3$  bezüglich der  $(n-1)$ -dimensionalen Sphären  $S$  betrachtet werden. Dabei wird von den Bogen  $B$  gefordert: (1) es besitzt  $B$  keine linearen  $(n-2, n)$ -Sekanten (d. h. keine  $n$  Punkte von  $B$  liegen in einer  $(n-2)$ -Ebene). — (1a) Es besitzt  $B$  keine sphärischen  $(n-2, n+1)$ -Sekanten (d. h. keine  $n+1$  Punkte von  $B$  liegen auf einer  $(n-2)$ -Sphäre). — (2) Es besitzt  $B$  einen beschränkten Ordnungswert ( $OW(B)$ )  $h$  bezüglich der  $(n-1)$ -Sphären (d. h. es gibt eine natürliche Zahl  $h$  derart, daß die Mächtigkeit  $OW(B; S)$  von  $B \cap S$  für alle  $(n-1)$ -Sphären  $S$  nicht größer als  $h$  und für mindestens ein  $S$  gleich  $h$  ist). — (3) Es seien  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n+2$ ) Schnittpunkte von  $B \cap S$ , in einer Reihenfolge genommen, die einer Orientierung von  $B$  entspricht. Liegt dann auf  $B$  zwischen  $P_r$  und  $P_{r+1}$  kein weiterer Punkt von  $B \cap S$  und ist  $H$  diejenige  $(n-1)$ -Ebene, welche durch die übrigen Punkte  $P_i$  ( $i \neq r, r+1$ ) bestimmt wird, so sollen  $P_r$  und  $P_{r+1}$  in der gleichen, von  $S \cap H$  auf  $S$  begrenzten  $(n-1)$ -Halbsphäre von  $S$  liegen. — Es wird gezeigt: (I) Reduktionssatz: Ist  $OW(B; S) = k$ , so gibt es in beliebiger Nachbarschaft von  $S$  solche  $(n-1)$ -Sphären  $S'$ , für die  $OW(B; S') \geq k$  und sämtliche Punkte von  $B \cap S'$  Schnittpunkte sind (also insbesondere keine Endpunkte von  $B$ ). — (II) Kontraktionssatz: Es sei  $P_i^1 \in B \cap S_1$  ( $i = 1, \dots, n+2$ ). Dann läßt sich eine Folge von  $(n-1)$ -Sphären  $S_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) konstruieren von folgender Art: Unter den Punkten von  $B \cap S_m$  gibt es  $n+2$  Schnittpunkte  $P_i^m$  ( $i = 1, \dots, n+2$ ), so daß der kleinste, diese  $P_i^m$  enthaltende Teilbogen  $B_m$  von  $B$  mit  $m$  abnimmt (also  $B_{m+1} \subset B_m$ ) und daß der Durchmesser von  $B_m$  gegen Null konvergiert. — Der Beweis des Kontraktionssatzes beruht darauf, daß — anschaulich gesprochen — bei festen  $P_i$  ( $i \neq r, r+1$ ) und stetiger Änderung von  $S$  die  $P_r, P_{r+1}$  (vgl. Forderung (3)) sich monoton in entgegengesetzter Richtung auf  $B$  bewegen. — Bei den bisher bekannten Kontraktionssätzen war vorausgesetzt, daß diese Monotonieeigenschaft für beliebige zwei der  $P_i$  gilt (also auch dann, wenn zwischen ihnen andere, festgehaltene  $P_i$  liegen). Die letztere (stärkere) Monotonieeigenschaft ist z. B. in dem speziellen Falle erfüllt, daß der Ordnungswert von  $B$  bezüglich der  $(n-1)$ -Ebenen gleich 3 ist (Vgl. Ref., dies. Zbl. 7, 222; vom Verf. nicht erwähnt). Der Reduktionssatz gilt auch für den Fall endlichen Ordnungswertes. — Verf. folgert dann aus dem Kontraktionssatz: Es ist  $OW(B) = n+1$  genau dann, wenn  $B$  keinen inneren Punkt vom (sphärischen) Ordnungswert  $n+2$  besitzt.

Otto Haupt.

**Nasu, Yasuo:** On asymptotes in a metric space with non-positive curvature. Tôhoku math. J., II. Ser. 9, 68—95 (1957).

Im Anschluß an verschiedene Untersuchungen von H. Busemann betrachtete Verf. in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 66, 405) metrische Räume, in denen zwischen je zwei Punkten ein Segment existiert, dessen Länge gleich dem Abstand der beiden Punkte ist, und in denen die Fortsetzung jedes Segments lokal möglich und eindeutig ist. In solchen  $E$ -Räumen sind die Begriffe Halbgerade  $l$ , Asymptote zu  $l$  und asymptotisch konjugierter Punkt bezüglich  $l$ , d. h. Anfangspunkt einer Asymptote, definiert.  $E$ -Räume mit symmetrischer Metrik heißen  $G$ -Räume. In vorliegender Abhandlung werden nur  $G$ -Flächen mit nicht-positiver Krümmung untersucht, die homoömorph einer  $(k+1)$ -fach punktierten Sphäre sind. U. a. werden folgende Resultate hergeleitet: (1) Für eine Halbgerade  $l$  sei  $K(l)$  die Menge der asymptotisch konjugierten Punkte. Dann gilt für die Anzahl  $z$  der von jedem Punkt von  $K(l)$  ausgehenden Asymptoten:  $2 \leq z \leq k+1$ . (2)  $K(l)$  besteht aus endlich vielen unbeschränkten und stetigen Kurven.  $K(l)$  besitzt endlich viele Verzweigungspunkte.

W. Barthel.



Stavroulakis, Nicias: Une généralisation du théorème de Bonnet. *Technica Chronica* No. 393—394, 6 p. (1957) [Griechisch].

Verf. überträgt die bekannte Integralformel von Bonnet von regulären Flächenstücken auf solche, die endlich viele „konische“ Punkte enthalten. Das wirkt sich so aus, daß in der Bonnetschen Formel für ein einfach zusammenhängendes Flächenstück auf der linken Seite der Gleichung neben dem Integral über die Krümmung, dem Integral über die geodätische Krümmung der Randkurve und der Summe der Außenwinkel in den Eckpunkten der Randkurve noch die Summe der Winkel  $2\pi - \alpha_i$  hinzukommt, wo  $\alpha_i$  der „Öffnungswinkel“ des konischen Punktes  $p_i$  ist, während rechts in der Formel wieder  $2\pi$  steht. Anm. des Ref.: Dies Ergebnis ist enthalten in den Untersuchungen von A. D. Aleksandrov, Die innere Geometrie der konvexen Flächen (1955; dies. Zbl. 65, 151). *W. Klingenberg.*

Pták, Vlastimil: On the absolutely convex envelope of a set in a finite dimensional vector space. *Časopis Mat.* 83, 343—346, russ. und engl. Zusammenfassg. 346—347 (1958) [Tschechisch].

Carathéodory hat bewiesen, daß die konvexe Hülle einer kompakten Menge  $M$  im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $E_n$  mit der Menge aller Vektoren  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i$  ( $m_i \in M$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ ) zusammenfällt. Verf. zeigt, daß der Satz für jede Menge  $M \in E_n$  gilt, und daß im Falle eines kompakten  $M$  auch die konvexe Hülle  $H(M)$  kompakt ist. Eine Menge  $A$  in einem Vektorraum heißt symmetrisch, wenn sie mit  $x$  auch  $-x$  enthält. Die symmetrische konvexe Hülle  $SH(A)$  von  $A$  fällt zusammen mit der Menge aller Vektoren  $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ , wo  $a_i \in A$  und  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$ . Wenn  $A$  in  $E_n$  kompakt ist, so ist auch  $SH(A)$  kompakt. *H. Schwerdtfeger.*

Lenz, Hanfried: Die Eilinen mit einer Schaar konjugierter Durchmesserpaare. *Arch. der Math.* 9, Festschrift Hellmuth Kneser, 134—139 (1958).

A  $P$ -curve (Blaschke, this Zbl. 72, 166) is a convex curve with the property that each diameter  $d$  has a conjugate  $d'$ , i. e. a diameter parallel to the support lines at the end points of  $d$ . An  $R$ -curve (Radon curve) is a  $P$ -curve with center of symmetry. The paper contains a way of generating  $R$ -curves and some extremal properties of  $P$ - und  $R$ -curves. For instance, if  $E_1$  is the area of the greatest inscribed quadrilateral and  $E_2$  that of the smallest circumscribed parallelogram to a convex curve  $K$ , then the inequality  $E_2/E_1 \leq 2$  holds, with the equality for  $P$ -curves.

*L. A. Santaló.*

Grünbaum, B.: On common transversals. *Arch. der Math.* 9, 465—469 (1958).

A family  $P$  of subsets of the plane is said to have the property  $T(n)$  (property  $T$ ) if any  $n$  members (all members) of  $P$  have a common transversal. Then: 1. If  $P$  is a family of disjoint translates of a parallelogram,  $T(5)$  implies  $T$  and  $T(5)$  cannot be substituted for  $T(4)$ . 2. If  $P$  is a family of congruent circles containing at least six members,  $T(4)$  implies  $T$ . Conjecture: Theorem 1 probably holds for families of disjoint translates of any convex set.

*L. A. Santaló.*

Harrop, R. and R. Rado: Common transversals of plane sets. *J. London math. Soc.* 33, 85—95; Addendum 252 (1958).

Let  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) denote plane point sets and  $A'_i$  the convex hull of  $A_i$ . Let  $T_{rn}$  ( $r \leq n$ ) denote the set of all systems  $(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})$  such that corresponding to every choice of indices  $\alpha_q$  for  $q < r$ , satisfying  $(1) \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{r-1} < n$ , there exists a transversal  $g$  such that  $g \cdot A'_{\alpha(q)} \neq 0$  for all  $q < r$ , and let  $S_{rn}$  denote the set of all systems  $(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})$  such that corresponding to every set of indices  $\alpha_q$  satisfying (1) there is a permutation  $q \rightarrow \pi(q)$  of  $(0, 1, 2, \dots, r-1)$  such that  $(B_0 + B_1 + \dots + B_{\mu-1})' \cdot (B_\mu + \dots + B_{r-1})' = 0$  where  $B_q = A_{\alpha_{\pi(q)}}$  for  $q < r$ . As a complement to a result of Grünbaum (see

the preceding review) the authors prove the following theorem: a) If  $n \geq 4$ , then  $S_{nn} T_{3n} \subset S_{n-1,n} T_{3n} \subset \dots \subset S_{4n} T_{3n} \subset S_{4n} T_{4n} \subset S_{3n} T_{4n} \subset T_{nn}$ ; b)  $S_{nn} T_{2n} \not\subset T_{3n}$  ( $n \geq 3$ ),  $S_{3n} T_{3n} \not\subset T_{4n}$  ( $n \geq 4$ ),  $S_{2n} T_{n-1,n} \not\subset T_{nn}$  ( $n \geq 3$ ). As the authors note in the Addendum these results are closely related to those obtained by N. H. Kuiper (this Zbl. 79, 163).

L. A. Santaló.

**Ohmann, D.: Ein allgemeines Extremalproblem für konvexe Körper.** Monatsh. Math. 62, 97—107 (1958).

Let  $K$  be a convex body of a family  $\mathfrak{K}$  and let  $\xi$  be the unit normal vector to the boundary of  $K$  at the surface element  $dF$ . Given a set of sufficiently regular scalar functions  $g_i(\xi)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) we define  $J(g_i; K) = \int_K g_i(\xi) dF$ . For any  $\xi$  we have the half space  $H(g; \xi)$  of points  $X$  such that  $\xi \cdot X \leq g(\xi)$ ; the intersection of all these  $H(g; \xi)$  is a convex body called the trunk body of  $g(\xi)$  and is denoted by  $R_g$ . Let us assume that two sets of constants  $c_i, \lambda_i$  exist such that  $J(g_i; K) - c_i$  have constant sign and  $\lambda_i [J(g_i; K) - c_i] \leq 0$  for any  $K \in \mathfrak{K}$ . If the trunk body  $R_g$  of  $g(\xi) = \sum \lambda_i g_i(\xi)$  satisfies the conditions: a)  $R_g \in \mathfrak{K}$ ; b)  $J(g, R_g) = J(g, R_g)$ ; c)  $\lambda_i [J(g_i; R_g) - c_i] = 0$ , where  $\bar{g}(\xi) = \liminf g(\xi')$  for  $\xi' \rightarrow \xi$ , then  $R_g$  has maximal volume among all the bodies of  $\mathfrak{K}$  and this extremal property characterizes  $K$  up to parallel translations. The proof is based on the inequality of Minkowski  $V(K'; K, K, \dots, K)^n \geq V(K') V(K)^{n-1}$  referring to mixed volumes. Several particular cases of this general theorem are considered.

L. A. Santaló.

**Besicovitch, A. S. and H. G. Eggleston: The total length of the edges of a polyhedron.** Quart. J. Math., Oxford. II. Ser. 8, 172—190 (1957).

In the paper there is proved the following conjecture of L. Fejes Tóth: The edges of any convex polyhedron (in three-dimensional euclidian space) which contains a sphere of unit radius have a total length of at least 24. The minimal length 24 is attained only for a cube. The proof is divided into 11 lemmas, some of which are very interesting. The method is a synthetic one, the method of Lagrangian undetermined multipliers and fundamental theorems of theory of convex bodies are used.

M. Sekanina.

**Pleijel, A.: Über Distanzpotenzintegrale.** Arch der Math. 9, 430—432 (1958).

Für Körper  $K$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes wird das Distanzpotenzintegral durch  $D(K) = \int r^m dV_p dV_q$ ,  $m > -n$  erklärt, wobei  $r$  den Abstand zwischen  $p, q \in K$  und  $dV_p, dV_q$  die Volumenelemente bezeichnen. Verf. beweist, gestützt auf einen Satz von Knothe (dies. Zbl. 77, 358): Unter allen Eikörpern mit gleichem Hyperebenenmaß hat die Kugel das größte Integral.

K. Legrády.

## Topologie:

**Infantozzi, C. A.: On a necessary condition for the general covering property.** Fac. Ing. Agrimensura Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadíst. 3, 69—78, engl. Zusammenfassg. 79 (1958) [Spanisch].

Die transfinite Kardinalzahl  $\alpha$  heißt bezüglich der Kardinalzahl  $\beta$  regulär, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Ist  $A$  eine Menge von Kardinalzahlen  $< \alpha$  und ist die Mächtigkeit von  $A$  kleiner als  $\beta$ , so ist auch das Supremum von  $A$  kleiner als  $\alpha$ . Verf. beweist folgenden Satz: Es seien  $\alpha$  und  $\beta$  zwei transfinite Kardinalzahlen mit  $\alpha \geq \beta$ . Ferner enthalte jede offene Überdeckung des topologischen Raumes  $X$ , deren Mächtigkeit  $\leq \alpha$  ist, eine Überdeckung von  $X$  mit einer Mächtigkeit  $< \beta$ . Dann gibt es zu jeder Teilmenge  $X_1$  von  $X$ , deren Mächtigkeit  $|X_1|$  bezüglich  $\beta$  regulär ist und die Ungleichung  $\alpha \geq |X_1| \geq \beta$  erfüllt, einen Punkt  $p \in X$  mit folgender Eigenschaft: Jede Umgebung von  $p$  besitzt mit  $X_1$  einen Durchschnitt, dessen Mächtigkeit  $\geq \beta$  ist. Anschließend werden aus diesem Ergebnis einige einfache Folgerungen gezogen.

H.-J. Kowalsky.

**Gleason, Andrew M.: Projective topological spaces.** Illinois J. Math. 2, 482—489 (1958).

Ist  $\mathfrak{K}$  eine Kategorie Hausdorffscher Räume und stetiger Abbildungen, so heiße ein Raum  $X \in \mathfrak{K}$  projektiv, wenn für je zwei Räume  $Y, Z \in \mathfrak{K}$  und je zwei Abbildungen  $\varphi \in \mathfrak{K}$  von  $X$  in  $Z$ ,  $f \in \mathfrak{K}$  von  $Y$  auf  $Z$  eine Abbildung  $\psi \in \mathfrak{K}$  von  $X$  in  $Y$  existiert mit  $\varphi = f\psi$ . Speziell sei  $\mathfrak{K}$  entweder die Kategorie aller kompakten Räume und aller stetigen Abbildungen zwischen ihnen oder die Kategorie aller lokal kompakten Räume und aller stetigen Abbildungen zwischen ihnen mit der Eigenschaft, daß das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist. 1. Die projektiven Räume von  $\mathfrak{K}$  sind die extrem unzusammenhängenden Räume in  $\mathfrak{K}$  (ein topologischer Raum heißt extrem unzusammenhingend, wenn die abgeschlossene Hülle jeder offenen Menge offen ist). 2. Zu jedem Raum  $Y$  in  $\mathfrak{K}$  existieren in  $\mathfrak{K}$  ein projektiver Raum  $X$  und eine Abbildung  $f$  mit  $Y = f(X)$ .  
G. Nöbeling.

**Engelking, R. and S. Mrwka: On  $E$ -compact spaces.** Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 429—436, russ. Zusammenfassg. XXXV—XXXVI (1958).

Sind  $X, Y$  Hausdorffsche Räume (nur solche Räume werden betrachtet), so bedeutet  $Y^X$  die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  in  $Y$ ,  $[Y^X]$  die Vereinigung aller  $(Y^n)^X$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Sind  $E, X$  Räume, so heißt  $X$   $E$ -vollständig regulär, falls das Folgende gilt: ist  $A \subset X$ ,  $p \in X - \bar{A}$ , so gibt es eine Abbildung  $h \in [Y^X]$  mit  $h(p) \notin h(A)$  [diese Bedingung ist dann und nur dann erfllt, wenn  $X$  mit einer Untermenge von  $E^m$ , wo  $m$  eine genügend große Mächtigkeit bedeutet, homöomorph ist (S. Mrwka, dies. Zbl. 71, 383)]. Die Klasse aller  $E$ -vollständig regulären Räume wird mit  $\mathfrak{C}(E)$  bezeichnet; ein Raum  $X \in \mathfrak{C}(E)$  heißt  $E$ -kompakt, falls es keinen Raum  $Y \in \mathfrak{C}(E)$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:  $X \subset Y$ ,  $X \neq Y$ ,  $\bar{X} = Y$ , jede  $f \in E^X$  hat eine Erweiterung  $f^* \in E^Y$ . Kompakte bzw.  $Q$ -Räume entstehen als Spezialfälle der  $E$ -kompakten Räume, wenn  $E$  einem kompakten Intervall, bzw. der Zahlengeraden gleichgesetzt wird. Es werden einige Sätze (vgl. auch S. Mrwka, dies. Zbl. 81, 386) bewiesen, die für kompakte und  $Q$ -Räume wohlbekannt sind: das kartesische Produkt  $E$ -kompakter Räume ist  $E$ -kompakt; ein Raum  $X$  ist dann und nur dann  $E$ -kompakt, wenn er mit einem abgeschlossenen Unterraum von  $E^m$  homöomorph ist; ist  $X \in \mathfrak{C}(E)$ , so gibt es einen (und im wesentlichen nur einen)  $E$ -kompakten Raum  $Y \in \mathfrak{C}(E)$  derart, daß jede Abbildung  $f \in E^X$  eine Erweiterung  $f^* \in E^Y$  hat. Einige Anwendungen und Korollare werden angegeben; es wird folgendes bemerkt: wenn man in der Definition der  $E$ -vollständigen Regularität  $[X^Y]$  durch  $X^Y$  ersetzt, so ergibt sich eine Klasse von Räumen, die im allgemeinen von  $\mathfrak{C}(E)$  verschieden ist; dies geht aus dem folgenden Ergebnis hervor, das den Verf. von de Groot mitgeteilt wurde: es gibt eine (nicht-triviale) Untermenge  $E$  in der Ebene derart, daß jede stetige Abbildung von  $E$  in  $E$  entweder identisch oder konstant ist.

M. Katetov.

**Anderson, Frank W. and Robert L. Blair: Characterizations of the algebra of all real-valued continuous functions on a completely regular space.** Illinois J. Math. 3, 121—133 (1959).

Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subset C(X) := \{f : f \text{ reell, stetig auf } X\}$ , so heißt  $A$  schwach pseudoregulr, falls  $X$  eine Subbasis offener Mengen  $\mathfrak{U}$  hat, so daß zu  $U \in \mathfrak{U}$  und  $x \in U$  stets ein reelles  $\alpha > 0$  und ein  $f \in A$  existiert mit  $|f(x) - f(y)| \geq \alpha$  für alle  $y \notin U$ ;  $A$  heißt pseudoregulr (regulär), falls  $A$  die Einheit  $e$  von  $C(X)$  enthält und falls zu allen  $x \in X$  und offenen Umgebungen  $U$  von  $x$  ein  $f \in A$  existiert mit  $f(x) = 0$ ,  $f(y) \geq 1$  ( $f(y) = 1$ ) für  $y \notin U$ .  $X$  ist vollständig regulär genau dann, wenn  $X$  ein  $T_1$ -Raum ist und  $C(X)$  regulär. Ist weiter  $A$  ein Ring (oder eine reelle Algebra), so bedeute  $\mathfrak{M}_A$  die Menge aller maximalen Ideale von  $A$ ,  $\mathfrak{R}_A$  die Menge aller reellen  $M \in \mathfrak{M}_A$  (d. h.  $M \in \mathfrak{M}_A$  und  $A/M$  ist dem Körper der reellen



Zahlen  $R$  isomorph); für  $M \in \mathfrak{R}_A$  ist  $M(f)$  durch den zugehörigen Homomorphismus dann eindeutig auf  $A$  definiert. Ein  $A \subset C(X)$  heißt punkttreu (p. t.), wenn  $M \in \mathfrak{R}_A$  genau dann, falls  $M = M_x := (f: f \in A, f(x) = 0)$  mit eindeutig bestimmtem  $x \in X$ . Es wird gezeigt: (1) Ist  $A$  ein p. t., schwach pseudoregulärer Teilring von  $C(X)$ , so ist  $X$  durch  $A$  schon eindeutig bestimmt;  $X$  ist dann vollständig regulär. (Nämlich  $\mathfrak{R}_A$ , versehen mit der schwachen Topologie, die alle  $f^*(M) := M(f)$  stetig macht für  $f \in A$ , ist homöomorph  $X$ .) (2) Ein Ring  $A$  ist genau dann isomorph einem p. t., schwach pseudoregulären Teilring von  $C(X)$  (mit dann eindeutigem, vollständig regulärem  $X$ ), falls  $\cap \mathfrak{R}_A = (0)$ . ( $A^* := (f^*(M) : f \in A)$  ist ein solcher Teilring von  $C(\mathfrak{R}_A)$ .) (3) Eine Algebra  $A$  ist genau dann isomorph einer p. t., pseudoregulären Teilalgebra von  $C(X)$ , wenn  $A$  eine Einheit hat und  $\cap \mathfrak{R}_A = (0)$ ;  $X$  ist dann topologisch eindeutig und ein  $Q$ -Raum. [Ein  $Q$ -Raum ist ein vollständig regulärer Raum mit punkttreuem  $C(X)$ .]  $Q$ -Räume sind also durch  $C(X)$  eindeutig bestimmt (vgl. Pursell, dies. Zbl. 78, 147). Damit werden auf verschiedene Weise Algebren  $A$  charakterisiert, die Teilalgebren von  $C(X)$  mit kompaktem Hausdorff- $X$  sind, z. B.: Ist (4)  $e \in A$ , so ist  $A$  genau dann isomorph zu einer gleichmäßig dichten Teilalgebra von  $C(X)$  mit (nicht notwendig eindeutigem) kompaktem  $X$ , wenn es ein  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_A$  gibt mit  $\cap \mathfrak{S} = (0)$ , für das  $(M(f) : M \in \mathfrak{S})$  beschränkt ist für jedes  $f \in A$ . (3) gilt also mit kompaktem  $X$  genau dann, wenn noch  $S(f) := (M(f) : M \in \mathfrak{R}_A)$  beschränkt ist für alle  $f \in A$ . (5) Ist  $S(f)$  stets abgeschlossen  $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_A$ , so gilt das „dann“ von (3) mit kompaktem  $X$ . Die damit nun hergeleiteten Charakterisierungen der vollen  $C(X)$  sind alle vom folgenden Typ: (6) Eine Algebra ist genau dann isomorph einem  $C(X)$  über einem  $Q$ -Raum  $X$  (der dann eindeutig ist), falls  $e \in A$ ,  $\cap \mathfrak{R}_A = (0)$ , und  $A$  zu jeder  $R_u$ -Erweiterung von  $A$  isomorph ist. Eine reelle Algebra  $B$  heißt dabei  $R_u$ -Erweiterung von  $A$ , falls  $e \in B$ ,  $\cap \mathfrak{R}_B = (0)$ , und falls  $A$  so in  $B$  isomorph eingebettet werden kann, daß die Zuordnung  $M \rightarrow M \cap A$  eine Homöomorphie von  $\mathfrak{R}_B$  auf  $\mathfrak{R}_A$  bezüglich ihrer schwachen Topologien ist. (Die Beschränkung auf  $Q$ -Räume unter den vollständig regulären ist dabei zulässig.)  $C(X)$  mit kompaktem  $X$  werden ähnlich gekennzeichnet. Nur angedeutet sind zum Schluß die Beweise für zu (6) analoge Charakterisierungen von Vektorverbänden oder Algebren mit Verbandsstruktur. Beispiele zu (2)–(6) erläutern die hier möglichen Verhältnisse und zeigen, daß diese Sätze (in gewissen Richtungen) nicht verbessert werden können.

H. Günzler.

**Onuchic, Nelson:** On two properties of  $P$ -spaces. *Portugaliae Math.* 16, 37–39 (1957).

Man nennt einen topologischen Raum  $E$  einen  $P$ -Raum, wenn  $E$  vollständig regulär und jedes Primideal im Ring  $C(E, R)$  maximal ist.  $E$  ist genau dann ein  $P$ -Raum, wenn  $E$  vollständig regulär ist und für jede (punktweise) konvergente Folge von Funktionen aus  $C(E, R)$  die Limesfunktion stetig ist. G. Nöbeling.

**Wang, Shu-tang:** On a theorem for the uniform spaces. *Science Record*, n. Ser. 2, 338–342 (1958).

Sei  $R$  ein uniformer Raum mit einer uniformen Basis der Mächtigkeit  $u$ . Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent: 1.  $R$  hat ein Gewicht  $\leq u$  (d. h.  $R$  hat eine Topologiebasis einer Mächtigkeit  $\leq u$ ); 2. Für jede Menge  $S \subseteq R$  einer Mächtigkeit  $> u$  existiert in  $R$  ein Punkt  $p$  mit der Eigenschaft, daß jede Umgebung von  $p$  mindestens zwei Punkte von  $S$  enthält. — Dieser Satz korrigiert zwei Behauptungen von I. Gál (dies. Zbl. 79, 386).

G. Nöbeling.

**Vries, H. de:** A sum theorem for metrizable spaces. *Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A* 61, 184–185 (1958).

The following theorem is proved: if a topological space is the union of a locally finite family of closed metrizable subsets, then the space is itself metrizable. The proof is based upon Nagata-Smirnov's metrizability condition (a regular topological space is metrizable if and only if it has a  $\sigma$ -locally finite base), as well as upon

another condition given by Smirnov (a locally metrizable paracompact Hausdorff space is metrizable).  
*M. Dolcher.*

**Nagata, Jun-iti:** On imbedding a metric space in a product of one-dimensional spaces. Proc. Japan Acad. **33**, 445—449 (1957).

Jeder metrische Raum kann topologisch in ein Produkt abzählbar vieler eindimensionaler, metrischer Räume eingebettet werden.  
*G. Nöbeling.*

**Kuratowski, K.:** Sur les composantes de l'espace des transformations d'un espace localement compact en un rétracte de voisinage. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 565—571, russ. Zusammenfassg. XLVI (1958).

Es seien  $X$ ,  $Y$  metrische separable Räume,  $X$  lokal kompakt,  $Y$  ein Umgebungsretrakt; man betrachte den Raum  $Y^X$  mit der sog. stetigen Konvergenz ( $f_k \rightarrow f$  bedeutet, daß aus  $x_k \rightarrow x$  immer  $f_k(x_k) \rightarrow f(x)$  folgt) und bezeichne mit  $\mathcal{Q}(Y^X)$  den Raum aller Komponenten von  $Y^X$  (sind also  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma$  Komponenten von  $Y^X$ , so setzt man  $\Gamma_k \rightarrow \Gamma$ , falls es  $f_k \in \Gamma_k$ ,  $f \in \Gamma$  mit  $f_k \rightarrow f$  gibt). Es wird (unter anderen Ergebnissen) bewiesen, daß  $\mathcal{Q}(Y^X)$  metrisierbar, separabel, vollständig (in einer natürlichen Metrik) und null-dimensional ist.  
*M. Katětov.*

**Stewart, T. E.:** On  $R$ -equivalent spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 460—462 (1958).

The question, whether for topological spaces which are ANR (absolute neighbourhood retracts) the  $R$ -equivalence (i. e., the homeomorphism of each of them to a retract of the other) has as a consequence the isomorphism of the homotopy groups, has been raised by K. Borsuk. Here, the question is answered in the negative, by an example of two  $R$ -equivalent ANR spaces, whose fundamental groups are not isomorphic. The example seems to the reviewer to attain a maximum of simplicity.  
*M. Dolcher.*

**Vopěnka, Peter:** On the dimension of compact spaces. Czechosl. math. J. **8** (83), 319—327, engl. Zusammenfassg. 327 (1958) [Russisch].

Es wird für beliebige  $m, n = 1, 2, \dots, \infty, m \leq n$ , bewiesen, daß es kompakte Räume  $X, Y$  mit  $\dim X = m$ ,  $\text{ind } X = n$ ,  $\dim Y = m$ ,  $\text{Ind } Y = n$  gibt (die Existenz von einem kompakten  $X$  mit  $\dim X = 1$ ,  $\text{ind } X = 2$  ist aus den Arbeiten von A. Lunc, dies. Zbl. **35**, 387, und O. Lukocievskij, dies. Zbl. **33**, 23, bekannt.) Dieser Satz wird aus der folgenden Behauptung abgeleitet: ist  $X$  kompakt,  $\dim X > 0$ , so gibt es einen kompakten Raum  $T \supset X$  mit den folgenden Eigenschaften: (1)  $\dim T = \dim X$ ,  $\text{Ind } T \leq 2 \text{ Ind } X + 1$ , (2) es gibt einen Punkt  $t \in T$  so, daß die Begrenzung jeder genügend kleinen Umgebung von  $t$  einen mit  $X$  homöomorphen Raum enthält.  
*M. Katětov.*

**Katětov, Miroslav:** On the relation between the metric and topological dimension. Czechosl. math. J. **8** (83), 163—165, engl. Zusammenfassg. 166 (1958) [Russisch].

Ein metrischer Raum  $R$  hat die metrische Dimension  $n = \mu \dim R$ , wenn  $n$  die kleinste ganze Zahl von der Eigenschaft ist, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine offene  $\varepsilon$ -Überdeckung von  $R$  gibt, deren Ordnung  $\leq n + 1$  ist. Der Raum  $R$  hat die topologische Dimension  $m = \dim R$ , wenn  $m$  die kleinste ganze Zahl von der Eigenschaft ist, daß in jede endliche offene Überdeckung von  $R$  eine offene Überdeckung von einer Ordnung  $\leq m + 1$  einbeschrieben werden kann. Es wird bewiesen:  $\mu \dim R \leq \dim R \leq 2 \mu \dim R$ .  
*F. Albrecht.*

**Cohen, Haskell:** A correction. Duke math. J. **25**, 601 (1958).

Berichtigung eines Irrtums in der in diesem Zbl. **58**, 166 besprochenen Arbeit, der jedoch das Ergebnis nicht beeinflußt.

**Anderson, R. D.:** A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity. Ann. of Math., II. Ser. **67**, 313—324 (1958).

**Anderson, R. D.:** One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem. Ann. of Math., II. Ser. **68**, 1—16 (1958).

Sei  $\mathfrak{K}$  die Klasse aller eindimensionalen, kompakten, metrischen, lokal zusammenhängenden Kontinuen  $K$  (stetige Streckenbilder) und  $\mathfrak{M}$  die Klasse aller  $K \in \mathfrak{K}$  ohne lokale Zerschneidungspunkte ( $p \in K$  heißt lokaler Zerschneidungspunkt, wenn eine zusammenhängende, offene Menge  $M \subseteq K$  existiert, für welche  $M - (p)$  nicht zusammenhängend ist). Die Universalkurve  $U$  von K. Menger wird folgendermaßen (bis auf Homöomorphie) charakterisiert:  $U$  ist Element von  $\mathfrak{M}$  und enthält keine offene Menge, welche in die Ebene topologisch eingebettet werden kann. (Es wird noch eine zweite Kennzeichnung von  $U$  angegeben.) Die Kreislinie und  $U$  sind (bis auf Homöomorphie) die einzigen homogenen Elemente von  $\mathfrak{K}$  (ein Kontinuum  $K$  heißt homogen, wenn für je zwei Punkte  $p$  und  $q$  von  $K$  eine Homöomorphie von  $K$  auf sich existiert, welche  $p$  in  $q$  überführt).

G. Nöbeling.

**Knaster, B. et A. Lelek: Coutures et tapis.** Fundamenta Math. 45, 186—199 (1958).

Verff. nennen eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine couture von  $X$ , wenn für jedes  $y \in Y$  höchstens zwei  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  existieren; sie nennen tapis jedes eindimensionale, lokal zusammenhängende Kontinuum der Ebene  $E^2$  oder der 2-Sphäre  $S^2$ , dessen Komplement Vereinigung abzählbar unendlich vieler offener Mengen ist, deren Begrenzungen einfach geschlossene Kurven und paarweise fremd sind. Jeder Punkt eines tapis hat die Verzweigungsordnung  $2^\infty$  im Sinne von K. Menger; in der  $E^2$  existiert ein tapis, welches eine couture der Strecke ist; das Quadrat und die  $S^2$  können als couture eines beliebigen tapis dargestellt werden.

G. Nöbeling.

**Lesieur, L.: Théorie algébrique de l'orientation et de la mesure des simplexes.** J. Math. pur. appl., IX. Sér. 37 (offre en hommage à M. Fréchet), 245—264 (1958).

Let  $E$  be a point space in which linear dependence is defined and the Steinitz exchange theorem is valid. A simplex  $S$  is a set of  $n$  independent points where  $n$  is maximal in  $E$ .  $q$  is a function from the ordered pairs of simplexes into the group  $G = (\pm 1)$ . In order to determine an orientation of the simplexes,  $q$  must satisfy certain simple axioms (example:  $q(S_1, S_2) \cdot q(S_2, S_1) = 1$ ). The author shows that one can construct such a function  $q$ , as soon as  $q$  is known on those pairs of simplexes that have their first  $n - 1$  points in common. He also notes that one can replace  $(\pm 1)$  by any other group  $G$ , replacing  $-1$  by a center element of order 2 (or by the identity).

A. Cronheim.

**Łuszczyński, Z.: Sur le plongement  $k$ -indépendant d'espaces Euclidiens.** Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 375—378, russ. Zusammenfassg. XXXI (1958).

Seien  $k, n = 1, 2, 3, \dots$ . Dann kann der Euklidische  $E^n$  topologisch abgebildet werden auf eine Menge  $A$  eines  $E^m$  mit  $m \leq \frac{1}{2}(k+1)[(k+2)(n-1)+2]$  derart, daß je  $k+2$  Punkte von  $A$  linear unabhängig sind. (Lösung eines Problems von K. Borsuk, dies. Zbl. 79, 388.)

G. Nöbeling.

**Čogošvili, G. S.: Zur Verallgemeinerung des Dualitätssatzes von Steenrod.** Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 21, 641—648 (1958) [Russisch].

Die Theorie der Homologieaggregate (dies. Zbl. 79, 390) wird benutzt, um die Isomorphie  $H_r^m(A) \approx H_A^m(R^n - A)$  nachzuweisen. Hier ist  $A$  eine beliebige Teilmenge eines  $R^n$ ,  $H_r^n$  die Homologiegruppe, die auf den regulären Zyklen basiert, und  $H_A^m$  die Limesgruppe,  $\lim \{H_A^m(O_\alpha)\}$ , wobei  $O_\alpha \supset B = R^n - A$  eine offene Umgebung von  $R^n - A$  ist (basierend auf unendlichen Zyklen). Dieser Isomorphismus führt zu einer Verallgemeinerung des Steenrodschen Dualitätssatzes (dies. Zbl. 25, 234) von kompakten auf allgemeine Teilmengen des  $R^n$ . Den größten Teil der Arbeit nimmt die Behandlung der Homologiesysteme ein. Jedem topologischen Raum  $R$  wird eine Menge von Homologie- und Kohomologiegruppen  $\{H_{\mathcal{A}r}^r(R, D)\}$  bzw.  $\{H_{\mathcal{A}r}^r(R, C)\}$  für festes  $r$  und diskretes bzw. kompaktes  $D, C$  zugeordnet. Es ist das die unmittelbare Anwendung der Theorie der Homologieaggregate.

F. W. Bauer.



Chern, S. S., F. Hirzebruch and J.-P. Serre: On the index of a fibered manifold. Proc. Amer. math. Soc. 8, 587—596 (1957).

For a compact connected oriented manifold  $M$  of dimension  $4k$  the cohomology ring  $H^*(M)$  on real coefficients of  $M$  determines with respect to the given orientation of  $M$  an integer  $\tau(M)$  called the index of  $M$  (cf. e. g. F. Hirzebruch, Eine neue topologische Methode in der algebraischen Geometrie, this Zbl. 70, 163). Theorem. Given a fiber bundle of which the fiber space  $E$ , the base  $B$  and the typical fiber  $F$  are all compact connected oriented manifolds of dimensions equal to multiples of 4, then the indices of  $E$ ,  $B$  and  $F$  supposed oriented coherently, have the relation  $\tau(E) = \tau(F) \tau(B)$ , if the fundamental group  $\pi_1(B)$  acts trivially on the cohomology ring  $H^*(F)$  of  $F$ . Sketch of proof. Let  $(E_r, d_r)$  be the spectral sequence on real coefficients associated to the bundle  $E \rightarrow B$  with limit ring  $E_\infty$ . Then (1)  $E_2 = H^*(B) \otimes H^*(F)$ , (2)  $E_{r+1} = H^*(E_r, d_r)$ , (3)  $E_r = E_\infty$  for  $r$  sufficiently large. (4)  $E_\infty =$  graded ring of  $H^*(E)$  suitably filtrated. Each of the rings occurring above is now a graded ring which is called by the authors a Poincaré ring with a definite generator in the highest dimension, as an abstract version of the cohomology ring of a compact connected oriented manifold  $M$ . To such a Poincaré ring  $A$  an index  $\tau(A)$  may then be defined which corresponds to  $\tau(M)$  if  $\dim M \equiv 0 \pmod 4$  and  $= 0$  if  $\dim M \not\equiv 0 \pmod 4$ . Suppose  $\dim E = 4k$ , then by purely algebraic considerations it follows from (1) — (4) respectively: (1')  $\tau(E_2) = \tau(B) \tau(F)$ , (2')  $\tau(E_{r+1}) = \tau(E_r)$ , (3')  $\tau(E_r) = \tau(E_\infty)$  for  $r$  large, and (4')  $\tau(E_\infty) = \tau(E)$ . The theorem is an immediate consequence of the relations (1')—(4'). Wu Wen-tsun.

Adams, J. F.: On the structure and applications of the Steenrod algebra. Commentarii math. Helvet. 32, 180—214 (1958).

The author develops a spectral sequence having as  $E_2$  terms the cohomology of the mod  $p$  Steenrod algebra and leading to the  $p$ -components of the stable homotopy groups of spheres. The structure of the mod  $p$  Steenrod algebra itself is then determined; using this structure in the special case  $p = 2$ , the spectral sequence developed yields the theorems (1): If  $\pi_{2n-1}(S^n)$  and  $\pi_{4n-1}(S^{2n})$  both contain elements of Hopf invariant one, then  $n \leq 4$  [Reviewer's Remark: Subsequent work of the author, among others, has shown that, in fact, elements of Hopf invariant one in  $\pi_{2n-1}(S^n)$  exist only for  $n = 2, 4, 8$ ]. (2): If  $\text{Sq}^{16}$  is considered as a cohomology operation of the second kind, it has a non-trivial decomposition, so that there is no complex  $S^n \cup E^{n-16}$  in which  $\text{Sq}^{16} \neq 0$ . — Let  $X$  be a space with finitely generated homologies,  $p$  a fixed prime,  $A$  the graded mod  $p$  Steenrod algebra, and  $H^* = H^*(X; Z_p)$  the augmented singular cohomology of  $X$  over  $Z_p$ . Regarding  $Z_p$  as a trivial  $A$ -module, and taking  $\text{Ext}_A^{s,t}(H^*, Z_p)$  with  $s =$  grading of  $\text{Ext}_A^s$ ,  $t =$  grading of  $H^t$ , a spectral sequence  $\{E_r^{s,t}, d_r^{s,t}\}$  is developed with the properties: (1):  $E_r^{s,t} = 0$  if  $s < 0$  or  $t < s$ , (2):  $d_r$  has bidegree  $(r, r-1)$ , (3):  $E_2^{s,t} \approx \text{Ext}_A^{s,t}(H^*, Z_p)$ , (4):  $E_r^{s,t}$  can be taken as a subgroup of  $E_l^{s,t}$  if  $s < l < r \leq \infty$ , (5): letting  $S^n X$  be the  $n^{\text{th}}$  iterated suspension of  $X$ , there is a filtration  $B^{s,m,s}$  of  $B^{0,m} = \text{Dir}_n \text{Lim } \pi_{n+m}(S^n X)$  with  $E_\infty^{s,t} = \bigcap_{s < r < \infty} E_r^{s,t} \approx B^{s,t} / B^{s-1,t+1}$ . Intuitively, this spectral sequence is obtained as the homotopy exact couple of a sequence of spaces  $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$  such that  $Y_0$  is an iterated suspension of  $X$  and  $\sum_s H^*(Y_s; Y_{s+1})$  is an  $A$ -free resolution of  $H^*$ . In the particular case that  $X = S^0$ , the 0-sphere,  $B^{0,m}$  becomes the stable homotopy group of the  $m$ -stem, and  $E_2 = H^*(A; Z_p)$ , called the cohomology of the mod  $p$  Steenrod algebra by the author, and written  $H^*(A)$ . Furthermore, in this case, associative products can be defined in  $\{E_r^{s,t}\}$  which are, up to sign, the cup product in  $H^*(A)$ , and in  $E_\infty$  are obtained by passing to quotients from the composition product  $B^{0,m} \cdot B^{0,m'} \rightarrow B^{0,m+m'}$ . To obtain more information about the  $E_2$  term (and hence the spectral sequence) the author studies the mod  $p$  Steen-

rod algebra itself. He gives a very neat and detailed investigation, showing essentially that there is a descending sequence of subalgebras  $A = A^1 \supset A^2 \supset \dots$  with  $\bigcap_r A^r$  having the unit as base,  $A^r$  a normal subalgebra of  $A^s$ , for  $r > s$ , and each quotient algebra  $A^r/A^{r+1}$  a tensor product of an exterior algebra over  $Z_p$  with a truncated divided polynomial algebra over  $Z_p$  for  $p > 2$ , while for  $p = 2$ , each is simply a divided polynomial algebra. The author then considers the special case  $p = 2$ . Letting  $H^s(A) = \sum_t H^{s,t}(A; Z_2)$  it is shown that  $H^1(A)$  has as  $Z_2$ -base elements  $h_m, m = 0, 1, 2, \dots$ , of  $t$ -degree  $2^m$ ; the spectral sequence developed is then applied to show that  $h_m \in E_\infty^{1,2^m} \subset E_2^{1,2^m}$  if and only if there is an element of Hopf invariant one in  $\pi_{2n-1}(S^n)$  for  $n = 2^m, m \neq 0$ . By his structure results, the cohomologies  $H^*(A^r/A^{r+1}; Z_2)$  are well-known; using the spectral sequence relating the cohomologies of an algebra  $A^1/A^{r+1}$ , a normal subalgebra  $A^r/A^{r+1}$  and the quotient algebra  $A^1/A^r$ , and proceeding inductively from  $H^*(A^1/A^2; Z_2)$ , the author determines all the relations between the products  $h_i h_j \in H^2(A)$  and  $h_i h_j h_k \in H^3(A)$ ; these are  $h_i h_{i+1} = 0, h_i h_{i+1} h_j = h_i (h_{i+2})^2 = 0, (h_i)^2 h_{i+2} = (h_{i+1})^3$ . The theorems above are now algebraic consequences of this last result.

*J. Dugundji.*

## Theoretische Physik.

### Mechanik:

**Matschinski, Matthias:** *Mécanique correspondant aux équations fonctionnelles.* C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 768—771 (1959).

Verf. „verallgemeinert“ das Newtonsche Axiom „Kraft = Masse mal Beschleunigung“ auf Vorgänge, deren Augenblickszustand durch die Vorgeschichte (oder auch die spätere Entwicklung) beeinflusst wird. Beschreibt  $\theta(t)$  — mittelbar oder unmittelbar — den zeitlichen Verlauf eines solchen Prozesses, so sind alle Zustandsgrößen  $P$  gewisse Funktionale (Anm. d. Ref.: Besser „Transformationen“ oder „Operatoren“) der Gestalt  $P = \Phi(\theta(\tau), t)$ . Mittels eines Proportionalitätsfaktors  $c$  (verallg. Masse) und der sog. Funktionalableitungen (im Sinne von Volterra und Fréchet lineare Funktionale, welche mit den gegebenen in der Umgebung einer Argumentfunktion  $\theta$  bis auf quadratische und höhere Glieder in den Variationen  $\delta\theta$  von  $\theta$  übereinstimmen) wird nun die „verallgemeinerte Kraft“  $(1) f = c P''$  definiert. Verf. errechnet  $P$  auf Grund spezieller Ansätze für  $f$ : (a)  $f \equiv 0$ ; (b)  $f =$  Funktion der unabhängigen Variablen; (c)  $f =$  Funktional der unabhängigen Variablen; (d)  $f =$  lineare (s) Funktion(al) von  $P$ . Es bleibt offen, ob der beschriebene Formalismus tiefere Bedeutung hat.

*H. Lippmann.*

● **Proceedings of the Second Congress on Theoretical and Applied Mechanics.** New Delhi 1956, October 15—16. Kharagpur: Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics, Indian Institute of Technology 1957. XVI, 270 p.

„The Proceedings contains thirty papers read before the congress and they deal with elasticity, plasticity, rheology, fluid mechanics, ballistics, vibrations, thermo-dynamics, statistics and mathematical physics.“

Die Beiträge werden, soweit sie für dieses Zbl. von Interesse sind, einzeln angezeigt werden.

● **Bürgermeister, Gustav**, unter Mitwirkung von **Herbert Steup**: **Stabilitätstheorie**, mit Erläuterungen zu DIN 4114. I. Stabilitätsproblem, Spannungsproblem, Verzweigungslasten, Traglasten, Gleichgewichtsmethode, Energetische Methode, Biegedrillknickung, Kippung, Näherungsmethoden. Berlin: Akademie-Verlag 1957. XII, 407 S. DM 35,50.

Viel Stoff und gründliches Bemühen kennzeichnen das Buch, das allerdings wenig übersichtlich ist, da es Theoretisches und Praktisches, Wichtiges und Unwichtiges untereinander verzahnt: Die Darstellung der für den Baupraktiker wichtigen Methoden und Ergebnisse wird vermengt mit „tiefer gehenden Betrachtungen“, z. B. über die endlichen Verformungen oder die „umfassende“ Herleitung der energetischen Stabilitäts-Kriterien, und das erschwert (auch wenn man bereit ist, über so schmerz-

hafte Formulierungen wie „damit die Zweckerfüllung des Bauwerkes gewährleistet wird“ hinwegzulesen) das Studium des Werkes ungemein. Dabei sind die Stab-Probleme wirklich umfassend dargestellt (Stabsysteme und Flächen-Tragwerke soll ein zweiter Band behandeln): in Kap. 2: der Druckstab, elastisch, ohne und mit Biegemomenten „von Haus aus“, über die plastische Knickung bis zur Traglasten-ermittlung; in Kap. 4: die Näherungsverfahren von Vianello und Ritz bis zu den Integralgleichungen; in Kap. 5: der mehrteilige Druckstab (bei dem die Schub-verformung berücksichtigt werden muß); in Kap. 6: (80 Seiten) Drillknicken und Kippen; in einem Anhang schließlich 19 gut ausgewählte Beispiele, die bis zu Zahlen-werten durchgerechnet sind. — Daß das Werk nicht nur von den zahlreichen Original-arbeiten zur Stabilitätstheorie (deren über 350 aufgeführt werden) sondern auch von älteren Büchern, z. B. von Pflügers „Stabilitätsproblemen“ (s. dies. Zbl. 36, 395) Gebrauch macht, möchten wir ihm nicht zum Vorwurf machen: Originalität um jeden Preis wäre keine sinnvolle Forderung einem Werk gegenüber, dessen Absicht es in erster Linie ist, dem Praktiker bei der Anwendung von DIN 4114 zu helfen.

*K. Marguerre.*

● **Föppl, Ludwig: Elementare Mechanik vom höheren Standpunkt.** München: R. Oldenbourg 1959. 174 S.; 71 Bild., 8 Bildtaf. DM 20,—.

Verf. skizziert in seinem schönen Buch zunächst die geschichtliche Entwicklung der Mechanik, wobei er auch einige biographische Angaben über die Männer macht, denen die Grundlagen dieser Wissenschaft und damit unserer Naturwissen-schaft überhaupt zu verdanken sind. Sehr belebt wird die Darstellung durch die zahlreichen Beispiele, an denen die Anwendung der Grundideen auf konkrete Fälle erläutert wird. Stofflich führt Verf. den Leser bis zum Hamiltonschen Prinzip und den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art; die eigentliche analytische Mechanik (Hamilton-Jacobische Theorie) wird nicht besprochen, da sie nicht zur elementaren Mechanik gehört. Dagegen wird die spezielle Relativitätstheorie kurz behandelt und auf die allgemeine wenigstens hingewiesen. Das Werk ist schlicht geschrieben und kann auch von einem Studenten verstanden werden, der einige Semester Mecha-nik gehört hat.

*A. Weigand.*

● **Wagner, Friedrich G.: Mechanik.** Essen: Verlag W. Girardet 1959. 220 S. DM 17,80.

Der handliche, in Taschenformat herausgegebene flexible Plastikband über Mechanik nimmt zwischen einer reinen Formelsammlung und einem Lehrbuch eine Mittelstellung ein, da man neben den einzelnen Formeln Hinweise und Erläuterungen zu dem speziellen Fachgebiet findet. Diese tragen wesentlich zum Verständnis der prinzipiellen Zusammenhänge, die im Grunde genommen physikalischer Natur sind, und zum richtigen Anwenden der Formeln bei. Stofflich werden neben den Grund-begriffen der Mechanik, Mechanik des materiellen Punktes, Mechanik des starren Körpers (Statik, Dynamik, Kinematik), Mechanik unelastischer Flüssigkeiten, Mechanik elastischer Flüssigkeiten und Ähnlichkeitsmechanik behandelt. Die Elasto-mechanik ist in diesem Buch nicht aufgenommen, da dieser Stoff wohl dem vom gleichen Verf. herausgegebenen Taschenbuch über Festigkeitslehre (Verlag W. Girar-det 1959) vorbehalten ist. Einige Tafeln mit Umrechnungstabellen und mit Ta-bellen über verschiedene Materialgrößen dürften die Benutzung dieses Taschen-buches noch empfehlenswerter machen. Da Verf. auch von Fall zu Fall die vektorielle Schreibweise verwendet, ist der Anschaulichkeit der Problematik wesentlich Genüge ge-tan worden. Ferner sind offenbar fast alle Formeln Größengleichungen, so daß man bei der Wahl der Maßeinheiten keiner Beschränkung unterworfen ist. Es hätte sich hier sicherlich als nützlich erwiesen, an Stelle von 1 kg als Krafteinheit 1 kp zu benutzen, so, wie es sich in der Physik von Jahr zu Jahr mehr eingebürgert hat. *H. Schwieger.*

● **Gotusso, Guido: Sulla tenacia dei sistemi meccanici in movimento.** Atti Accad. naz. Lincei. Rend. (Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 693—700 (1958).



L'A. se propose de mettre en évidence que le problème classique d'un gyroscope en rotation rapide n'est qu'un cas particulier de phénomènes analogues, qu'il étudie schématiquement dans le cadre général de la mécanique analytique et en utilisant la notation tensorielle. Un système mécanique  $S$  soumis à de liaisons holonomes ou non-holonomes, indépendantes du temps, peut présenter une structure impliquant une grande stabilité du mouvement. Cela veut dire qu'il faudra appliquer de très grandes forces, afin d'obtenir des variations finies des caractéristiques cinétiques de  $S$ . Il résulte d'une analyse, utilisant tant les équations de Lagrange que les équations de Maggi, que cette stabilité de  $S$  dépend, pour une structure convenable de  $S$  et seulement alors, de l'ordre de grandeur relatif de certaines expressions analytiques, résultant du calcul et qui multiplient les variations des caractéristiques cinétiques de  $S$ . Il est essentiel, afin de pouvoir comparer les ordres de grandeur respectifs de réduire au préalable toutes les caractéristiques cinétiques de  $S$  à la même dimension. On étudie finalement l'augmentation nécessaire des forces appliquées à  $S$ , afin de réaliser l'augmentation des caractéristiques cinétiques de quantités finies, aux dérivées finies. Une application à l'effet gyroscopique classique utilise le procédé employé.

*A. Froda.*

**Haimovici, Adolf:** Le mouvement d'un point de masse héréditaire. Acad. Republ. popul. Române, Fil. Iași, Studii Cerc. ști. 2, Nr. 3/4, 22—34, russ. und französ. Zusammenfassg. 34—35 (1951) [Rumänisch].

L'A. reprend l'équation donnée, en 1897, par I. V. Meščerskiĭ pour les mouvements des mobiles à masse variable. Sous des hypothèses appropriées, on étudie une équation fonctionnelle, où intervient l'hérédité et que l'on étudie, suivant les méthodes de Volterra.

*A. Froda.*

**Raven, Francis H.:** Velocity and acceleration analysis of plane and space mechanisms by means of independent-position equations. J. appl. Mech. 25, 1—6 (1958).

Es wird ein Programm zur zweckmäßigen Berechnung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei ebenen und räumlichen Mechanismen aufgestellt und an mehreren Beispielen erläutert. Die Lagevektoren der betrachteten Punkte werden dabei als komplexe Zahlen der Form  $r e^{i\varphi}$  geschrieben.

*W. Meyer-König.*

**Kurth, Rudolf:** Die Zustandsgleichung der klassischen statistischen Mechanik. Arch. rat. Mech. Analysis 2, 32—40 (1958).

The author discusses generalisations of the equation of state  $pV = NkT$ . Special attention is paid to direction-dependent pressures.

*P. T. Landsberg.*

**Pawlikowski, A. and W. Szczerówna:** On the canonical formalism for dynamical systems with constraints. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 759—763, russ. Zusammenfassg. LIX (1958).

Es wird der kanonische Formalismus der klassischen Mechanik für den Fall verallgemeinert, daß das betrachtete System, anstatt entsprechend der Zahl seiner Freiheitsgrade  $n$  durch  $n$  Koordinaten  $q_i$ , durch  $n + \nu$  Koordinaten  $q_i, Q_\alpha$  beschrieben wird. Die  $\nu$  Zusatzvariablen  $Q_\alpha$  genügen den Beschränkungsbedingungen  $Q_\alpha = \varphi_\alpha(q_i)$ , so daß die Zahl der Freiheitsgrade erhalten bleibt. Verff. zeigen, daß dieser Formalismus ein klassisches Analogon zu der quantenmechanischen Methode der kollektiven Variablen von Bohm-Pines und Migdal-Galitsky darstellt.

*S. Wolschke.*

**Grindei, I.:** Contributions à l'étude de l'intégration des équations du mouvement d'un système mécanique soumis à des liaisons non holonomes. An. ști. Univ. „Al. I. Cuza“ Iași, n. Ser., Sect. I, 4, Nr. 1, 81—90, russ. und französ. Zusammenfassg. 90 (1958) [Rumänisch].

L'A., seguendo l'ordine di idee dei suoi studi concernenti il problema dell'equivalenza dei sistemi meccanici non olonomi, stabilisce forma canonica generalizzata del sistema di equazioni del moto relativo alla dinamica ove valgono certi legami non olonomi, risalendo in fine alle condizioni necessarie e sufficienti affinché il sistema

canonico generalizzato sia riducibile alla ben nota forma canonica, valida nella dinamica dei sistemi olonomi, cui si applica il metodo d'integrazione di Hamilton-Jacobi. *D. J. Mangeron.*

**Gumerov, Š. A.:** Über ein Beispiel für die Anwendbarkeit der Hamilton-Jacobischen Methode auf anholonome konservative Systeme. Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1958, Nr. 11, 5—8 (1958) [Russisch].

**I. S. Aržanyč** (ce Zbl. 48, 175) a établi les conditions d'applicabilité aux systèmes conservatifs non holonomes de la méthode d'Hamilton-Jacobi. L'exemple suivant où  $L = \frac{1}{2} [m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2)] + b \varphi + c \theta$  est le potentiel cinétique d'un système et  $\omega_1 \equiv \delta x - a \cos \varphi \delta \theta = 0$ ,  $\omega_2 \equiv \delta y + a \sin \varphi \delta \theta = 0$ ,  $a = \text{const}$ , correspondent à ses liaisons, développé par l'A., montre l'existence de tels systèmes, susceptibles d'être étudiés par la méthode potentielle. *D. J. Mangeron.*

**Garfinkel, Boris:** On the motion of a simple pendulum. Quart. appl. Math. 16, 192—196 (1958).

When the tension of the flexible and inextensible cord of a simple pendulum vanishes the particle passes from a circular to a parabolic trajectory. The number and nature of such transitions are related to the initial energy. *M. M. Peixoto.*

**Kel'zon, A. S.:** On the motion of a point on a pursuit curve. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 43—47, engl. Zusammenfassg. 47 (1957) [Russisch].

L'A., seguendo l'ordine di idee concernente il classico problema relativo alla curva di inseguimento, stabilisce alcune forme di equazioni del moto tanto per il problema diretto che per quello inverso, soffermandosi in particolare su quelle spettanti al sistema di coordinate relativo al bersaglio. *D. J. Mangeron.*

**Marsicano, F. R.:** Über die Gleichungen der Satellitenbewegung. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 214—216 (1958) [Spanisch].

In der von Hill aufgestellten Theorie der Bewegung des Mondes wird die Bahn der Erde um die Sonne als kreisförmig vorausgesetzt. Verf. stellt die Bewegungsgleichungen unter zusätzlicher Berücksichtigung derjenigen Glieder auf, die die Exzentrizität der Erdbahn in der ersten Potenz enthalten. Eine Integration der Gleichungen wird nicht versucht. *F. Schmeidler.*

● **Athen, Hermann:** Ballistik. 2. Neubearb. und erweit. Aufl. Heidelberg: Quelle & Meyer 1958. 258 S. DM 29,—.

Die im Inhalt erweiterte Neubearbeitung (1. Auflage s. dies. Zbl. 26, 161) faßt die Grundlagen der Ballistik, ihre hauptsächlichsten Sätze und wichtigsten Methoden in klarer, konzentrierter aber doch leicht verständlicher Weise auf nur 222 Seiten zusammen. Im Anschluß an die theoretischen Ableitungen werden die Anwendungen der Methoden stets durch instruktive Beispiele erläutert und, wo angängig, Fehlerabschätzungen durchgeführt. Mit Rücksicht auf den Umfang des Buches kann nur eine begrenzte, allerdings zweckmäßig getroffene Auswahl des so außerordentlich angewachsenen Stoffes geboten werden. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis und entsprechende Hinweise im Text gestatten jedoch, sich rasch über die wichtigsten Veröffentlichungen einzelner Spezialgebiete zu orientieren. Den Hauptanteil (186 S.) macht die Außenballistik zusammen mit der Schußtafelballistik und der Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Ballistik aus. Die Innenballistik ist auf 21 Seiten, die Bomben- einschl. der neu hinzugeetretenen Raketenballistik auf 11 Seiten beschränkt. Gegenüber der Erstauflage werden ausführlicher behandelt: der Luftwiderstand und seine theoretische Bestimmung auf der Grundlage der Strömungslehre und Gasdynamik, die Modellregeln, die Theorie der Stabilisierung einschließlich derjenigen der Pendelungen von Flügelgeschossen und dgl., ferner die Störungstheorie der Flugbahnen. Ref. vermißt die Erwähnung des heute in Frankreich an Stelle des Gesetzes von Gâvre verwendeten Gesetzes von Dupuis mit zwei Anpassungskoeffizienten. Im innenballistischen Teil wäre vielleicht ein kurzer Hinweis auf die auf einer Weiterführung der Charbonnierschen Theorie beruhenden, bequem zu handhaben-

den Tabellenwerke von Sugot und Winter sowie auf die heute von den englischen Innenballistikern verwendeten Methoden angebracht gewesen. Das Buch ist infolge seiner Kürze und Übersichtlichkeit ein geeigneter Leitfaden für alle, die sich in die Ballistik — insbesondere in die theoretische Außenballistik — einarbeiten wollen, es dürfte jedoch auch dem Kundigen als handliches Nachschlagewerk willkommen sein.

*J. Pohl.*

**Skljanski, A. L.: Sur la question de la classification des coïntonations dans le problème généralisé des trois corps.** Ukrain. mat. Žurn. 9, 66—80, französische Zusammenfassg. 80—81 (1957) [Russisch].

Verf. verallgemeinert die bezüglich des klassischen Dreikörperproblems für die Entfernung des an einem binären Zusammenstoße nicht teilnehmenden Massenpunktes von der invarianten Ebene von A. A. Markov gefundenen Ergebnisse, sowie die damit zusammenhängende Markovsche Klassifikation der binären Zusammenstöße auf das verallgemeinerte Dreikörperproblem mit beliebigem holomorphen radial-symmetrischen Anziehungs- oder Abstoßungsgesetz. Insbesondere wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß alle binären Zusammenstöße in der invarianten Ebene stattfinden müssen.

*I. Földes.*

**Brearely, M. N. and B. A. Bolt: The dynamics of a bowl.** Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 351—363 (1958).

Das dynamische Verhalten eines axialsymmetrischen starren Körpers, der ohne zu gleiten auf deformierbarer Unterlage rollt, dient als Modell zur Beschreibung des englischen Bowlingspieles. Der Deformation der Rasenfläche wird angenähert Rechnung getragen, indem der Abstand  $c$  des Massenmittelpunktes  $G$  vom Mittelpunkt des Krümmungskreises im Berührungspunkt kleiner als der tatsächliche Wert angenommen wird. Die Koordinaten von  $G$  und die drei Eulerschen Winkel  $\theta, \Psi, \Phi$  sind durch eine holonome und zwei nichtholonome Bindungen verknüpft. Die Bewegungsgleichungen werden angenähert integriert, wobei über die Größenordnung der Koordinaten und ihrer Ableitungen Annahmen gemacht werden, die sich aus der Beobachtung ergaben ( $\theta$  klein,  $\theta/\Psi$  klein,  $\dot{\theta}, \dot{\Psi} \ll \dot{\Phi}$ , zumindest bis nahe zum Bewegungsendpunkt). Für  $c = 0$  ist die Bahngleichung von der Form  $s = q^{-1} e^{p\Psi} (1 - e^{-p\Psi})$  mit  $s$  Bogenlänge,  $\Psi$  Endkoordinate und  $p, q$  Parameter, die von dem Typus der „Kugel“ und von der Rasenbeschaffenheit abhängen. Der Winkel  $\Delta$ , um den die Bahn von der Geraden abweicht, ist unabhängig von der Geschwindigkeitskomponente in Richtung dieser Geraden. Die Übereinstimmung mit Meßwerten ist befriedigend.

*F. Selig.*

**Liu, Hsien-chih: Über den Einfluß des Seilgewichts auf die senkrecht herabfallende Bewegung einer Rolle sowie die Spannung des um den Umfang der Rolle geschlungenen Seiles.** Sci. Sinica 8, 19—47 (1959).

Während bislang beim Problem der „fallenden Rolle“ die Seilmasse vernachlässigt wurde, wird hier gezeigt, zu welchen Bewegungsgleichungen, Bewegungsabläufen und zu welchen Seilspannungen die genaue Behandlung des Problems unter Berücksichtigung der Seilmasse führt. Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten werden diskutiert. Auch werden einige Zahlenbeispiele durchgerechnet.

*W. Meyer zur Capellen.*

**Mangeron, D.: Über einige Eigenschaften der reduzierten Beschleunigungen beliebiger Ordnung.** Bul. Inst. Politehn. Iaşi, n. Ser. 3 (7), Nr. 1/2, 43—45, russ. und deutsche Zusammenfassg. 45—46 (1957) [Rumänisch].

Verf. gibt einige geometrische Sätze, die die ebene Bewegung eines starren Körpers betreffen.

*V. Vălcovici.*

**Myller, A.: Sur la construction d'une table.** Bull. Inst. Politehn. Iaşi, n. Ser. 3 (7), Nr. 1/2, 1—6, russ. und französ. Zusammenfassg. 6 (1957) [Rumänisch].

L'A. studia il problema della costruzione di una tavola ellittica treppiede scegliendovi la posizione dei piedi in modo che il centro di gravità del triangolo corris-



pondente coincida col centro dell'ellisse. Si fa cenno sull'utilizzazione pratica delle travole che godono di questa proprietà e si dà in fine una formula atta di costituire una giusta misura della loro stabilità.

*D. J. Mangeron.*

**Rionero, Salvatore:** Sul principio dell'effetto giroscopico. *Richerche Mat.* 7, 14—20 (1958).

Zur Berechnung der Bewegungen eines schnellen Kreisels verwendet man häufig Näherungsgleichungen, die — nach Stoppelli — auch für die Euler-Winkel, die die Lage des Kreisels bestimmen, Werte ergeben sollen, deren Fehler von der Größenordnung  $1/r_0$  ist, wenn  $r_0$  die Komponente der schnellen Eigendrehung des Kreisels um eine seiner stabilen Hauptträgheitsachsen ist. Verf. zeigt nun an einem speziell ausgewählten Beispiel ( $A = B = C$ ,  $M_x = M_z = 0$ ,  $M_y = \text{const}$ ), daß die exakten, aus den Eulerschen Kreiselmgleichungen gewonnenen Ausdrücke für die Komponenten  $p$  und  $q$  des Drehvektors nicht mit den aus den Näherungsformeln erhaltenen Werten übereinstimmen. Daraus läßt sich durch Abschätzen der Lösungen der Gleichungen für die Eulerschen Winkel zeigen, daß der Fehler der Lagebestimmung des Kreisels nicht von der Ordnung  $1/r_0$ , sondern größer ist.

*K. Magnus.*

**Toporova, V. A.:** Lösung des Problems der Drehung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt im Gorjačev-Čaplyginischen Falle in hyperelliptischen Funktionen. *Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR* 1958, Nr. 12, 9—13 (1958) [Russisch].

Gorjačev hat gezeigt, daß die Bewegungsgleichungen eines Kreisels durch Quadraturen gelöst werden können, wenn zwischen den Hauptträgheitsmomenten die Beziehung  $A = B = 4C$  besteht, wenn weiterhin der Schwerpunkt auf der  $X$ -Achse liegt und die Anfangsbedingungen so gewählt sind, daß die Impulskonstante verschwindet. Nachdem Čaplygin die Aufgabe auf hyperelliptische Integrale zurückführen konnte, zeigt Verf. nun, daß eine explizite Angabe der Komponenten der Drehgeschwindigkeit des Kreisels und der Richtung der Vertikale mit Hilfe hyperelliptischer Funktionen (Rosenhainsche Funktionen) möglich ist. Dieses Ergebnis wird durch geschickte Einführung neuer Veränderlicher und Überführung der Bewegungsgleichungen in eine kanonische Form erreicht. Die höchst komplizierten Endformeln lassen sich durch Reihen über Jacobische elliptische Funktionen ausdrücken.

*K. Magnus.*

**Weigand, A.:** Die gedämpfte homogene Schwingungskette. *Z. angew. Math. Mech.* 38, 28—39 (1958).

Es handelt sich im folgenden um eine homogene gedämpfte mechanische Schwingungskette, welche aus  $n - 2$  gleichen Massen ( $m$ ) besteht, die durch gleiche Federn ( $c, c_0 \neq c_n \neq c$ ) und gleiche Dämpfer ( $\varrho, \varrho_0 \neq \varrho_n \neq \varrho$ ) miteinander verbunden sind. An den Enden sind Zusatzmassen ( $m_1 \neq m_m \neq m$ ) angebracht. Die Bewegungsgleichung dieses Systems lautet

$$m \ddot{u}_k = c(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + \varrho(\dot{u}_{k+1} - 2\dot{u}_k + \dot{u}_{k-1}) + P_k(t),$$

wo  $k = 2, 3, \dots, n-1$ , mit zwei Randbedingungen für  $k = 1$  und  $k = n$ . Durch Einführung dimensionsloser Maßstäbe wird die Bewegungsgleichung mit Randbedingungen transformiert. Man betrachtet zunächst die freien Schwingungen  $P_k[\tau = (c/m)^{1/2}t] = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Der Ansatz  $u_k = \mathfrak{U}_k(\exp i p \tau)$ , wo  $p$  der Eigenwert ist ( $p = \lambda + i\delta$ ), führt auf ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Amplituden ( $\mathfrak{U}_k$ ). Dann wird mit Hilfe von  $p^2(1 + 2iDp)^{-1} = 2(1 - \cos \varphi)$  ein komplexer Winkel  $\varphi$  eingeführt, wobei  $D = \varrho/2\sqrt{cm}$ . Es gilt die Differenzengleichung  $-\mathfrak{U}_{k-1} + 2\cos \varphi \mathfrak{U}_k - \mathfrak{U}_{k+1} = 0$  mit der allgemeinen Lösung  $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{A} \cos k\varphi + \mathfrak{B} \sin k\varphi$ . Das Verschwinden der Determinante des Systems liefert die Frequenzgleichung, und die Randbedingungen geben die Konstanten ( $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ). Die Rechnung ist für den Sonderfall durchgeführt, daß der Winkel  $\varphi$  reell ist. Verf. betrachtet nur drei Spezialfälle: 1. die beiderseits gestützte homogene Kette, 2. die einseitig freie Kette und 3. die auf beiden Seiten freie Kette. Für sie werden geschlossene Aus-

drücke für die Eigenwerte und für die Ausschläge angegeben. Man betrachtet auch die erzwungenen Schwingungen bei harmonischer Erregung  $P_n = P_0 (\exp i \Omega t)$  auf die  $n$ -te Masse der an einem Ende freien homogenen Schwingungskette. Für die stationäre Lösung macht man also den Ansatz  $u_k = \mathfrak{U}_k (\exp i \eta \tau)$  und erhält für komplexe Amplituden das lineare Gleichungssystem. Für ein Sechsmassensystem wurden die Resonanzkurven bei Erregung durch eine harmonische Kraft ermittelt und in graphischen Darstellungen angegeben. Mit Hilfe der Laplace-Transformation läßt sich auch das Einschaltproblem einer einseitig gestützten homogenen Schwingungskette in geschlossener Form lösen. Bei der Lösung werden Differenzgleichungen und eine trigonometrische Darstellung der komplexen Eigenwerte verwendet. Für  $D = 0,1$  wurde der Einschaltvorgang eines Sechsmassensystems, der durch eine zur Zeit  $t = 0$  zu wirken beginnende konstante Kraft  $P_0$  verursacht wird, berechnet und graphisch dargestellt.

*D. Rašković.*

**Weigand, A.: Die homogene Schwingungskette mit innerer und äußerer Dämpfung.** Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 4, 19—24 (1958).

Wie in einer früheren Arbeit des Verf. (s. vorstehendes Referat) handelt es sich im folgenden um eine homogene gedämpfte Schwingungskette, welche aus  $n - 2$  gleichen Massen ( $m$ ) besteht, die durch gleiche Federn ( $c$ ) und gleiche Dämpfer (mit innerer Dämpfung,  $q^i$ ) miteinander verbunden sind. An den Enden sind Zusatzmassen ( $m_1 \neq m_n \neq m$ ,  $c_0 \neq c_n \neq c$ ,  $q_0^i \neq q_n^i \neq q^i$ ) angebracht. Außerdem wirkt auf jede Masse eine äußere dämpfende Kraft, die der Absolutgeschwindigkeit dieser Masse proportional ist ( $q^a$ ,  $q_0^a \neq q_n^a \neq q^a$ ). Wegen Schwierigkeiten geht Verf. zur Schwingungskette mit homogenem Kern über, indem er dimensionslose Maßstäbe einführt. Die freien Schwingungen für drei Sonderfälle werden betrachtet (die beiderseits freie, die einseitig gestützte und die beiderseits gestützte homogene Schwingungskette), und es werden geschlossene Ausdrücke für die komplexen Eigenwerte angegeben. Außerdem betrachtet man die erzwungenen Schwingungen bei harmonischer Erregung  $P_1(t) = P_0 (\exp i \Omega t)$ , wo  $\Omega$  die Kreisfrequenz der Kraft ist. Die Resonanzkurven eines Zehnmassensystems bei Unwuchterregung ( $D_a = 0$ ,  $D_i = 0,1$ ;  $D_a = 0,1$ ,  $D_i = 0$ ;  $D_a = D_i = 0$ , wo  $D_a$  und  $D_i$  die reduzierten Dämpfungskoeffizienten sind) werden berechnet und graphisch dargestellt. Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird auch das Einschaltproblem einer einseitig gestützten homogenen Kette in geschlossener Form gelöst. Der Einschaltvorgang eines Sechsmassensystems (mit  $D_a = 0$ ,  $D_i = 0,1$ ) infolge einer konstanten Kraft  $P_0$  wird berechnet.

*D. Rašković.*

**Katz, E. and A. D. de Pater: Stability of lateral oscillations of a railway vehicle.** Appl. sci. Research, A 7, 393—407 (1958).

Anknüpfend an eine frühere Arbeit von dePater (dies. Zbl. 77, 176) werden die dort begonnenen Stabilitätsuntersuchungen für seitliche Fahrzeugschwingungen eines vereinfachten Eisenbahnwagenmodells jetzt auf mehr analytischem Wege unter Beschränkung auf den wichtigsten Sonderfall (sog. Periodizität 1. Ordnung) fortgeführt. Die ausführlich diskutierten Ergebnisse stehen in guter Übereinstimmung mit praktischer Erfahrung.

*R. Zurmühl.*

**Paslay, P. R. und A. Slibar: Über Querschwingungen von gelenkten Anhängern.** Ingenieur-Arch. 26, 383—386 (1958).

Unter Zugrundelegen eines neueren Gesetzes für den Zusammenhang von Seitenkraft, Vertikallast und Schräglaufwinkel für Luftreifen auf einer Straßenoberfläche werden die Bewegungsgleichungen für Querschwingungen eines vereinfachten Anhängermodells aufgestellt. Aus der charakteristischen Gleichung ergeben sich bei vernachlässigter Dämpfung zwei Eigenfrequenzen in formelmäßiger Abhängigkeit von den charakteristischen Daten des Problems.

*R. Zurmühl.*

● **Umanskij, A. A.: Statik und Kinematik der Träger.** [Statika i kinematika ferm.] Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1957. 344 S. R. 13,10 [Russisch].

Das Buch befaßt sich mit der Ermittlung der inneren Kräfte und Verschiebungen in statisch bestimmten Tragsystemen aus gelenkig verbundenen Stäben mit und ohne Versteifung der einzelnen Felder durch Scheiben. Dabei handelt es sich vor allem um eine Verallgemeinerung der Berechnungsverfahren, welche sich auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und auf verschiedene Abbildungsverfahren räumlicher Kraftsysteme auf ebene Gebilde stützen. In den ersten zwei Abschnitten werden einige Fragen der Analyse und Synthese statisch bestimmter ebener Tragsysteme aus Stäben und Scheiben, sowie deren Berechnung dargelegt, während der dritte die Zerlegung der Raumkräfte in drei bzw. sechs Kräfte behandelt. Im vierten Abschnitt werden dann die Grundlagen der Motorrechnung gebracht, wobei vor allem auf die grundlegende Bedeutung des skalaren Motorenproduktes für die Baustatik hingewiesen wird. Im nächsten Kapitel wird eine Verallgemeinerung bekannter graphischer und grapho-analytischer Methoden der Motorrechnung durch die Einführung der Abbildungsmotoren gegeben, durch welche eine einheitliche Behandlung der Abbildungsverfahren von Mayor, v. Mises, Prager, Gorbunov und Dimentberg möglich ist. Das sechste Kapitel ist den Anwendungen auf räumliche Fachwerke gewidmet, wobei diese außer nach der üblichen Methode noch durch zwei polare Abbildungsverfahren auf ebene Scheibensysteme abgebildet werden können. Im letzten Kapitel wird zunächst die Bildung allgemeiner, statisch bestimmter Raumtragsysteme behandelt und dann die Berechnung solcher Systeme mit dünnen Versteifungswänden durch die früher entwickelten Abbildungsverfahren beschrieben. *A. Kuhelj.*

**Ku, Yi-ying: Simplification of rigid frame analysis.** Sci. Sinica 7, 871—884 (1958).

Verf. gibt eine Zusammenfassung früherer in chinesischer Sprache erschienener Arbeiten über ein auf der Cross-Methode basierendes Verfahren zur exakten Berechnung statisch unbestimmter Stabwerke. Das Verfahren läßt sich durch Einführen gewisser Näherungen vereinfachen. Für die durch Vernachlässigung der Steifigkeit entfernter Bauglieder entstehenden Fehler werden Schranken angegeben, die zu weiterer Vereinfachung des Vorgehens nützlich sind. Schließlich wird der Gebrauch der vom Verf. entworfenen Diagramme erläutert, von denen hier vier Beispiele aufgeführt sind und mit deren Hilfe die Handhabung des Verfahrens wesentlich erleichtert wird. *R. Zurmühl.*

**Mangeron, D. und Corneliu Drăgan: Eine neue graphisch-analytische Behandlung des Problems der Verteilung von Beschleunigungen beliebiger Ordnung.** Bul. Inst. Politehn. Iaşi, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 161—174, russ. Zusammenfassg. 174 (1957).

Verff. stellen allgemeine Sätze über die Beschleunigungen höherer, beliebiger Ordnung auf. *W. Meyer zur Capellen.*

**Mewes, E.: Zusammenhang zwischen Kolbenweg und Kurbelwinkel bei Kurbelschleifen.** Z. angew. Math. Mech. 38, 405—409 (1959).

Für Kurbelschleifen verschiedener Umlaufbedingungen werden die Beziehungen von Kurbelwinkel zur Gleitsteinverschiebung über Hilfsgrößen entwickelt und in Diagrammen dargestellt. *A. Hückler.*

**Moroškin (Moroshkin), Ju. F. (Yu. F.): On the geometry of compound kinematic chains.** Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 38—41 (1958) (Russisch).

The author considers a connected chain  $S = S_0 \cdots S_n$ , i. e. such that by arbitrary selection of two kinematic pairs one finds at least one simple connected contour of this chain including both pairs. Assuming that the number of rods is  $1 + n$  and  $p$  the number of kinematic pairs, one deduces the basic equation  $c = p - n$ , where  $c$  is the number of simple connected contours belonging to  $S$ , determining the structures



of the chains. If  $p_\varrho$  is the number of kinematic pairs of rank  $\varrho$  belonging to  $S$ , then the equations of kinematic pairs determine 6  $p$  Euler's coordinates as the functions of  $N = \sum \varrho p_\varrho$  Lagrange's coordinates which are coupled by means of equations of transformation. Such independent equations can not be more than 6  $c$ . It is shown that the rank  $R$  of the system of these equations of transformation characterises the property of the system ( $S$ ), which can be used for the classification of kinematic chains. The obtained equations of transformation with equations of kinematic pairs give the full solution of the problem of the motion of compound kinematic chains. The equations of transformation are the basic ones of the geometry of mechanisms. The difference  $d = N - R$  represents the number of degrees of freedom of the system. Regretful, the treatment is not very clear and comprehensible, hence, it is not accessible to engineers. D. Rašković.

**Bogdan, R., Cr. Pelecudi, E. Bugaievski und L. Calmaieuc:** Über die experimentelle Bestimmung der Bewegungen in ebenen Getrieben. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 2, 127—141 (1957).

Verff. schildern eine elektrische Meßordnung, die zum Aufnehmen der Bahn eines eben, aber sonst beliebig bewegten Punktes eines Getriebes dienen soll, z. B. zum Aufzeichnen von Koppelkurven. W. Meyer zur Capellen.

**Hasselmeier, H.:** Profiluntersuchung an oktoiden verzahnten Kegelrädern. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 4, 49—56 (1958).

Zur Vermessung der Eingriffslinie eines oktoiden verzahnten Kegelrades ist die genaue Kenntnis der systematischen Abweichung der Kegelradeingriffslinie von der Eingriffslinie eines Stirnzahnrades mit Evolventenverzahnung erforderlich. Aus den genauen formelmäßigen Beziehungen werden Näherungslösungen zur schnellen Feststellung der Größe der Abweichungen entwickelt. Eine Unterstützung bietet ein beigefügtes Nomogramm. W. Meyer zur Capellen.

### Elastizität. Plastizität:

**Bernstein, B. and J. L. Ericksen:** Work functions in hypo-elasticity. Arch. rat. Mech. Analysis 1, 396—409 (1958).

In einem kartesischen  $x_1 - x_2 - x_3$ -Koordinatensystem sei  $t_{ij}$  der Spannungstensor,  $w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$  ( $v_i$  = Vektor der Verschiebungsgeschwindigkeit;  $\partial/\partial x^k = ,_{,k}$ ) der Rotations- und  $d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$  der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor. Stellt  $A_{ijk\ldots m}$  (Symmetrien:  $A_{ijk\ldots m} = A_{jik\ldots m} = A_{jim\ldots k}$ ) eine invariante isotrope Tensorfunktion von  $t_{ij}$  und  $t$  die Zeit dar, so betrachten Verff. Stoffgesetze

$$dt_{ij}/dt - t_{ik}w_{jk} - t_{jk}w_{ik} = A_{ijk\ldots m}d_{k\ldots m}$$

(Summation über doppelt auftretende Indizes) und bezeichnen dadurch beschriebene Körper nach Truesdell als hypoelastisch. Im allgemeinen ist der Arbeitszuwachs  $dW = \int_V t_{ij}d_{ij}dt dV$  ( $V$  = Volumen) kein vollständiges Differential, wohl aber

— und dies beweisen Verff. — bleibt er es in zwei Spezialfällen: (I)  $W \geq 0$  für alle Formänderungen, die von einem festen Spannungszustand  $t_{ij}^0$  (für  $t = 0$ ) ausgehen; (II)  $W \geq 0$  für alle Formänderungen, bei denen der Spannungszustand am Ende gleich dem anfänglichen ist. Die Arbeitsdichte pro Ausgangsvolumen ist

von der Gestalt  $w = \int_0^t F_{ij}dt_{ij} \exp \int_0^t G_{km}dt_{km}$  mit geeigneten aus  $A_{ijk\ldots m}$  abgeleiteten

Tensorfunktionen  $F_{ij}, G_{km}$ . Verff. untersuchen zum Beweis ihres o. g. Ergebnisses allgemeine so geartete Integraltransformationen und gewinnen für Fall (I) folgendes hübsche Resultat: Notwendig und hinreichend für die Existenz von Funktionen  $\Phi(t_{ij}), \Psi(t_{ij})$  (im Kleinen) mit  $F_{ij} = \Phi \partial \Psi / \partial t_{ij}$  ( $\Psi$  = „hypoelastisches Potential“) ist die Existenz von Spannungssystemen, die man nur durch solche Verformungen ineinander überführen kann, bei denen Arbeit geleistet wird. H. Lippmann.

**Eriksen, J. L.:** Hypo-elastic potentials. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **11**, 67—72 (1958).

Für die durch Truesdell eingeführte Hypoelastizität kann man ein dem elastischen Potential entsprechendes skalares Potential einführen, für dessen Existenz notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet werden. *J. Pretsch.*

**Knops, R. J.:** On the variation of Poisson's ratio in the solution of elastic problems. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **11**, 326—350 (1958).

Suppose that a given three-dimensional boundary-value problem of the theory of elasticity (without body forces) is known when the Poisson's ratio for the medium assumes some particular value  $\nu'$ , so that the Maxwell's stress-functions are known. Now, suppose that the Poisson's ratio changes to a new value  $\nu$ , but the shear modulus and prescribed boundary conditions remain as before. The author shows how the altered field may be determined from that associated with the particular value  $\nu'$  without any further explicite reference to the field equations. The known solutions does not need necessarily correspond to a "real" Poisson's ratio, for which there should be  $-1 < \nu' < \frac{1}{2}$ . In particular, an infinite value for  $\nu'$  reduces the problem to one in potential theory. As illustrations of the method three problems are discussed. The first deals with the internal forces in semi-infinite media with plane rigidity-constrained boundary. The second, with a solid bounded by two coaxial cones and loaded at the common vertex of the cones by a force acting along the axis. The last one deals with the same cones but with a force perpendicular to the axis. The author claims that the two last solutions to the cone are new. However, they may be found e. g. in the book: A. I. Luře, Spacial problems of the theory of elasticity, Moscow, 1955, pp. 141—143. *S. Drobot.*

**Mişieu, M.:** Représentation des équations de l'équilibre élastique par des fonctions monogènes de quaternions. *Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz.* **9**, 457—470, russ. und französ. Zusammenfassg. 469—470 (1957) [Rumänisch].

Pour un corp isotrope, la dilatation  $\theta$  et les rotations  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , données par

$$\theta = \operatorname{div} \bar{V}(u, v, w), \quad \bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \operatorname{rot} \bar{V}$$

sont liées, dans le cas statique, par les relations

$$(1) \quad \begin{aligned} -\chi \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} &= 0, & -\chi \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= 0, \\ -\chi \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= 0, & \chi &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}. \end{aligned}$$

Gr. C. Moisil a montré que les relations (1) expriment les conditions de monogénéité pour la fonction

$$\varphi = -\chi \theta + i \omega_x + j \omega_y + k \omega_z$$

dans l'algèbre des quaternions ( $i^2 = j^2 = k^2 = -1, i j = -j i = k, \dots$ ), conditions exprimées succinctement par  $D\varphi = 0$ , où  $D = i \partial/\partial x + j \partial/\partial y + k \partial/\partial z$ . L'A. utilise ces résultats pour obtenir une représentation de la fonction hypercomplexe des tensions:

$$F = \int i (\sigma_z ds_x + \tau_{xy} ds_y + \tau_{xz} ds_z) + j (\tau_{xy} ds_x + \sigma_y ds_y + \tau_{yz} ds_z) + k (\tau_{zx} ds_x + \tau_{zy} ds_y + \sigma_z ds_z),$$

dans des conditions aux limites données. Dans le cas dynamique on réalise une formulation analogue. L'A. promet de présenter la résolution effective dans un travail ultérieur.

*M. N. Roşculeţ.*

**Paria, Gunadhar:** The method of Wiener-Hopf in elastic problems. *Bull. Calcutta math. Soc.* **49**, 37—42 (1957).

Die vom Verf. behandelte Aufgabe, bei einer dünnen, unendlich langen Platte von endlicher Breite für gewisse Randbedingungen die Spannungen und Verschie-

bungen zu bestimmen, führt auf die partielle Differentialgleichung  $\nabla^4 \chi = 0$  mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \chi_{xy} &= 0, \quad \chi_{xx} = 0, \quad \text{wenn } -\infty < x < \infty, \quad y = 1, \\ \chi_{xy} &= 0, \quad \chi_{xx} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } -\infty < x < 0, \quad y = 0, \\ m_+(x), & \text{wenn } 0 < x < \infty, \quad y = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $m_+(x)$  so beschaffen sein muß, daß die Verschiebung auf  $0 < x < \infty, y = 0$  einen vorgeschriebenen Wert  $q_+(x)$  annimmt. Zur Lösung der Aufgabe wird die Wiener-Hopfsche Methode benutzt. Durch Einführung der Fouriertransformierten  $\chi(\omega, y)$  von  $\chi(x, y)$  geht die partielle Differentialgleichung  $\nabla^4 \chi = 0$  in eine gewöhnliche Differentialgleichung über. Die Randwertaufgabe für die Transformierte  $\chi(\omega, y)$  führt auf eine inhomogene Integralgleichung erster Art vom Wiener-Hopfschen Typus,

$$\int_0^\infty m_+(\xi) h(x - \xi) d\xi = q_+(x)$$

mit dem Kern

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} H(\omega) e^{-i\omega x} d\omega, \quad \text{wo } H(\omega) = \sigma_1 \frac{2\omega + sh^2\omega}{\omega(sh^2\omega - \omega^2)}.$$

Maßgebend für den Charakter der Lösung der Wiener-Hopfschen Integralgleichung sind die Eigenschaften der analytischen Funktion  $H(\omega)$ , insbesondere die Lage ihrer Nullstellen und Pole sowie ihr Verhalten in der Umgebung der Punkte 0 und  $\infty$ . Verf. löst die Integralgleichung näherungsweise, indem er  $H(\omega)$  durch eine analytische Funktion von einfacherer Art ersetzt, welche in den Punkten 0 und  $\infty$  dasselbe Verhalten wie  $H$  aufweist.

W. Quade.

**Sparacio, Renato:** Generalizzazioni del teorema di Castigliano. Rend. Accad. Sci. fiz. mat., Napoli, Ser. IV **24**, 145—151 (1958).

L'A. arrive à une généralisation du théorème de Castiglione pour le cas où le milieu élastique serait soumis à des forces et des distorsions ou bien seulement à des distorsions, en partant de l'expression de l'énergie de déformation, à l'aide du principe de la superposition des effets.

V. Válcovici.

**Sternberg, E. and R. A. Eubanks:** On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation. Quart. appl. Math. **15**, 149—153 (1957).

In questo lavoro vengono stabiliti due teoremi riguardanti, l'uno la soluzione generale della equazione indefinita della dinamica elastica linearizzata di un sistema omogeneo ed isotropo, l'altro l'integrazione dell'equazione iterata delle onde  $\square_1 \square_2 u = 0$ . Precisamente, premesso che la soluzione generale di Galerkin per il caso statico risulta estesa alla dinamica da Iacovache sulla base di uno schema operativo formale che non esaurisce il problema, si provvede a dimostrare che ogni soluzione per lo spostamento elastico, anche in presenza di forze di massa, è suscettibile di una rappresentazione del tipo indicato dalla Iacovache stessa. Successivamente, generalizzando un teorema di Almansi sulla integrazione dell'equazione biarmonica si riconosce che ogni soluzione della equazione iterata delle onde può esprimersi come somma di due funzioni delle onde.

G. Ferrarese.

**Válcovici, V.:** Sur les relations entre les tensions. Comun. Acad. Republ. popul. Române **1**, 337—339, russ. und französ. Zusammenfassg. 339 (1951) [Rumänisch].

Soient:  $\sigma_{ij}$  le tenseur des tensions,  $e_{ij}$  le tenseur des déformations,  $u_i$  le déplacement (respectivement la vitesse), dans un point de coordonnées  $x_i$  d'un milieu continu. Dans le cas d'un milieu élastique, en partant des équations de compatibilité et en écrivant la loi de Hooke sous la forme  $\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij}, \dots$ , avec

$$\sigma'_{ij} = \delta^j_i (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / (m + 1) = \sigma'_{ij} \dots,$$



on obtient les relations 
$$\frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \sigma'_{ji}}{\partial x_i^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \sigma'_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \sigma'_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Si pour la constante élastique  $m$  on prend la valeur  $m = 2$ , on obtient des relations correspondantes pour un fluide visqueux. En partant des équations de Cauchy, on obtient pour un milieu élastique les relations

$$\varrho \ddot{\sigma}'_{ij} = \mu (\partial^2 \sigma_{kj} / \partial x_k \partial x_i + \partial^2 \sigma_{ki} / \partial x_i \partial x_j).$$

*Dan Gh. Ionescu.*

● **Pugsley, Sir Alfred:** The theory of suspension bridges. London: Edward Arnold (Publishers), Ltd. 1957. VII, 136 p. 42 s. net.

Cet ouvrage a pour but : 1. d'exposer les théories des ponts suspendus en ordre historique en faisant ressortir leurs liaisons mutuelles, 2. de décrire l'ensemble des problèmes modernes de la statique et dynamique des ponts suspendus, en particulier les applications des méthodes par approximations successives et les problèmes vibratoires se rattachants aux effets des surcharges et du vent. Ces idées directrices furent réalisées habilement. L'ouvrage donne un bon précis des problèmes cités et discute les principaux travaux récents. C'est pour ça qu'il est un bon guide pour ceux qui ne connaissent pas ces problèmes de plus près. La première partie du livre contient une introduction historique, les problèmes classiques de la statique des cables et expose les théories de Rankine et celle basée sur l'étude des variations du potentiel des déformations élastiques, due à Navier et Castigliano. La seconde partie contient l'exposé de la théorie de Mélan, qui est la base des développements modernes. La non-linearité des relations entre déformations et charges est mise en évidence; ce sujet est suivi de diverses méthodes de linéarisation de ces problèmes: par analogie à la relation différentielle des déformations des barres fléchies et tendues, par la méthode de S. Timoshenko, et par la méthode de calcul des tableaux des déformations imaginée par l'A. Un autre mode de développement de la théorie de M. Mélan consiste dans l'application des séries de Fourier due à S. Timoshenko et suivie par M. Steuerman. La méthode de relaxation de M. Southwell est aussi applicable à ces problèmes. Les méthodes exactes conduisant aux calculs compliqués, la recherche des méthodes approximatives prend de l'importance en cas des calculs préliminaires. Ce sont les méthodes de Steinman, Hardesty, Wessman et Pugsley. Cette dernière est basée sur l'analogie entre les déformations d'une poutre de rigidité d'un pont suspendu et les déformations d'une poutre reposant sur sol élastique. Les deux derniers chapitres contiennent la description des études de vibration des ponts suspendus sous charges mobiles et sous l'influence de la poussée du vent. Les problèmes théoriques des ponts suspendus sont mis en rapport avec les études expérimentales en faisant ressortir leur convergence ou leur désaccord. Il est à regretter que l'A. s'est restreint strictement à l'étude des déformations et n'a pas pris le point de vue constructif en s'occupant de la dépendance entre les forces internes et les formes des ponts suspendus, afin de mettre à jour leur but. Cet ouvrage fût précédé par les publications suivantes de l'A.: A simplified theory of wing flutter, A. R. C. R. & M. (1937); A flexibility coefficient approach to suspension bridge theory, Proc. Inst. Civ. Engrs. (1949); Some experimental work on model suspension bridges, J. Inst. Struct. Engrs. (1949); On the natural frequencies of suspension chains (ce Zbl. 35, 113); The gravity stiffness of a suspension bridge cable (ce Zbl. 47, 430); A simple theory of suspension bridges, J. Inst. Struct. Engrs. (1953); Some experiments on Clifton Suspension bridge, A. R. Flint and A. G. Pugsley. Conference on the correlation between calculated and observed stresses and displacements in structures, Inst. Civ. Engrs. September 1955. *Z. Wasiutyński.*

Švare, Jiří: Gegenseitige Beziehungen der statischen Größen auf dem Träger mit einer raumkurvenförmigen Mittellinie. Sbornik vysok. Učení techn. v Brně 1958, 343—354, russ. und deutsche Zusammenfassg. 354—355 (1958) [Tschechisch].

Mit Hilfe der Vektorrechnung gibt der Verf. den Verlauf von Kräftegrößen in einem Träger mit einer raumkurvenförmigen Mittellinie an, der von Biegemomenten und von Kräften belastet wird. Die Arbeit setzt voraus, daß der raumkurvenförmige Träger ausreichend biegeschwer ist, was bedeutet, daß die gegenseitigen Verschiebungen von zwei Mittellinienpunkten mit Bezug auf die Trägerlänge zwischen diesen Punkten vernachlässigbar sind. In einem entgegengesetzten Falle handelt es sich um die Träger mit einer geringen Biege- und Verdrehungsfestigkeit, für welche die obenerwähnten Ausdrücke nicht mehr gelten.

*J. Valenta.*

**Iyengar, K. T. Sundara Raja:** Analysis of deep beams. Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New Delhi 1956, Oct. 15—16, 87—94 (1957).

A beam having the form of a rectangular plate with constant thickness is loaded by normal stresses acting on the parallel sides. The solution is obtained by the Multiple-Fourier Method. The solution satisfies exactly the biharmonic equation and the condition of the non-existence of the shearing stresses on the boundary. Two systems of linear equations with an infinite number of unknown coefficients are obtained from the remaining boundary conditions.

*J. Szmelter.*

**Teodorescu, Petre P.:** Über die Berechnung wandartiger Träger auf zwei Stützen. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 3, Nr. 2, 125—149 (1958).

A rectangular plate with constant thickness is loaded on its boundary by forces acting in its middle plane. The problem is solved by introduction of an Airy stress function in the form of sums of products of the trigonometric and hyperbolic functions. The boundary conditions have the form of the Fourier series and they are satisfied exactly by each term of the solution. The biharmonic equation is satisfied approximately by the sum of all the terms of the solution. The general case is composed from 12 simple cases with various kinds of symmetry, whose solutions are given in the paper. In the appendix the author gives a compendium of the functions used in the paper.

*J. Szmelter.*

**Teodorescu, Petre P.:** Sur l'application des méthodes de la résistance des matériaux dans le calcul des poutres droites. An. Univ. C. I. Parhon Bucuresti, Ser. Şti. Natur. Nr. 19, 9—17, russ. und französ. Zusammenfassg. 17—18 (1958) [Rumänisch].

On montre que, pour les poutres à section rectangulaire et dont le rapport entre l'ouverture et la hauteur de la section transversale est  $\lambda = l/2b \geq 2$ , on peut utiliser avec une approximation suffisante pour la technique les résultats donnés par la résistance des matériaux, tant pour le calcul des tensions que pour celui de la flèche.

*Dan Gh. Ionescu.*

● **Aas-Jakobsen, A.:** Die Berechnung der Zylinderschalen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. XII, 160 S. DM 22,50.

Das vorliegende Buch behandelt sowohl die elastizitätstheoretischen, als auch die praktischen Grundlagen zur Berechnung und Konstruktion von Zylinderschalen in einer Weise, die die Federführung des erfahrenen Fachmannes erkennen läßt. Der Aufstellung der Differentialgleichung 8. Ordnung für die Radialverschiebungen von Kreiszylinderschalen folgen Abschnitte über die Membrantheorie, über isotrope und Ringrippenschalen unter Randlasten, über Schalen mit variablem Krümmungsradius und variabler Dicke und über Berechnungsmethoden von Tonnendächern. Weiterhin beschreibt Verf. die Binderberechnung, führt Stabilitätsuntersuchungen durch und geht schließlich auf vorgespannte Tonnendächer ein. Das Studium dieses Werkes, das sich neben seiner wissenschaftlichen Prägnanz durch zahlreiche Rechenbeispiele und ein umfangreiches chronologisch geordnetes Literaturverzeichnis auszeichnet, dürfte somit für den an praktischen Anwendungen interessierten Mathematiker von Interesse sein.

*D. Rüdiger.*

**Gerisch, Wolfgang:** Zum Problem der an den Rändern fest eingespannten elastischen Platte. Über zwei Orthonormalsysteme. Arch. rat. Mech. Analysis 2, 227—242 (1958).

Verf. untersucht in geeigneten Funktionenräumen zwei Orthonormalsysteme, welche in der Theorie schwingender Platten nützlich sein können. Das erste  $\{q_n(x)\} \subset L_2(0, \pi)$  entsteht durch Orthonormalisierung der Funktionen  $\psi_m(x) = \sin x \sin mx$ , während als zweites  $\{H_n^4(x)\} \subset L_2(-1, 1)$  die „zugeordneten Kugelfunktionen“ als normierte Integrale der Differentialgleichungen

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \{n(n+1) - 16/(1-x^2)\}y = 0$$

( $n = 4, 5, \dots$ ;  $f(-1), f(1)$  endlich) gewählt werden. Deren Vollständigkeit entnimmt Verf. der Literatur, während er für die Vollständigkeit der  $q_m$  zwei Beweise gibt. Ferner stellt er die  $q_n$  explizite dar und entwickelt Differential- und Integralformeln für beide Systeme. Eine Anwendung der  $H_n^4$  auf die allseitig eingespannte Rechteckplatte wird skizziert. Die numerischen Näherungsergebnisse stimmen gut mit anderen Untersuchungen überein. Anmerkung: Die Vollständigkeit der  $q_n$  ist trivial, wenn man die Vollständigkeit des Orthonormalsystems  $\{\sin nx\} \subset L_2(0, \pi)$  als bekannt voraussetzt. Gibt es nämlich  $h(x) \in L_2$

mit  $\int_0^\pi h \psi_n dx = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , so erfüllt  $H = h \cdot \sin x$  die Beziehungen

$\int_0^\pi H \sin nx dx = 0$ . Also fast überall  $H = h = 0$ ;  $\{\psi_n\}$  ist vollständig;  $\{q_n\}$  ist vollständig.

*H. Lippmann.*

**Jiroušek, Jaroslav:** The solution of the plates and shells with the method of fictive trellis-work. Sbornik vysok. Učeni techn. v Brně 1958, 265—286, russ. und engl. Zusammenfassg. 285 (1958) [Tschechisch].

In seiner Arbeit verwendet Verf. sein bereits bekanntes Kettenverfahren (Sbornik VÚT 1957) der Lösung der grundlegenden Differentialgleichungen für die Durchbiegung eines allgemeinen unendlich dichten Gitterwerkes. An Hand vergleichender Beispiele zeigt Verf., daß die Grundgleichung eines unendlich dichten Gitterwerkes annähernd auch für die Gitterwerke mit endlicher Zahl von Feldern Gültigkeit hat. Unter dieser Voraussetzung kann man die Lösung rostartiger Systeme, wie sie vom Verf. dargelegt wird, für eine angenäherte Lösung für ein unendlich dichtes Gitterwerk betrachten. Diesen Umstand nützt Verf. auch für die Lösung zahlreicher anderer Probleme aus, falls diese auf die Differentialgleichung desselben Typus zurückgeführt werden können. Auf diese Weise kann man z. B. die grundlegende Differentialgleichung für die Durchbiegung einer Platte oder Membran von beliebiger Dicke aus einem isotropen bzw. orthotropen Werkstoff, einer Platte auf elastischer Unterlage u. ä. lösen. Verf. führt in seiner Arbeit auch eine geeignete Wahl eines Ersatzgitterwerkes, einer Ersatzbelastung, sowie die entsprechenden Randbedingungen an. Die Konvergenzgeschwindigkeit der vorgelegten Methode wird vom Verf. am einfachen Beispiel einer Quadratplatte konstanter Dicke verfolgt, die durch gleichmäßig verteilten Druck belastet wird, aber die theoretische Lösung des Konvergenzproblems wird vom Verf. nicht behandelt. Im Grunde genommen ersetzt das erwähnte Verfahren die Lösung an Hand der Differenzenmethode. Die Formulierung der Formeln (3a) bzw. (3b) scheint nicht glücklich zu sein. *J. Valenta.*

**Mohan, Madan:** On stresses in a thin isotropic elastic plate in the form of epitrochoid rotating steadily in its plane. Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New Delhi 1956, Oct. 15—16, 95—98 (1957).

On étudie l'état de tension plane dans un disque de forme épitrochoïdale en rotation uniforme. On utilise une transformation conforme pour représenter le domaine dans l'intérieur d'un cercle unitaire, le problème étant ainsi réduit à un système d'équations intégrales.

*P. P. Teodorescu.*



**Seide, Paul:** Compressive buckling of a long simply supported plate on an elastic foundation. *J. aeronaut. Sci.* **25**, 382—384, 394 (1958).

If an infinitely long flat plate resting on an elastic foundation is not attached but simply supported the buckling load is smaller as compared with the case of an attached plate. This problem is investigated in the present paper. The deflection  $W(x, y)$  is governed by the differential equation

$$DA \Delta w + N \partial^2 w / \partial x^2 + \bar{k} w = 0,$$

$k$  being either the foundation modulus if the buckle is compressive, or null if it is not compressive. It yields to the result that the lack of attachment of the plate leads to a drastic reduction in the buckling stress coefficient.

*V. Válcovici.*

**Winslow, A. M.:** Stress solutions for rectangular plates by conformal transformation. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **10**, 160—168 (1957).

Viene dato un procedimento per la determinazione dello stress in una piastra rettangolare, soggetta a distribuzioni di carichi ai soli bordi, usando le notazioni di Muskhelishvili. Precisamente, ammettendo che sul contorno della piastra le trazioni siano espresse da polinomi in  $x, y$  e quindi nelle condizioni ai bordi compaia un polinomio  $T_1$  nella variabile complessa  $z$  e nella sua coniugata  $\bar{z}$ , il problema viene spezzato in due parti. Si cerca dapprima una soluzione polinomiale per lo stress prescindendo da alcuni termini di  $T_1$  e per i rimanenti la soluzione, espressa da una serie di potenze, viene ottenuta con una trasformazione conforme che, a meno di una rotazione di assi, muta il rettangolo in due settori opposti di uno stesso cerchio di raggio unitario. Il procedimento è quindi illustrato su due particolari esempi, per una piastra quadrata ed una rettangolare, ove naturalmente la serie di potenze viene approssimata da una somma finita.

*G. Ferrarese.*

**Le Boiteux, Henri:** Sur le calcul direct du déplacement à partir de la fonction d'Airy en élasticité bidimensionnelle. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 633—636 (1959).

Für den ebenen Spannungszustand werden Formeln angegeben, mit deren Hilfe die Verschiebungen aus der Airyschen Spannungsfunktion ermittelt werden können. Das Verfahren dürfte gegenüber dem allgemein üblichen keine wesentlichen Vorteile bieten.

*A. Weigand.*

**Preda, N., Victor Bausic, Th. Havirneanu, D. Horbanieue et M. Diaconu:** Quelques problèmes d'élasticité plane. *Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser.* **3** (7), Nr. 3/4, 251—270, russ. und französ. Zusammenfassg. 270 (1957) [Rumänisch].

On étudie le problème d'un coin plan, actionné par des charges usuelles sur les arêtes latérales; on présente aussi d'intéressants cas particuliers. L'étude est continuée par quelques considérations sur les cylindres à parois épaisses soumis à un état de déformation plane.

*P. P. Teodorescu.*

**Roy, S. K.:** On the biharmonic analysis of stresses round openings in structures in relation to unlimited stress fields. *Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New Delhi* 1956, Oct. 15—16, 57—74 (1957).

The main difficulty in the numerical treatment of a problem of the plane elasticity of an unlimited body having openings is the arbitrariness in the adoption of the field required for analysing the stresses. In the most difficult cases the stress function does not vanish at infinity. Therefore the author proposes to use not only the superposition principle to compose the stress field from the initial stress field and stresses due to the openings, but also to correct the results in such a way that the Mitchel conditions for non-cyclicity of the displacements and rotations on a free internal boundary are satisfied. The numerical examples are given for circular and square openings in the isotropic compression, in the pure shear and in the uniform compression.

*J. Szmelter.*

**Sneddon, Ian N.:** Note on a paper by J. R. M. Radok. *Quart. appl. Math.* **16**, 197 (1958).

Betrifft die in diesem Zbl. **72**, 412 besprochene Arbeit.

**Derrington, M. G. and W. Johnson:** The onset of yield in a thick spherical shell subject to internal pressure and uniform heat flow. *Appl. sci. Research. A* **7**, 408—420 (1958).

Using known solutions concerning stress distribution in an elastically isotropic and homogeneous thick walled spherical shell, simultaneously subjected to internal pressure and steady state of heat flow, the paper deals merely with a trivial problem of evaluation of points where yield limit is first reached. From calculations it follows that for stress boundary conditions in question, by a suitable choice of temperature gradient, a delay in reaching yield limit at the inner radius of shell can be obtained. This is supposed to be of an engineering importance. No attempt has been made to evaluate the limit load and to solve the problem statically and kinematically according to the plasticity theories. *A. Sawczuk.*

**Sharma, Brahmadev:** Thermal stresses in transversely isotropic semi-infinite elastic solids. *J. appl. Mech.* **25**, 86—88 (1958).

Verf. bringt eine allgemeine Methode zur Untersuchung der elastischen Wärmespannungen in einem transversal isotropen Halbkörper. Unter der Annahme eines stationären Zustandes wird die Temperatur  $T$  mittels eines Integrals angegeben. Daraus erhält man unmittelbar die Ausdrücke der Spannungen. Verf. betrachtet am Ende auch den Fall einer nichtsymmetrischen, durch eine Besselsche Funktion darstellbaren Temperaturverteilung. *V. Válcovici.*

**Matschinski, Matthias:** De la plasticité „linéaire“. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 636—639 (1959).

Verf. stellt „Grundgleichungen der Plastizitätstheorie“ unter folgenden Voraussetzungen auf: (a) Sie sollen linear sein; (b) sie sollen koordinateninvariant sein; (c) auftretende Zeitableitungen sollen (wegen der Irreversibilität) von ungerader Ordnung sein; (d) weder zeitliche noch räumliche Ableitungen sollen von höherer als zweiter Ordnung sein. Die Linearität (a) wird auf breitem Raum (als allgemeines für kleine Zustandsänderungen gültiges Naturphänomen) gerechtfertigt. Anm. d. Ref.: Da die so hergeleiteten Gleichungen auf alle irreversiblen rheologischen Prozesse anwendbar wären, dürften sich diese im wesentlichen nur durch Materialkonstanten (und für kleine Zustandsänderungen niemals prinzipiell) unterscheiden. *H. Lippmann.*

**Wieckowski, Józef:** The influence of material damping on non-conservative reactions of elastic beams during torsional and longitudinal vibrations. *Arch. Mech. stosow.* **10**, 479—496, russ. Zusammenfassg. 479 (1958).

Vengono esaminate le vibrazioni di torsione forzate di frequenza  $\omega$  di una trave cilindrica di lunghezza  $L$  dotata di una dissipazione interna. Posto  $k = \omega L$ , si dimostra che in corrispondenza ad ogni grado di accuratezza richiesto nello determinazione del coefficiente di smorzamento e del momento di inerzia apparente, si può determinare un valore  $k_{\min}$  di  $k$  al disopra del quale la trave si comporta sensibilmente come se fosse illimitata. Ciò in particolare, riguardo al valore della coppia dissipativa di reazione nell'estremo forzato. Analogo esame viene compiuto per la vibrazioni di flessione e per le molle. *T. Manacorda.*

**Rosenberg, R. M.:** On the dynamical behavior of rotating shafts driven by universal (Hooke) couplings. *J. appl. Mech.* **25**, 47—51 (1958).

Verf. betrachtet die Transmission der Rotationsbewegung zweier Wellen mittels Cardanschen Gelenken in der Annahme, daß die eine Welle, die masselos ist, eine Scheibe in ihrer Mitte trägt. Dabei wird die Stabilität des Systems mit oder ohne Torsionskraft der Welle studiert. Das Problem wird auf die Lösung einer Matthieu-Gleichung zurückgeführt. *V. Válcovici.*

**Payne, L. E. and H. F. Weinberger:** Lower bounds for vibration frequencies of elastically supported membranes and plates. *J. Soc. industr. appl. Math.* **5**, 171—182 (1957).

Der Grundgedanke ist von einleuchtender Einfachheit: Der Grundton  $\lambda_1$  einer schwingenden Membran ( $\Delta u + \lambda_1 u = 0$ ,  $\partial u / \partial n + k u = 0$  am Rande) wird nach unten abgeschätzt durch Vergleich mit dem eindimensionalen Problem der schwingenden Saite. Irgendwie seien zwei einander senkrechte Richtungen („ $x$ - und  $y$ -Achse“) ausgezeichnet. Das Gebiet  $G$  der Membran wird zunächst durch alle Parallelen  $p_{y_0}$  zur  $x$ -Achse schraffiert; sei  $u(x, y)$  die erste Eigenfunktion der Membran (mit den vorgegebenen Randbedingungen); auf  $p_{y_0}$  ist  $u(x, y_0)$  Konkurrenzfunktion für ein eindimensionales Rayleighsches Extremalproblem, dessen Minimum exakt bekannt ist; daraus folgt eine untere Abschätzung des „ $x$ -Teiles“ des Rayleighschen Quotienten  $\lambda_1$  von  $u(x, y)$ ; dieselbe Überlegung wird wiederholt bei Betrachtung von Parallelen zur  $y$ -Achse; Addition der beiden so erhaltenen Ungleichungen ergibt eine untere Abschätzung von  $\lambda_1$ :  $\lambda_1(k) \geq \mu_1(k_1, L_x) + \mu_1(k_2, L_y)$  für alle  $k_1, k_2$ , welche die Ungleichung  $k_1 |\partial x / \partial n| + k_2 |\partial y / \partial n| \leq k$  befriedigen; dabei bedeutet  $\mu_1(k, L)$  die erste Eigenfrequenz zum Problem der schwingenden Saite  $q'' + \mu q = 0$  mit  $q'(0) - k_1 q(0) = q'(L) + k_2 q(L) = 0$ ;  $L_x$  ist die maximale Länge einer Strecke in  $G$  parallel zur  $x$ -Achse (und entsprechend  $L_y$ ). Die Ungleichung ist scharf: Gleichheit gilt für alle Rechtecke. — Im Falle einer Membran mit festem Rand ( $k = \infty$ ,  $u = 0$ ) hat man also die Abschätzung  $\lambda_1(\infty) \geq \pi^2 (L_x^2 + L_y^2)$ , welche bei nicht-konvexen Gebieten Nichttriviales liefert. — Mit einer verwandten Überlegung wird weiter bewiesen:  $\lambda_1$  ist für ein gegebenes  $G$  immer größer als für den umschreibenden Kreis (mit demselben  $k$ ). (NB: Nur für  $k = \infty$  ist  $\lambda_1$  ein monotonen Gebietsfunktional!) Der Beweis beruht auf einer „Schraffierung“ von  $G$  durch alle Radien des umschreibenden Kreises. — Ferner wird unter einschneidenden Voraussetzungen (insbesondere: Symmetrie bezüglich der  $x$ - und der  $y$ -Achse) eine untere Schranke für  $\lambda_2(k)$  angegeben. Beweis: Schraffierung in der  $x$ - und  $y$ -Richtung, wie am Anfang. — Zum Schluß gewinnt man untere Schranken für den Fall der schwingenden Platte, und zwar einerseits durch Vergleich mit dem (eindimensionalen) schwingenden Stab, andererseits durch Vergleich mit dem Problem der Membran für dasselbe Gebiet. — Bemerkung des Ref.: Die hier verwendeten Methoden sind inhaltlich eng verwandt und stehen an der Quelle der späteren „Schneide-Methode“ des Ref. [C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2060—2062 (1959)]. (Anstatt wie hier schraffiert zu werden, wird das Gebiet dort geschnitten; längs der Schnitte unstetige Probierfunktionen werden zugelassen.) Bei manchen Beispielen erweist sich die Zulassung von freien (nicht-parallelen, usw.) Schnitten als vorteilhaft. In diesem Zusammenhang ist in erster Linie auf verwandte Gedankengänge (Erweiterung der Klasse der zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen) in Arbeiten von Weinstein und Aronszajn hinzuweisen. — Die anfangs erwähnte Überlegung der Verff. hat dagegen den Vorteil, daß nach den  $x$ - und  $y$ -Richtungen schraffiert wird, so daß das ganze Dirichlet-Integral  $\iint (u_x^2 + u_y^2) dx dy$  berücksichtigt wird (Fall der Rechtecke!). Eine Synthese beider Methoden ist denkbar, indem  $G$  nacheinander längs zweier (oder mehrerer) Kurvenscharen geschnitten wäre. — Vgl. dazu C. r. Acad. Sci. Paris, 249, 1074—1076 (1959).  
J. Hersch.

**Bufler, H. und H. G. Hahn: Kritische Drehzahlen und Biegeschwingungen kontinuierlich besetzter Wellen bei verschiedenen Lagerungen.** Ingenieur-Arch. 26, 387—397 (1958).

Für die vier Lagerungsarten eingespannt-frei, gelagert-gelagert, eingespannt-gelagert und eingespannt-eingespannt einer kontinuierlich mit Masse und Trägheitsmoment besetzten Welle werden die Zahlenwerte der kritischen Drehzahlen für synchronen Gleich- und Gegenlauf sowie der Biegeschwingungsfrequenz durch Auswerten der transzendenten Frequenzgleichungen in Kurvenform für Grund- und mehrere Oberfrequenzen bereitgestellt. Ein Zahlenbeispiel erläutert die Handhabung der Tafeln für verschiedene Fälle und Abmessungen.  
R. Zurmühl.



**Tondl, Aleš:** Résonance subharmonique d'un rotor ayant une caractéristique non linéaire des appuis de roulement. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 2, 142—157 (1957).

Eine waagerecht gestellte, masselose, elastische Welle trägt in ihrer Mitte eine Scheibe mit kleiner Schwerpunksexzentrizität und lagert auf zwei elastischen Stützen mit linearer Kennlinie für waagerechte, aber nichtlinearer, unsymmetrischer Kennlinie  $f(x) = c_1 x + b^2 x^2$  für lotrechte Verschiebungen  $x$ . Bei einer Drehzahl  $\omega$  hat dieses System die Schwingungszeit  $2\pi/\omega$ ; seine Schwingungen werden bei hinreichend kleiner Dämpfung für  $\omega =$  doppelter kritischer Drehzahl des Rotors instabil (vgl. A. Tondl, dies. Zbl. 82, 175). Für hinreichend kleine Dämpfung und hinreichend große Werte der Exzentrizität und Nichtlinearität treten ferner subharmonische Resonanzschwingungen 2. Ordnung mit der Schwingungszeit  $4\pi/\omega$  auf. Ihre Amplitude wird in zweiter Näherung als Funktion der Drehzahl und der Dämpfung berechnet. Ihr Labilitätsbereich wird bestimmt und für die praktische Anwendung nach oben abgeschätzt. Ein Zahlenbeispiel erläutert die Ergebnisse und zeigt insbesondere das verschiedenartige Verhalten des Rotors, wenn sich seine Drehzahl von beiden Seiten her der subharmonischen Resonanzstelle nähert, während zugleich die Grundschwingung instabil wird. Wegen der starken Zunahme der Amplitude soll die Betriebsdrehzahl des Rotors nicht in der Nähe der doppelten kritischen Drehzahl liegen, und es ist auf eine sorgfältige Auswuchtung des Rotors und auf hinreichend starre Lagerung der Welle zu achten.

K. Zeller.

**Chopra, S. D.:** The range of existence of Stoneley waves in an internal stratum. II. Antisymmetric vibrations. Monthly Not. roy. astron. Soc., geophys. Suppl. 7, 338—346 (1957).

Ausdehnung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 78, 392) auf antisymmetrische Schwingungen.

W. Kertz.

**Hamburger, L. et L. Săveanu:** Sur la propagation dans le sol des ébranlements dus aux Marteaux-Pilons. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 3, Nr. 1, 129—142 (1958).

Il lavoro esamina, sperimentalmente e teoricamente, la propagazione delle onde dovute ai colpi di maglio di una officina. Dal punto di vista teorico, il problema si riduce a quello di studiare la propagazione di onde in un suolo elastico dovute ad una forze perpendicolare al suolo, applicata nell'origine, e che viene supposta del tipo  $a$  (sen  $\lambda t/t$ )  $\delta$ ,  $\delta$  funzione di Dirac. Con qualche approssimazione, si riesce a stabilire una forma semplice per lo spostamento verticale che è possibile confrontare con successo coi dati sperimentali.

T. Manacorda.

**Robinson, A.:** Wave propagation in a heterogeneous elastic medium. J. Math. Physics 36, 210—222 (1957).

Bei einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung können Unstetigkeiten einer Lösung bzw. ihrer ersten und/oder zweiten Ableitung nur auf den „charakteristischen Flächen“  $S$  auftreten. Diese sind durch das Verschwinden der Koeffizientenmatrix der Glieder zweiter Ordnung gegeben. (Druckfehler in Gleichung 2. 3.) Für den speziellen Fall der Differentialgleichung elastischer Wellen im Festkörper zerfällt die Bedingung in zwei Gleichungen. In dem einen Fall ist  $S$  eine „ $P$ -Front“ (für longitudinale Wellen), im anderen eine „ $S$ -Front“ (für transversale). Im ersten Fall gehen die zweiten Ableitungen der Tangentialkomponenten stetig durch  $S$ , während die der Normalkomponente unstetig sind; im zweiten Fall ist es umgekehrt. Eine Differentialgleichung für das Verhalten der Unstetigkeit (Sprunggröße) auf  $S$  wird aufgestellt und diskutiert. Die Unstetigkeiten longitudinaler bzw. transversaler Wellen ergeben sich als voneinander unabhängig, so daß die eine aus der andern nicht entstehen kann. Obwohl eine stetige Kopplung beider Wellenformen im inhomogenen Medium möglich bleibt, sollte keine Kopplung scharfer  $P$ - und  $S$ -Fronten auftreten.

K. Rawer.

## **Hydrodynamik :**

● **Binder, R. C.:** *Advanced fluid mechanics*. Vol. 1, 2. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, Inc. 1958. IX, 296; X, 297 p.

Par leur contenu, comme par l'arrangement de la manière traité, ces deux volumes présentent une forme inaccoutumée, capable même de créer certains malentendus. L'A. se propose de présenter aux étudiants ayant déjà suivi un cours de Mécanique des Fluides, quelques problèmes spéciaux. Au début de chaque volume, l'A. nous avertit que, ce but pouvant être atteint de diverses manières, il se propose de nous en présenter deux. Les deux volumes manquent donc de continuité et donnent l'impression d'être écrits par deux auteurs différents, chacun ayant choisi à sa manière le contenu, ainsi que la méthode d'exposition. Les faits étant envisagés de cette manière, le lecteur n'est plus surpris de constater que certains chapitres se répètent, ou que la théorie élémentaire des fluides incompressibles est située dans le second volume, tandis que les fluides compressibles sont étudiés au début du premier. — Le contenu des deux volumes est le suivant: Deux chapitres du premier volume sont consacrés au mouvement permanent des fluides compressibles; on étudie ensuite la théorie de la couche limite, sans ou avec transfert de chaleur. La seconde partie du premier volume est dédiée aux machines hydrauliques, tandis que la troisième partie traite des vibrations des fluides, en particulier du coup de bélier. Le deuxième volume commence par une exposition résumative des bases de la Mécanique des Fluides. La seconde partie traite de la couche limite incompressible et compressible, ainsi que du mouvement turbulent. La troisième partie est dédiée aux mouvements potentiels et aux mouvements bidimensionnels des fluides compressibles. La quatrième partie est presque identique à la troisième du premier volume. — Nous tenons à souligner la méthode précise et intuitive grâce à laquelle l'A. réussit à présenter clairement des théories parfois compliquées, ainsi que les rapprochements permanents entre la Mécanique des Fluides et d'autres branches de la Physique Mathématique, régies par les mêmes équations. En relevant la valeur pédagogique de cet ouvrage, qu'il nous soit permis de suggérer à l'A. de renoncer, pour une prochaine édition, à deux méthodes d'exposition différentes, pour nous donner un seul livre unitaire, qui, sans doute, pourra ainsi réunir les avantages et les mérites incontestables des deux volumes présents.

*Dan Gh. Ionescu.*

● **Comolet, R.:** *Introduction à l'analyse dimensionnelle et aux problèmes de similitude en mécanique des fluides*. Paris: Masson et Cie, Éditeurs 1958. 116 p. 1.600 fr.

La première partie traite des méthodes de l'analyse dimensionnelle. Après avoir introduit les notions fondamentales (1. Grandeur d'une entité; sa mesure. 2. Unités fondamentales; unités dérivées. 3. Choix des unités fondamentales. 4. Système d'unités cohérent. 5. Dimensions d'une grandeur. 6. Changement des unités de mesure. 7. Principe d'homogénéité), on énonce le théorème de Vaschy-Buckingham et on en donne quelques applications: 1. Force de traction d'une hélice. 2. Frottement d'un arbre en rotation. 3. Résistance des carènes. 4. Perte de charge dans une conduite. 5. Fréquence des vibrations d'une étoile. La seconde partie traite de la similitude, avec application en Mécanique des Fluides, domaine dans lequel elle s'est considérablement développée grâce à la technique des modèles réduits. Après le principe des essais sur maquettes, on présente les divers sortes de similitude: géométrique, cinématique, dynamique. Après avoir établi la distinction entre les écoulements en charges et ceux à surface libre, on déduit les conditions de Reynolds et de Froude, ainsi que celles de Weber, Euler, Mach et Prandtl. Ce chapitre se termine par quelques considérations générales concernant les conditions de similitude dans le cas général et le choix du système d'unités. La troisième partie contient des applications concernant les machines hydrauliques rotatives, le phénomène de

cavitation, l'écoulement au voisinage d'une parois et la distorsion des modèles de rivières. — Le livre est remarquable par la clarté de l'exposition et peut servir comme introduction dans le sujet.

*Dan Gh. Ionescu.*

● **Dryden, H. L., Th. von Kármán and G. Kuerti (editors): Advances in applied mechanics. Vol. V.** New York: Academic Press Inc., Publishers 1958. X, 459 p. \$ 12,00.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

**Vooren, A. I. van de: Unsteady airfoil theory.** *Advances appl. Mech.* 5, 35—89 (1958).

Infolge der großen technischen Bedeutung der instationären Vorgänge am Tragflügel, insbesondere für das Flügelklappen und das Böenverhalten von Flugzeugen, ist in den letzten zwei Jahrzehnten eine sehr große Anzahl von Bearbeitungen dieses Themas entstanden. Der vorliegende zusammenfassende Übersichtsbericht des Verf. über die Berechnung des instationären Auftriebs von Einzeltragflügeln in Unter- und Überschallströmung erscheint im richtigen Augenblick, in dem einerseits die Anzahl der Veröffentlichungen selbst für den Spezialisten anfängt, unübersehbar zu werden und in dem andererseits die vorliegenden Theorien soweit abgeschlossen sind, daß sie die wesentlichen Teile der Wirklichkeit gut wiedergeben. Wie üblich wird von der Reibung und der Wärmeleitung abgesehen und angenommen, daß keine Verdichtungsstöße auftreten; außerdem wird vornehmlich der harmonisch schwingende Flügel betrachtet. Inhalt: I. Introduction. II. The Fundamental Equations. The Oscillating Airfoil in III. Two-Dimensional, IV. Three-Dimensional Subsonic Flow. The Oscillating Airfoil in: Supersonic Flow (V. Supersonic, VI. Subsonic Edges). VII. Nonlinear Approximations. VIII. Indicial Functions. IX. References. (Trotz 108 Zitaten konnte nur ein Teil der wichtigsten Arbeiten genannt werden.)

*K. Nickel.*

**Frieman, Edward A. and Russell M. Kulsrud: Problems in hydromagnetism.** *Advances appl. Mech.* 5, 195—231 (1958).

È prevalentemente un articolo riassuntivo. Dopo aver introdotto le equazioni fondamentali dell'idromagnetismo per fluidi compressibili con le relative condizioni al contorno (si trascurano la corrente di spostamento e l'effetto dell'eventuale carica elettrica speciale), si richiama la nota proprietà che, in un mezzo di infinita conducibilità elettrica, le linee di campo magnetico sono in esso „congelate“. Si calcola poi l'energia totale del sistema, che è costante se, come sempre si suppone in seguito, il mezzo è circondato da pareti rigide perfettamente conduttrici. Si tratta anzitutto il caso in cui è trascurabile l'energia cinetica: si ha allora l'equilibrio idromagnetico, del quale si studia a fondo la stabilità, basandosi sul metodo energetico; si considera in particolare il caso della simmetria attorno ad un asse. Si passa poi allo studio delle onde idromagnetiche che si riscontrano in un fluido compressibile soggetto ad un campo magnetico primario uniforme: se ne esaminano i tre modi possibili nel caso in cui le relative equazioni si possono linearizzare; si considera anche l'aspetto energetico e la relativa velocità di gruppo. Ci si occupa poi della riflessione e della rifrazione dei detti tre modi su una superficie attraverso cui sono discontinue la pressione  $p$ , la densità e l'induzione magnetica  $B$ , essendo però nulla la discontinuità di  $p + \frac{1}{2} B^2$ . Infine si accenna alle modifiche da introdurre nel caso in cui non sono trascurabili la viscosità e la resistività del mezzo.

*R. Nardini.*

**Wegener, P. P. and L. M. Mack: Condensation in supersonic and hypersonic wind tunnels.** *Advances appl. Mech.* 5, 307—447 (1958).

Die Arbeit gibt einen ausgezeichneten Überblick über den jetzigen, weitgehend abgeschlossenen Stand von Theorie und Experiment auf dem Gebiete der Kondensationserscheinungen von Gasen in Lavaldüsen. Diese erregten ursprünglich großes Interesse wegen der Kondensationsverzögerungen in Dampfdüsen und der Kondensationsstöße in Überschallwindkanälen. Die Vorgänge wurden vom Ref. auf den



Mangel an Kondensationskernen zurückgeführt und mit Hilfe der Keimbildungstheorie von R. Becker und W. Döring berechnet. Verwandte Vorgänge in Hyper-schallströmungen, welche schließlich zur Kondensation von Luft führen, wurden unter anderen vom ersten Verf. des Artikels untersucht. Dabei zeigte sich, daß die in der Regel vorhandenen Gasverunreinigungen für genügend Kondensationskerne sorgen, so daß in diesem Fall praktisch Kondensationsgleichgewicht herrscht. 132 Zitate geben einen nahezu vollständigen Überblick über die einschlägigen Arbeiten.

*K. Oswatitsch.*

**Glandsdorff, P.:** *La dynamique des fluides déduite de la moindre contrainte par la méthode variationnelle de Th. De Donder.* Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 236—239 (1958).

Appiquant la méthode formelle du Calcul des variations, l'A. écrit le système des équations de la dynamique des fluides, dans le cas d'une liaison non holonome.

*Th. Lepage.*

**List, Roland:** *Zur Aerodynamik von Hagelkörnern.* Z. angew. Math. Phys. 10, 143—159, engl. Zusammenfassg. 159 (1959).

**Stewartson, K.:** *On the motion of a sphere along the axis of a rotating fluid.* Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 39—51 (1958).

This paper studies the motion of a sphere along the axis of an unbounded fluid rotating with uniform angular velocity, on the assumption that the fluid is undisturbed far upstream. It is shown that no wave-like components can then occur upstream of the body. The stream function and the drag are found for various values of the Rossby number  $2\Omega a/W = ka$ , where  $\Omega$  is the angular velocity of the fluid,  $a$  the radius of the sphere, and  $W$  is its velocity. When  $ka = 5,76$  both these quantities become infinite everywhere and it is inferred that the fluid cannot be undisturbed far upstream when  $ka \geq 5,76$ . The author assumes that cylindrical flow which must then be present must also occur at smaller values of  $ka$  of which the lower bound is not known.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Müller, Karl-Heinz:** *Zur Theorie des Wirbelstrahles.* Z. angew. Math. Mech. 39, 179—187 (1958).

Es wird die stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit um einen einseitig unendlich langen Quell- oder Senkenfaden untersucht, dem außerdem noch ein ebensolcher Wirbelfaden überlagert ist; nach außen ist die Strömung durch eine kreiskegelförmige Wand begrenzt, an der die Flüssigkeit haftet. Für diese dreh-symmetrische Strömung ergibt ein Separationsansatz zwei Differentialgleichungen für Strom- und Wirbelfunktion. Physikalisch ist besonders interessant, daß von einer gewissen Quellstärke ab — derselben, die im früher behandelten Fall ohne Wirbel gefunden worden war — das Problem anscheinend zum Eigenwertproblem entartet. Für Senken- und für schwache Quellströmung ist die Lösung jedoch vieldeutig. Anm. d. Ref.: Allerdings ist auch die Strömung unter den vorausgesetzten Randbedingungen nicht realisierbar, da ja längs der Achse Winkel- und Radialgeschwindigkeit unendlich werden, während im Zentrum z. B. eines Wirbelsturms sogar Windstille herrscht.

*K. Wieghardt.*

**Barua, S. N.:** *Corrigendum „A source in a rotating fluid“.* Quart. J. Mech. appl. Math. 10, 512 (1957).

Betrifft die in diesem Zbl. 64, 197 besprochene Arbeit.

**Strscheletzky, Michael:** *Geschwindigkeitsverteilung in rotationssymmetrischen Drallströmungen inkompressibler Flüssigkeiten.* Z. angew. Math. Phys. 9b, Festschrift Jakob Ackeret 648—660 (1958).

Verf. betrachtet rotationssymmetrische Strömungen, bei denen die Gesamtenergie eine Funktion des Radius ist. Solche Strömungen treten häufig hinter den Laufrädern von Strömungsmaschinen auf, nämlich dann, wenn der Arbeitsaustausch zwischen den Laufrädern und der Strömung oder die Verluste nicht konstant über

den Radius sind. Im einzelnen wird aus den Bewegungsgleichungen für die inkompressible, zähigkeitsfreie und rotationssymmetrische Strömung eine Beziehung hergeleitet, die es gestattet, zu einer bekannten Verteilung der Gesamtenergie und Umfangsgeschwindigkeit die dazugehörige Radial- und Axialgeschwindigkeit zu berechnen. In diese Beziehung geht allerdings der von vornherein nur an den Rändern bekannte Krümmungsradius der Stromlinien ein, so daß eine sukzessive Approximation erforderlich ist. Bei einem einfachen Beispiel wird die gute Übereinstimmung der so berechneten Geschwindigkeiten mit Meßergebnissen gezeigt. Die ganze Betrachtung wird reibungsfrei durchgeführt. Die Bemerkung des Verf., daß dies gerechtfertigt ist, weil die Reibung nur in den dünnen Wandgrenzschichten eine Rolle spielt, trifft nicht zu. Da es sich nicht um eine Potentialströmung handelt, treten im allgemeinen auch im Innern Reibungskräfte auf. Aber deren Einfluß ist eine Funktion der Lauflänge, so daß diese Theorie immer dann vernünftig ist, wenn die Entfernung klein ist zwischen der Stelle, an der die Gesamtenergie und Umfangsgeschwindigkeit bekannt sind (also in allgemeinen am Schaufelaustritt), und der Stelle, an der man sich für die Radial- und Axialgeschwindigkeit interessiert.

*G. Jungclauss.*

**Woods, L. C.:** On the deflexion of jets by aerofoils. Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 24—38 (1958).

Verf. behandelt die ebene Potentialströmung eines Freistrahls um ein Profil. Es handelt sich um ein gemischtes Randwertproblem: an der Profilkontur ist die Stromfunktion vorgeschrieben und an den Strahlrändern die Geschwindigkeit, d. h. der Gradient der Stromfunktion. Außerdem muß zur Erfüllung der Hinterkantenbedingung eine Zirkulation um das Profil angenommen werden. Das Problem wird mit Hilfe geeignet gewählter konformer Abbildungen mit der Hodographenmethode behandelt. Die Zirkulation wird dabei durch einen Schnitt mit Potentialsprung in der Strömungsebene berücksichtigt. Für den Fall einer ebenen Platte mit kleinem Anstellwinkel und damit auch kleinem Ablenkwinkel des Freistrahles werden zwei Beispiele gerechnet.

*G. Jungclauss.*

**Southwell, R. V.:** Use of an analogue to resolve Stokes's paradox. Nature 181, 1257—1258 (1958).

Das Stokessche Paradoxon, das Versagen nämlich, eine Lösung für die langsame zähe Strömung hinter einem Zylinder zu finden, die Stokes im Fall der Kugel angeben konnte, wird auf die Unzulässigkeit der beiden Randbedingungen  $u = U$  und  $v = 0$  im Unendlichen zurückgeführt. Zum Beweis wird die Analogie der für sehr langsame Bewegung geltenden Gleichung  $\nabla_{\psi}^4 = 0$  zur Plattenbiegungsgleichung  $\nabla_{\omega}^4 = Z(x, y)$  benutzt, wo  $Z$  die Oberflächendichte der Transversallast ist. Das Biegungsanalogon ist also eine Platte, die keiner transversalen Belastung unterliegt, sondern nur durch Randkräfte gebogen wird. Ihr kreisförmiger Innenrand, welcher der Oberfläche des Stokesschen Kreiszyinders entspricht, ist in der  $x$ - $y$ -Ebene eingespannt. Ihr Außenrand, welcher der Grenze des Stokesschen Flüssigkeitsfeldes entspricht, liegt in einer Ebene, welche die Symmetrielinie enthält und gegen die  $x$ - $y$ -Ebene um den Winkel  $\arctg U$  geneigt ist. Würden die Stokesschen Bedingungen im Unendlichen gelten, so würden wegen des Verschwindens aller zweiten und höheren Ableitungen von  $\psi$ , also im analogen Fall derjenigen von  $\omega$ , keine Spannungsmomente oder Scherungen auf den Plattenaußenrand als Gegengewicht zum Einspannmoment des Innenrandes wirken können. In einer gemeinsam mit de G. Allen vorbereiteten Arbeit soll nachgewiesen werden, daß Stokes es unterließ, eine dem „Widerstand“ entgegengesetzte Kraft vorzusehen.

*J. Pretsch.*

**Constantinescu, V. N.:** Sur l'étude de la lubrification en régime non permanent. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 2, 97—115 (1957).

Ein bisher wenig erschöpfend behandeltes Gebiet der hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung ist die Untersuchung des Verhaltens der Lager im



Bereich zeitabhängiger Vorgänge, z. B. beim An- und Auslaufen des Zapfens, bei Schwingungen des Zapfens im Lager und den damit zusammenhängenden Stabilitätsuntersuchungen. Die vorliegende Arbeit leistet interessante Vorbereitungen zu solchen Untersuchungen. — Die bekannte partielle Differentialgleichung zur Ermittlung der Schmiermitteldrücke, die sogenannte Reynoldssche Gleichung, wird in einer von N. Tipei und Verf. etwas durch allgemeinere Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten an den Oberflächen der Gleitkörper erweiterten Form, aber sonst ungeändert der Untersuchung zugrunde gelegt; es werden lediglich die Dicke des Schmierpaltes, die Viskosität des Schmiermittels sowie die Geschwindigkeitskomponenten der bewegten Flächen als Funktionen der Zeit angesehen, so daß die Zeit also lediglich als Parameter in die Gleichung eingeht. Da die Gleichung linear ist, kann der Schmiermitteldruck nach dem Superpositionsgesetz zerlegt werden in einen Anteil, der nur von den Tangential-, und einen, der nur von den Normalkomponenten der vorgegebenen Geschwindigkeiten der Lagersoberflächen abhängt. Durch die vereinfachende Annahme, daß die Zeit nur als Parameter auftritt, lassen sich die Gleichungen nach denselben Verfahren integrieren, die für die zeitunabhängige „Dauerlösung“ angewandt werden, wobei der einzige Unterschied darin besteht, daß die Integrationskonstanten jetzt auch noch von der Zeit abhängen können. Insbesondere lassen sich für die Lagertypen, für die sich die bisherige, zeitunabhängige Gleichung streng integrieren ließ, die strengen Methoden auch auf die Zeitabhängigkeit ausdehnen. — Als Beispiele werden drei Fälle behandelt, die eine strenge Lösung zulassen: Der ebene Gleitschuh, das Zylinderlager „ohne Radialspiel“, ein Lager, bei dem die Schale den Zapfen unter einem Winkel umschließt, der kleiner als  $180^\circ$  ist, und das sphärische Lager. *W. Kochanowsky.*

**Constantinescu, V. N.:** Considerations on gas lubrication in turbulent flow. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 3, 313—321 (1958).

Das Hauptanwendungsgebiet der Gasschmierung liegt in relativ hochtourigen Lagern, bei denen die Strömung im Innern der Schmierschicht bereits turbulent werden kann. Bei den üblichen Abmessungen und Lagerspielen liegt die Drehzahl, die der kritischen Reynoldsschen Zahl entspricht, etwa bei 80000 Uml./min. einer Größenordnung, die bei schnelllaufenden Maschinen bereits erreicht wird. — Wie aus der Behandlung von turbulenten Grenzschichtproblemen bekannt ist, wird die Bewegung aufgeteilt in eine „mittlere Bewegung“ und eine „Schwankungsbewegung“, die im allgemeinen unregelmäßig und von sehr hoher Frequenz ist. Für die zeitlichen Mittelwerte werden die allgemeinen Navier-Stokesschen Gleichungen für kompressible, viskose Flüssigkeiten und die entsprechende Kontinuitätsgleichung aufgestellt. Die Bewegungsgleichungen werden mit Hilfe der bekannten, auf Reynolds zurückgehenden Annahmen vereinfacht, indem die Ableitungen der turbulenten Spannungen in Bewegungs- und Breitenrichtung gegenüber denen in Richtung der Schmierspaltweite vernachlässigt werden. Der einzige Unterschied gegenüber den Verhältnissen bei laminarer Strömung ist jetzt, daß der Druck in Richtung der Spaltweite nicht mehr konstant ist. — Der Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung wird die Theorie des Prandtlschen Mischungsweges zugrunde gelegt. Da für den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte ein polytropisches Gesetz angenommen wird, ergibt sich schließlich für die Ermittlung des Druckes eine nicht lineare Differentialgleichung. Für deren Lösung wird ein zunächst recht rohes Iterationsverfahren vorgeschlagen, für das weder ein Konvergenzbeweis noch eine Fehlerabschätzung angegeben wird. *W. Kochanowsky.*

**Vasilea, Gh:** Betrachtungen über isothermische Variation der Reibungszahl in Gleitlagern. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 3, 323—332 (1958).

Die meisten veröffentlichten experimentellen Versuchsergebnisse über die Variation der Reibungszahl in Gleitlagern geben in ihrer Darstellung die Reibungszahl als Funktion der Sommerfeldschen Zahl oder bei gleicher Belastung auch als



Funktion der Gleit- bzw. der Umfangsgeschwindigkeit wieder; bisweilen wird der Zusammenhang auch durch Angabe des betreffenden Temperaturzustandes im Lager als Funktion der Geschwindigkeit ergänzt. Wegen der starken Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur geben aber solche Darstellungen oft kein befriedigendes Bild über die Variation der Reibungszahl. Verf. tritt daher dafür ein, die Temperaturabhängigkeit in der Darstellung auszuschalten. Der Verlauf einer „isothermischen Variation“ der Reibungszahl kann mit Hilfe von experimentellen Kennlinien des Druckes als Funktion der Geschwindigkeit bei konstanter Lagertemperatur von vornherein bestimmt werden. — Um dies zu zeigen, wird von der Gleichung für das Wärmegleichgewicht eines kreiszylindrischen Vollgleitlagers,  $f \cdot p V = K q + K_0 Q_0$ , ausgegangen ( $f$  = Reibungszahl,  $p$  = mittlerer Flächendruck,  $V$  = Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens,  $q$  = gesamte durch das Lager in der Zeiteinheit fließende Ölmenge,  $Q_0$  = die durch den Lagerkörper und den Lagerzapfen an die Außenluft in der Zeiteinheit abgeführte Wärmemenge,  $K$  und  $K_0$  der Versuchsdurchführung entsprechende Konstanten). Für die beiden Fälle konstanter und (nach empirischen Gesetzen) veränderlicher Werte  $q$  wird dargestellt, wie sich  $f$  als Funktion von  $V$  ermitteln läßt, wenn  $p$  bzw.  $p V$  in ihrer Abhängigkeit von  $V$  bei konstantem bzw. veränderlichem  $q$  gegeben sind. Es wird auch noch ein dritter Fall diskutiert, nämlich den Verlauf der Reibungszahlkurve bei veränderlichem  $q$  auch mit Hilfe der  $p = p(V)$ -Kennlinie für konstantes  $q$  und konstante Temperatur zu ermitteln.

W. Kochanowsky.

**Tirskij (Tirsky), G. A.:** Unsteady flow with heat transfer in a viscous incompressible fluid between two rotating discs when there is injection of the fluid. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 226—228 (1958) [Russisch].

The author examines the problem for the unsteady flow with heat in a viscous incompressible fluid between two rotating infinite extended discs at constant distance  $h$ . According to the boundary conditions, at the origin the fluid is motionless, the discs are rotating with time-dependent angular velocity  $w_0(t)$  and  $w_1(t)$ , and from every disc is fluid-injection with time-dependent velocity  $v_0(t)$  and  $v_1(t)$ . Going out of the Navier-Stokes equation in cylindrical coordinates without the influence of the gravity acceleration, of the boundary conditions by existence of axial symmetry, the author finds out an allowable general solution. Similarly solved is the problem of the heat transfer going out of the equation for the heat balance. Rigorous solution of the obtained differential equations is possible only with the numerical method.

W. Iwanow.

**Kirkaldy, J. S.:** The time-dependent diffusion theory for condensation on spherical and plane surfaces. Canadian J. Phys. 36, 446—455 (1958).

The author demonstrates that the generally accepted quasi-stationary diffusion theory cannot be validly applied to the problem of condensation or evaporation at the surface of a sphere immersed in an infinite or semi-infinite medium even though the procedure leads to the correct rate of growth for condensation of water vapor on spherical drops. It is demonstrated also that the quasi-stationary diffusion theory for spherical drops leads fortuitously to the correct growth law. The diffusion field and the temperature distribution are calculated for the surroundings of a pure solid or liquid phase at constant temperature growing into an infinitely extended lineary fluid phase of different specific volume. The solutions for spherical condensates are applicable to the condensation from air of water vapor on ice crystals or water drops. The diffusion field about a very slowly condensing or evaporating shape which is enclosed by a boundary at fixed composition must rapidly attain an approximate steady state and therefore be amenable to the quasi-stationary calculation.

W. Iwanow.

**Poots, G.:** Heat transfer by laminar free convection in enclosed plane gas layers. Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 257—273 (1958).

Untersucht wird die ebene Konvektionsströmung zwischen zwei horizontalen, vertikalen oder schrägen parallelen Platten endlicher Ausdehnung, die beide auf verschiedenen konstanten Temperaturen gehalten werden; der seitliche Abschluß der Gasschicht wird durch zwei Platten gebildet, auf denen die Temperatur linear anwächst oder die als isolierend angenommen werden. Annahmen: Kleine Temperaturdifferenzen, inkompressibles Medium. Nach Formulierung der Grundgleichungen kommt Verf. zu zwei partiellen Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung für die dimensionslose Temperaturverteilung  $\theta$  und für die Stromfunktion  $\psi$  mit Grenschichttrandbedingungen an den Wänden. Für  $\theta$  wird eine trigonometrische Doppelreihe angesetzt, für  $\psi$  eine solche aus Orthogonalfunktionen, die so bestimmt werden, daß jede von ihnen die Randbedingungen für  $\psi$  erfüllt; sie erweisen sich als die Eigenfunktionen des an beiden Enden eingespannten schwingenden Balkens. Einsetzen liefert nach einfachen Umformungen Bestimmungsgleichungen für die Reihen-koeffizienten. Die Konvergenz der angesetzten Reihen wird nicht streng bewiesen. Physikalische Ergebnisse: Graphische Darstellung der Nusselt-Zahl über der Grashof-Zahl bei fester Rayleigh-Zahl  $A$ . Darstellung der Isothermen für  $A = 10^4$ ; die Verzweigung der Isotherme  $\theta = \frac{1}{2}$  zeigt, daß hier ein isothermer Kern vorhanden ist.

G. Hämmerlin.

Merk, H. J.: Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. V: Influence of heat transfer in the burner ports on the stability of combustion of premixed gases. Appl. sci. Research, A 8, 1—27 (1958).

Der Verf., der schon mehrere Arbeiten (dies. Zbl. 77, 185; 78, 167; 79, 405) über die durch Wärmezufuhr bedingten Pulsationen in Brennkammern verfaßt hat, dehnt die Annahmen in dieser Arbeit auf Wärmeübergang am Brenner und an den Brennkammerwänden aus. Der Wärmeübergang wird durch Einführen von Wärmeübergangszahlen für quasistationäre Strömung berücksichtigt. Das Modell wird auf den Bereich niedriger Frequenzen und niedriger Machzahlen angewendet und diskutiert.

K. Oswatitsch.

Parkus, Heinz: Zur Stabilität des Hubschraubers. Jahrbuch 1956 der Wiss. Ges. Luftfahrt 55—57 (1957).

Es werden die Bewegungsgleichungen des Hubschraubers für die Längsstabilität abgeleitet. Dabei wird für jedes Blatt ein eigener Freiheitsgrad zugelassen. Das bedeutet, daß die Rotorblätter nicht in einer Konusfläche zu liegen brauchen. Diese allgemeinen, also ohne einschränkende Annahmen in der Schlagbewegung abgeleiteten Bewegungsgleichungen führen zu einem System von linearen Differentialgleichungen mit harmonischen Koeffizienten von der Periode des Blattumlaufwinkels. Diese Bewegungsgleichungen sind von besonderer Bedeutung bei Schwingungen, deren Frequenzen in der Größenordnung der Rotordrehgeschwindigkeit liegen. Bei langsamen Schwingungen und Steuerbewegungen lassen sich die Bewegungsgleichungen näherungsweise auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Die vom Verf. aufgestellten Bewegungsgleichungen unterscheiden sich beim Zweiblattrotor von denen des Drei- und Mehrblattrotors. Dies hängt mit der dynamischen Unsymmetrie des Zweiblattrotors zusammen. Beim Drei- und Mehrblattrotor verschwinden einige periodische Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen oder werden konstant.

W. Just.

Bacon, Ralph Hoyt: Logarithmic spiral: An ideal trajectory for the interplanetary vehicle with engines of low sustained thrust. Amer. J. Phys. 27, 164—165 (1959).

Es werden die Maschinenkräfte berechnet, die nötig sind, um ein interplanetarisches Raumschiff in einer logarithmischen Spirale  $r = r_0 e^{\theta \cotg \psi}$  von der Erde zu einem anderen Planeten zu bringen; sie ergeben sich als zu  $r^2$  proportional. Druckfehler: in (3) muß es heißen:  $r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$ ; in (5)  $\exp \frac{3}{2} \theta \cotg \psi = 1 + \frac{3}{2} \cos \psi (k^{1/2}/r^{3/2})t$ .

O. Volk.

**Oswatitsch, K. und I. Teipel:** Verträglichkeitsbedingungen für instationäre Strömung. *Z. angew. Math. Mech.* **38**, 73—74 (1957).

Für die instationäre, eindimensionale Gasströmung ohne Wärmezufuhr werden die Verträglichkeitsbedingungen (Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen längs einer Charakteristik) auf geeignete neue Variable umgeschrieben für die Fälle, daß der Querschnitt des Stromfadens a) eine reine Funktion von  $x$  ist und Isentropie vorausgesetzt wird, b) eine reine Funktion der Zeit ist. *H. Wendt.*

**Spannhake, Wilhelm:** Dimensionslose Theorie der isentropischen Gasströmung durch Kreisräder unter der Voraussetzung kleiner Breite und unendlicher Schaufelzahl (Stromfadentheorie). *Z. angew. Math. Phys.* **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 642—647 (1958).

Verf. betrachtet die Gleichungen für die verlustlose Gasströmung durch ein radiales Schaufelrad und mit unendlicher Schaufelzahl. Es wird ein Diagramm aufgestellt, das es erlaubt, zu einem vorgegebenen Anfangszustand, also zu vorgegebener Energie, Geschwindigkeit und Strömungsrichtung bei einem Radius  $r_0$  die entsprechenden Werte für jeden Radius  $r$  anzugeben, sofern der Arbeitsaustausch zwischen Strömung und Schaufeln als Funktion von  $r$  bekannt ist. Umgekehrt kann auch die Zustandslinie zwischen  $r$  und  $r_0$  vorgegeben und der dazugehörige Arbeitsaustausch berechnet werden. Im Gegensatz zu den bekannten Diagrammen von A. Betz [*Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* **18**, 61—71 (1952)] gelingt Verf. durch die Wahl geeigneter Variabler eine Darstellung, die unabhängig vom Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa$  ist, also universell für alle idealen Gase gilt. Dieser Vorteil wird allerdings durch den Nachteil erkauft, daß die im Diagramm auftretenden Variablen keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben, sondern die wirklich interessierenden Größen noch nachträglich berechnet werden müssen. *G. Jungclauss.*

• **Mises, Richard von:** Mathematical theory of compressible fluid flow. Completed by Hilda Geiringer and G. S. S. Ludford. (Applied Mathematics and Mechanics. Vol. 3.) New York and London: Academic Press Inc., Publishers 1958. XIII, 514 p. \$ 15.00.

Die ersten 3 dieses insgesamt 5 Kapitel umfassenden Werkes wurden noch von R. v. Mises († 1953) selbst verfaßt, die letzten an Hand seiner Notizen von H. Geiringer und G. S. S. Ludford. Es ist für fortgeschrittene Leser gedacht und enthält im einzelnen in Kapitel I eine Diskussion der Grundlagen (darunter die v. Mises'sche Konzeption der „spezifizierenden Gleichung“), in Kap. II allgemeine Theoreme (Wirbelsätze, Charakteristiken), in Kap. III die Behandlung eindimensionaler stationärer und instationärer Vorgänge (Verdichtungsstoß), in Kapitel IV die Grundgleichungen für ebene stationäre Potentialströmungen, insbesondere unter Heranziehung der Hodographenmethode und schließlich in Kapitel V deren Integrationstheorie sowie die Behandlung des allgemeinen Verdichtungsstoßes anisentroper und transsonischer Strömungen. Die Grundgleichungen werden in klassischer Weise in differentieller Form abgeleitet, und unter Wahrung voller mathematischer Strenge wird ein Maximum von Aussagen über das Verhalten ihrer Lösungen gewonnen. Auf die sich aus einer Linearisierung der Grundgleichungen ergebenden Näherungstheorien, für die ein zweiter Band vorgesehen war, wird nicht eingegangen. Das Werk ist von einer bewundernswerten Geschlossenheit und Gründlichkeit der Darstellung. Als Beispiel sei nur auf die Behandlung der sogenannten Grenzlinien verwiesen, die geeignet ist, verschiedene zuweilen vorhandene fehlerhafte Vortellungen zu berichtigen. Einen besonderen Hinweis verdienen auch die 37 Seiten umfassenden Anmerkungen zu den einzelnen Kapiteln, die teils historischer Natur sind, teils sich in erläuternder Form auf Originalarbeiten beziehen. Dieses letzte Werk von R. v. Mises erscheint für Mathematiker, Physiker und Ingenieure in gleicher Weise bedeutsam. *R. Schwarzenberger.*



● **Bers, Lipman:** *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics.* (Surveys in Applied Mathematics. Vol. 3.) New York: John Wiley & Sons, Inc. 1958. XV, 278 p. \$ 7,75.

Der Theorie kompressibler Strömungen (Gasdynamik) liegt ein nichtlineares Differentialgleichungssystem zugrunde, das — und hierin drückt sich die entscheidende mathematische Schwierigkeit aus — im allgemeinen nicht von einheitlichem Typus ist. Selbst unter den erheblich vereinfachenden Annahmen der Reibungs- und Wirbelfreiheit sowie bei Beschränkung auf ebene und stationäre Gasströmungen, was in der vorliegenden Monographie vorausgesetzt wird, hat man es mit einer partiellen „gemischten“ Differentialgleichung 2. Ordnung zu tun, die im Unterschallbereich elliptisch, im Überschallbereich hyperbolisch ist. Als Folge der Nichtlinearität wird der Typuswechsel längs der „Schallgrenze“ nicht allein durch die Differentialgleichung bestimmt, sondern die Lage dieser Übergangslinie(n) im Strömungsfeld hängt außerdem implizit von den Randbedingungen ab und ist so zusammen mit der Lösung erst mitzubestimmen. Die theoretische Behandlung solcher Strömungsprobleme erfordert daher den Einsatz eines erheblichen mathematischen Apparates; andererseits führen die Anwendungen zu mannigfachen mathematisch reizvollen und bislang ungelösten Fragestellungen, so daß es kaum überrascht, wenn Fachmathematiker hier weitgehend auf die Entwicklung der Forschung Einfluß genommen haben. Ihre dem Strömungsphysiker aber oft nur mühsam verständlichen Arbeiten machen es notwendig, daß von Zeit zu Zeit ein kritisch gesichteter Überblick über den Forschungsstand und die aktuellen Probleme in einer auch den Praktiker ansprechenden Art gegeben wird. Dieses Ziel hat Verf. mit seiner Monographie offenbar angestrebt und — wie Ref. mit Nachdruck hervorheben möchte — voll erreicht. Der behandelte Stoff ist in fünf Kapitel gegliedert. Im 1. Kapitel werden nach den Grundlagen die verschiedenen Modifikationen der Potentialgleichung und ihre Approximationen sowie die Methoden zur Gewinnung von Partikulärlösungen dargelegt. Die Kapitel 2 und 3 befassen sich dann mit den mathematischen Theorien zur Behandlung reiner Unterschallströmungen. Von größtem Interesse und Wert sind die Kapitel 4 und 5, die dem so umstrittenen Problemkreis der „transsonischen“ Strömungsfelder gewidmet sind und auch bisher unveröffentlichte Ergebnisse enthalten. Im Anhang finden sich einige kurze aber aufschlußreiche Bemerkungen über die Verwendbarkeit der Methoden zu praktischen Rechenverfahren. Das Hauptgewicht bei diesem „vom Standpunkt eines Mathematikers geschriebenen Buche“ liegt auf der mathematischen Methodik, ohne daß jedoch die Beziehung zum gasdynamischen Hintergrund verloren ginge. Manche inzwischen schon historischen Themen werden nur beschreibend abgehandelt unter Hinweis auf die Original-Literatur, deren Zusammenstellung in ihrer Ausführlichkeit erschöpfend sein dürfte. Bei aller Strenge versteht es Verf. mit außerordentlichem didaktischen Einfühlungsvermögen, prägnant und anschaulich die mathematisch wesentlichen Gesichtspunkte herauszuarbeiten, was vor allem bei der transsonischen Problematik klar zutage tritt. Seine überlegene Einsicht läßt ihn auch — im Gegensatz zu anderen einschlägigen Darstellungen — eine einseitige Stellungnahme zu umstrittenen Resultaten ausdrücklich vermeiden (S. 112f.). Der dem Mathematikbeflissenen viele Anregungen bietende wie für den Spezialisten zur Orientierung (durch rasches „Einlesen“ an beliebiger Stelle) bestens geeignete Band der bekannten Serie bedarf nach Ansicht des Ref. kaum besonderer Empfehlung.

*Manfred Schäfer.*

**Yih, Chia-Shun:** *Maximum speed in steady subsonic flows.* Quart. appl. Math. 16, 178—180 (1958).

La note est consacrée à l'étude des conditions sous lesquelles la vitesse d'un fluide compressible atteint son maximum. Le mouvement est supposé subsonique isentropique et irrotationnel. Les résultats obtenus sont analogues à ceux qui correspondent à un mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible. *C. Woronetz.*

**Helliwell, J. B.:** An application of the Weber-Orr transform to the problem of transonic flow past a finite wedge in a channel. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 54, 391—395 (1958).

Im Anschluß an frühere Arbeiten (Verf.-Mackie; Verf.; Mackie-Pack: dies. Zbl. 78, 402; 80, 401; 64, 205) wird mit Hilfe von Hodographen-Methoden die ebene Strömung um einen nicht angestellten Keil im Kanal mit Totwasser dahinter berechnet. Im vorliegenden Fall wird angenommen, daß die Geschwindigkeit auf der freien Stromlinie im Gebiete sehr hoher Unterschallgeschwindigkeit liegt. Das Problem ist physikalisch nahe verwandt mit einer von A. Weinstein [*Proc. Naval Ordnance Lab. aeroball. Res. Symp.*, White Oak, Md., Rep. **NOLR—1332**, 73—82 (1950)] behandelten Strömung um einen stumpfen Keil, worauf allerdings nicht hingewiesen wird. *K. Oswatitsch.*

• **Landahl, Mårten T.:** Theoretical studies of unsteady transonic flow. Stockholm 1959. 12 p. Diss.

In dieser Arbeit wird eine Übersicht über fünf frühere Veröffentlichungen des Verf. [*Flygtekn. Försöksanstalt, Meddel.* 77, 78, 79, 80 (1958), 81 (1959)], die alle zusammen als Dissertation eingereicht wurden, gegeben. Sie beziehen sich durchwegs auf die Berechnung von Flatterbeiwerten in Schallnähe mit linearen Theorien. Einige Vergleiche mit Versuchen werden abschließend beigelegt. *K. Oswatitsch.*

**Nickel, Karl:** Das Unabhängigkeitsprinzip bei dreidimensionalen Grenzschichten. *Arch. der Math.* 9, 313—320 (1958).

Das historisch zuerst auf die laminaren Grenzschicht-Differentialgleichungen bei stationärer inkompressibler Strömung beschränkte Unabhängigkeitsprinzip (Zerfallung des dreidimensionalen Systems in ein zweidimensionales mit einer — linearen Zusatzgleichung bei Unveränderlichkeit der Werte von Druck und Geschwindigkeit in einer ausgezeichneten Richtung) wird in kartesischen Koordinaten zunächst für die vollständigen Navier-Stokesschen Gleichungen ausgesprochen. Anschließend wird diese Verallgemeinerung auf krummlinige Koordinatensysteme ausgedehnt, aber aus Gründen der Übersichtlichkeit nur für den Fall der laminaren Grenzschichten durchgeführt. Die Unabhängigkeitsbedingung nimmt dabei eine etwas weitergehende Form an, deren Erfüllung zusammen mit einer verallgemeinerten Mangler-Transformation zu einer ähnlichen Zerfallung führt wie im klassischen Fall. Die neu formulierten Unabhängigkeitsbedingungen gestatten es, auch das Prävalenzprinzip zu präzisieren und als Näherungsform dem verallgemeinerten Unabhängigkeitsprinzip unterzuordnen. Schließlich wird auf andere Möglichkeiten der Zerfallung von dreidimensionalen Systemen nach v. Mises und Crocco hingewiesen. Die Arbeit führt eine Systematisierung einer in der bisherigen Literatur mehr heuristisch behandelten Gruppe von dreidimensionalen Grenzschichten durch, die für die Tragweite der verschiedenen Formen des Unabhängigkeitsprinzips von grundlegender Bedeutung ist. *E. A. Eichelbrenner.*

**Hains, Franklin D.:** Similar solution of a laminar boundary layer with rotational free stream. *J. Aero-Space Sci.* 25, 662 (1958).

Es wird eine Lösung der zweidimensionalen Grenzschichtgleichungen angegeben, die den folgenden Randbedingungen genügt:  $u = v = 0$  für  $y = 0$ ,  $u_y = \text{const}$  für  $y = \infty$  ( $y$  Koordinate senkrecht zur umströmten Wand,  $u$  bzw.  $v$  Geschwindigkeitskomponente parallel bzw. senkrecht zur Wand). Die Anwendung einer geeigneten Transformation ermöglicht die Reduktion des Problems auf die Lösung eines Randwertproblems einer gewöhnlichen Differentialgleichung 3. Ordnung. Die Lösung dieses Randwertproblems erfolgt durch Zusammenschluß einer Potenzreihenentwicklung für kleine Werte der Ähnlichkeitsvariablen  $\eta$  und einer asymptotischen Entwicklung für große Werte von  $\eta$  an einer geeigneten Stelle  $\eta = \eta^*$ . *Th. Geis.*

**Meksyn, David:** The boundary-layer equation for axially symmetric flow past a body of revolution-motion of a sphere. *J. Aero-Space Sci.* 25, 631—634, 664 (1958).



In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 73, 312) gab Verf. ein Verfahren an zur Integration der Grenzschtgleichungen für den Fall ebener laminarer Strömungen. Es beruht im wesentlichen darauf, daß die Grenzschtgleichungen überführt werden in eine Integrodifferentialgleichung, deren Lösung durch Benutzung von Potenzreihen gewonnen wird. Die dort angegebene Methode wird in der vorliegenden Arbeit unter Benutzung einer Verallgemeinerung der Manglerschen Transformation übertragen auf den Fall der Grenzschtberechnung längs eines Rotationskörpers, der axial-symmetrisch angeströmt wird. Als Anwendung wird der Fall der Kugel durchgerechnet. Werte für Wandschubspannung und Ablösungsstelle werden angegeben und mit experimentellen Resultaten von A. Fage verglichen. *Th. Geis.*

**Varley, E.: An approximate boundary layer theory for semi-infinite cylinders of arbitrary cross-section.** J. Fluid Mechanics 3, 601—614 (1958).

Der Einfluß der Querkrümmung der Strömung längs eines halb-unendlichen, längs angeströmten Zylinders beliebigen Querschnittes wird mit einer Pohlhausen-Methode abgeschätzt, insbesondere auch der laminare Reibungswiderstand elliptischer Zylinder (bis zur Platte endlicher Breite). Anm. des Ref.: Vergleicht man örtliche, oder daraus integrierte Gesamtwiderstandsbeiwerte, so ergibt sich nach Gl.(39): der Kreiszyylinder hat bei kleinen Reynolds-Zahlen größeren — bei großen Re-Zahlen kleineren — Widerstand als ein elliptischer Zylinder gleichen Umfangs. Nach J. C. Cooke (dies. Zbl. 79, 182), der ein anderes Pohlhausen-Verfahren benutzt, hat jedoch der Kreiszyylinder stets größeren Widerstand. Es erscheint daher fraglich, ob überhaupt ein Pohlhausen-Verfahren solche Feinheiten der Grenzschtströmung noch richtig wiedergeben kann. *K. Wieghardt.*

**Watson, J.: A solution of the Navier-Stokes equations illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velocity.** Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 302—325 (1958).

In dieser Arbeit wird die instationäre Grenzscht längs einer ebenen durchlässigen Wand bei konstanter Absaugung untersucht; für die von der Koordinate längs der Wand unabhängige Grundströmung wird dabei eine Form  $U(t) = U_0 [1 + f(t)]$  angenommen (Stuart). In einem allgemeinen Teil werden Formeln für das Geschwindigkeitsprofil, für die Verdrängungsdicke und für die Wandschubspannung gewonnen. Diese Formeln enthalten die zeitliche Variation  $f(t)$  der Grundströmung und ergeben sich durch Anwendung von Laplace-Transformationen. Alsdann werden die genannten allgemeinen Formeln in folgenden speziellen Fällen ausgewertet: 1. Zeitlich periodische Grundströmung, 2. ruckartige Veränderung der konstanten Grundgeschwindigkeit  $U_0$  auf einen anderen konstanten Wert sowie mehrere solcher ruckartiger Veränderungen, 3. linear anwachsendes  $U(t)$  von einem bestimmten  $t_0$  an sowie mehrere solcher Beschleunigungen und 4. gedämpfte oszillierende Außenströmung  $U(t)$ . Die Wandschubspannung in Abhängigkeit von der Zeit wird in jedem der genannten Fälle noch in einer graphischen Darstellung gegeben. *G. Hämmerlin.*

**Eckert, Ernst R. G. und James P. Hartnett: Einfluß eines Verbrennungsvorganges auf den Wärme- und Stoffaustausch in einer laminaren Grenzscht.** Z. angew. Math. Phys. 9b, Festschrift Jakob Ackeret 259—273 (1958).

In dieser Arbeit wird ein für die Praxis interessantes Problem — die Kühlung von Konstruktionselementen, die bei ihrer Umströmung hohen Temperaturen ausgesetzt werden — grenzscht-theoretisch durch ein vereinfachtes Modell untersucht. Betrachtet wird die laminare Grenzschtströmung eines Gases parallel zu einer ebenen Platte. Ein anderes Gas, das als Kühlmittel dient, wird durch die Poren der Platte ausgeblasen oder durch Verdampfen an der Plattenoberfläche erzeugt. Vereinfachend wird angenommen, daß alle Stoffwerte innerhalb der Grenzscht unabhängig von der Temperatur und der Zusammensetzung des Gases sind und daß die Verbrennung zwischen den beiden Gasen mit sehr großer Reaktions-



geschwindigkeit verläuft. Verf. betrachtet zunächst die Verhältnisse, die ohne Verbrennung entstehen, wobei die Grenzschtgleichungen für den Impuls-, Energie- und Stoffaustausch sowie die entsprechenden Grenzbedingungen identisch sind, wenn man die Prandtl'sche Zahl  $Pr = 1$  und die Schmidt'sche Zahl  $Sc = 1$  setzt. Die Resultate führen auf eine „ähnliche“ Lösung und hängen von dem Massenstromparameter  $V_w / \sqrt{Re/U_\infty}$  ab, wobei  $U_\infty$  die äußere Geschwindigkeit parallel zur Platte und  $V_w$  die Geschwindigkeit an der Wand normal zur Platte bedeutet. Dieser Parameter, der das Geschwindigkeitsverhältnis des Kühlmittelausblasens zur Hauptströmung wiedergibt, kann nach diesen Untersuchungen höchstens bis 0,619 ansteigen, da bei diesem Wert die Profile für die Geschwindigkeit, die Temperatur bzw. das Massenverhältnis sich von der Oberfläche ablösen. Weiter wird eine chemische Reaktion zwischen den beiden Gasen angenommen, und zwar so, daß die Verbrennung unmittelbar an der Oberfläche verläuft, was kleinen Werten der Massenstromparameter entspricht. Das so gestellte Problem erfordert vor allem für die Bestimmung des Stoffaustausches in der Grenzscht zusätzliche Differentialgleichungen, die alle aber wieder auf „ähnliche“ Lösungen führen. Die in der Arbeit angegebenen numerischen Ergebnisse zeigen, daß für jede Gaszusammensetzung ein bestimmtes Maximum für den Massenstromparameter besteht, der die Geschwindigkeit des Verbrennungsablaufes wiedergibt. — Parallel sind die aus der Untersuchung eines Flugkörpers erhaltenen Resultate dargelegt, die darauf hinweisen, daß die Oberflächenverbrennungen den Wärmeübergang von der Grenzscht zur Wand wenig beeinflussen. Am Ende wird der Fall diskutiert, daß die durch größere Massenstromparameter bestimmte Trennung der Reaktionszonen von der Plattenoberfläche entsteht. Die entsprechenden Ergebnisse sollen in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden.

V. Saljnikov.

**Le Fur, Bernard:** Facteur thermique pariétal et densité de flux de chaleur à la paroi dans une couche limite laminaire à propriétés physiques constantes, avec gradient de pression. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 2287—2290 (1958).

L'A. obtient par itérations successives une solution approchée des équations de la couche-limite thermique sous l'hypothèse d'un écoulement laminaire en fluide à propriétés physiques constantes. Les itérations partent d'une solution triviale du système transformé aux variables  $x$  et  $\psi$ , laquelle cependant ne satisfait pas à la condition d'un gradient de pression non nul. Cette condition intervient à partir d'une première approximation, les conditions aux limites complètes lors de l'établissement de la deuxième. Les équations donnant cette dernière sont la forme inhomogène d'un système résolu par Lighthill pour le cas sans échauffement dû au frottement. Par une variation des constantes, on en déduit l'expression du flux de la chaleur à la paroi donné par une intégrale de Stieltjes analogue à la solution de Lighthill, mais comportant la température de frottement  $\theta_f$ . De là on tire une expression analytique pour le facteur thermique pariétal qui se révèle indépendant du gradient de pression; on retrouve en effet, sous forme de séries hypergéométriques, une fonction du nombre de Prandtl qui interpole très correctement les résultats connus de E. Pohlhausen pour le cas de la plaque plane. La forme analytique permet une extrapolation des résultats pour nombres de Prandtl tendant vers l'infini et vers zéro. E. A. Eichelbrenner.

**Hasimoto, Hidenori:** Boundary-layer slip solutions for a flat plate. J. aeronaut. Sci. **25**, 68—69 (1958).

Im Falle einer Strömung hochverdünnter Gase mit großer freier Weglänge der Moleküle ist in der Grenzschtgleichung die Randbedingung verschwindender Tangentialgeschwindigkeit an der Wand, also  $u = 0$  für  $y = 0$ , zu ersetzen durch  $u = h \, du/dy$  für  $y = 0$  („Slip Flow“), wobei  $h$  proportional zur freien Weglänge der Moleküle ist. Der Verf. zeigt, daß sich dann die Grenzschtgleichung im Falle der Plattenströmung (also konstante Geschwindigkeit  $u_\infty$  außerhalb der Grenzscht) mit Hilfe der Mises-Transformation (Stromfunktion  $\psi$  und Koordinate längs

der Platte  $x$  als unabhängige Variable) und einer weiteren Transformation

$$\xi = 2 \sqrt{\nu/x} u_{\infty} x/h; \quad \eta = \frac{1}{2} (\psi/u_{\infty} x) \sqrt{u_{\infty} x/\nu}$$

so vereinfacht, daß der Ansatz  $u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n f_n(\eta)$  auf ein System einfach gebauter linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für die  $f_n(\eta)$  führt. Die Koeffizienten  $f_1$  und  $f_2$  werden explizit berechnet und damit die Wandschubspannung und der Plattenwiderstand angegeben. Eine Berechnung von höheren Koeffizienten  $f_n$  scheint nicht viel komplizierter zu werden, und es liegt hier also eine exakte Lösung der Grenzschichtgleichung bei „Slip Flow“ für die Plattengrenzschicht vor. Da über die Konvergenz keine Aussage gemacht wird, bleibt allerdings die Frage offen, ob diese Lösung eine physikalische Realität hat, denn es handelt sich um eine Entwicklung für kleine  $\xi$  und damit große freie Weglänge  $h$ , und es ist nicht bekannt, wie weit in diesem Fall die auf die Kontinuumstheorie aufbauende Grenzschichtgleichung angewandt werden darf.

*G. Jungclauss.*

**Rossow, Vernon J.:** On magneto-aerodynamic boundary layers. Z. angew. Math. Phys. **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 519—527 (1958).

Als Modell für eine Hyperschall-Grenzschicht betrachtet Verf. die laminare Grenzschicht eines inkompressiblen Mediums konstanter Zähigkeit und der Prandtl-Zahl Eins bei zweidimensionaler stationärer Strömung entlang einer ebenen Platte. Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  des Mediums hänge gemäß

$$\sigma = \sigma_0 \exp 0,1084 \sqrt{|T - 4300|} \operatorname{sign}(T - 4300)$$

allein von der örtlichen Temperatur  $T$  (in °K) ab (entspricht nach Messungen dem Verhalten von Luft). Außer durch die Reibung sollen noch Kräfte auf das strömende Medium übertragen werden durch ein örtlich und zeitlich konstantes Magnetfeld, das a) relativ zur Platte, b) relativ zur Strömung in Ruhe bleibt. Behandlung des Problems durch Störungsrechnung: Verf. setzt den bekannten Zusammenhang zwischen Temperatur  $T$  und örtlicher Strömungsgeschwindigkeit bei Abwesenheit eines Magnetfeldes und bei den Randbedingungen Wandtemperatur = Außentemperatur in die Grenzschicht-Differentialgleichungen und die Temperatur-Differentialgleichung ein und gibt — ausgehend von Blasius- und Pohlhausen-Lösung als nullter Näherung — für die Geschwindigkeits- und Temperatur-Verteilung je eine erste Näherung an. Numerische Durchrechnung für eine Machzahl  $\approx 40$ . Folgerungen: Wandreibung und Wärmeübergang werden bei a) verkleinert, bei b) vergrößert; jedoch bleibt die Summe aus Wandreibung und magnetischer Bremskraft stets größer als im Falle verschwindenden Magnetfelds.

*K. Nickel.*

**Reid, W. H.:** On the stability of viscous flow in a curved channel. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **244**, 186—198 (1958).

Eine laminare zähe Strömung zwischen zwei ruhenden, achsengleichen Zylindern ist anfällig gegenüber Taylor-Wirbeln. In der vorliegenden Arbeit werden zur Lösung der linearisierten Störungsdifferentialgleichungen des Problems Reihen trigonometrischer Funktionen angesetzt. Die Forderung nach Erfüllung der Randbedingungen an den Kanalwänden führt zu approximierenden Bestimmungsgleichungen für die Eigenwerte  $\operatorname{Re} \sqrt{d/R}$  ( $\operatorname{Re}$  = Reynoldssche Zahl der Grundströmung,  $d$  = Kanalbreite,  $R$  = Radius der äußeren Kanalberandung) in Abhängigkeit von der Dicke der angesetzten Wirbel. Die früheren Resultate von Dean [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **121**, 402—420 (1928)] werden bestätigt, während sich diejenigen von Yih und Sangster als falsch erweisen (vgl. dies. Zbl. **77**, 187). Verf. gibt auch das Aussehen der Störströmung an. Ref. gelangt in einer etwa gleichzeitig erschienenen Arbeit über dasselbe Thema zu inhaltlich gleichen Feststellungen (dies. Zbl. **81**, 411); die in der Arbeit des Ref. verwandten mathematisch strengen Methoden machen überdies Genauigkeitsangaben der numerischen Werte möglich.

*G. Hammerlin.*

Sparrow, E. M., T. M. Hallman and R. Siegel: Turbulent heat transfer in the thermal entrance region of a pipe with uniform heat flux. Appl. sci. Research, A 7, 37—52 (1957).

Die Verff. behandeln die turbulente Wärmeübertragung im thermischen Einlaufgebiet eines Rohres mit gleichmäßigem Wärmestrom durch die Wand. Die Stoffwerte werden konstant angenommen. Die Geschwindigkeitsverteilung entspricht derjenigen der ausgebildeten Rohrströmung. Die Austauschkoefizienten für Impuls und Wärmeaustausch werden gleichgesetzt. Zur Lösung des Problems wird die Temperaturverteilung in zwei Anteile aufgespalten, wobei der eine Anteil der vollausgebildeten Temperaturverteilung entspricht. Der zweite Anteil entspricht der zusätzlichen Temperaturverteilung im Einlauf, der mit der Lauflänge auf Null abklingt. Die Lösung ist die eines Eigenwertproblems von Sturm-Liouville-Typus. Die ersten sechs Eigenwerte und die vollausgebildete Temperaturverteilung wurden numerisch für Prandtl-Zahlen 0, 7, 10, 100 und für Reynoldszahlen 50 000, 100 000 und 500 000 berechnet. Die ermittelten Nusseltschen Zahlen wurden mit Rechnungen und Versuchsergebnissen anderer Autoren verglichen. Ferner wurde die Wirkung der Randbedingungen untersucht, indem die Ergebnisse mit konstantem Wärmestrom mit solchen Untersuchungen verglichen wurden, denen konstante Wandtemperatur im Einlauf zugrunde liegt.

*J. Rotta.*

Batchelor, G. K.: Diffusion in free turbulent shear flows. J. Fluid Mechanics 3, 67—80 (1957).

Für Scherströmungen mit freier Turbulenz (Strahl und Nachlauf, eben und rund), die an einem (ideellen) Punkt entstehen und stromabwärts in raumfesten Eulerkoordinaten ähnlich geworden sind, wird angenommen, daß die Verteilung der Geschwindigkeit und ihrer Schwankungen auch in Lagrangeschen Teilchen-Koordinaten ähnlich ist. Die daraus folgenden Ergebnisse für die Ausbreitung und Konzentrationsabnahme markierter Teilchen entsprechen denen von Mischungsweg-Annahmen.

*K. Wieghardt.*

Müller, E.-A. und K. Matschat: Zur Lärmerzeugung durch abklingende homogene isotrope Turbulenz. Z. Flugwiss. 6, 161—170 (1958).

Die Schallerzeugung durch Turbulenz hat in neuerer Zeit große praktische Bedeutung für Flugzeuge mit Strahltriebwerken erlangt. Die aus einem endlichen Gebiet  $V$ , in dem sich die Flüssigkeit in turbulenter Bewegung befindet, momentan abgestrahlte Schallstärke läßt sich aus dem Energiespektrum der Turbulenz ermitteln. Durch Integration über die Abklingzeit ergibt sich die gesamte Schallenergie. Das Abklingen der Turbulenz wurde näherungsweise vermittle der Heisenbergschen Integrodifferentialgleichung unter Annahme eines rechteckigen Anfangsspektrums berechnet. Für die Turbulenzbewegung wurde dabei das Medium als inkompressibel betrachtet. Die insgesamt abgestrahlte Schallenergie läßt sich dann im Verhältnis zur im Anfang vorhandenen Turbulenzenergie darstellen. Dies Verhältnis wächst mit der 5. Potenz der Machzahl  $(v_0^2)^{1/2}/c_0$  und nimmt stark mit der Reynoldszahl  $(v_0^2)^{1/2} L_0/\nu$  zu. Dabei ist  $\bar{v}_0^2$  der quadratische Mittelwert der turbulenten Schwankungsgeschwindigkeit und  $L_0$  die mittlere Größe der Turbulenzballen zu Beginn des Abklingens;  $c_0$  ist die Schallgeschwindigkeit. Die sich aus den Rechnungen ergebenden Schlußfolgerungen für die Geräuschverminderung bei Flugzeugstrahltriebwerken werden diskutiert.

*J. Rotta.*

• Krasnov, N. F.: Aerodynamik der Rotationskörper. [Aérodinamika tel vraščeniya.] Moskau: Staatsverlag für Verteidigungsindustrie 1958. 560 S. R. 13,10 [Russisch].

Verf. gibt uns in diesem Buch eine Zusammenfassung der Methoden und Ergebnisse der Aerodynamik rotationssymmetrischer Körper. Es ist Verf. gelungen, einen guten theoretischen Untergrund aufzubauen und die erhaltenen



theoretischen Resultate praktisch auszuwerten. Im ersten Kapitel werden Grundbegriffe und Gleichungen der Aerodynamik der Rotationskörper besprochen. Im zweiten finden wir Theorie und Rechenbeispiele für die Überschallströmung an einem unendlichen Kegel, sowohl ohne als auch mit Anstellwinkel. Die Charakteristikenmethode wird im dritten Kapitel ausgelegt. Weitere Kapitel tragen die Überschriften: Die Aerodynamik der Rotationskörper für große Machzahlen der ungestörten Strömung. Der Widerstand dünner Rotationskörper in der linearisierten Strömung. Die Tragkraft dünner Rotationskörper in der linearisierten Strömung. Ein Teil des zuletzt genannten Kapitels bespricht die Interferenz zwischen dem Rotationskörper und einem sich auf ihm befindenden Tragflügel. Den Schluß bildet ein Kapitel, in dem wir die aerodynamische Charakteristik der Rotationskörper in schallnahen Strömungen finden.

*F. Labisch.*

**Ting, Lu:** Some integrated properties of solutions of the wave equation with non-planar boundaries. *Quart. appl. Math.* **16**, 373—384 (1959).

Verf. beschäftigt sich mit einer Verallgemeinerung einer früher (Ferri, Clarke und Ting, dies. Zbl. **78**, 173) erhaltenen Integralbeziehung zwischen Druckverteilung und Quellverteilung vorgegebener Begrenzungen von Körpern für Probleme der Überschallströmung. Durch die Tatsache, daß das Geschwindigkeitspotential der Wellengleichung gehorcht, konnte die schwer durchzuführende Bestimmung der genauen Quellverteilung vermieden werden. Die aufgestellte Integralbeziehung wurde in zwei Beispielen angewendet. Zunächst wird eine analytische Beziehung für die Druckverteilung bei vorgeschriebenen Normalgeschwindigkeiten am Körper für die Flügel-Rumpf-Interferenz eines zylindrischen Rumpfes und eines ebenen Flügels mit Überschallvorderkante bei axialsymmetrischer Anströmung aufgestellt. Dann wurde das zweidimensionale Problem der Bewegung eines Stoßes untersucht, der parallel zu einer geraden Begrenzung der Strömung über eine rechteckige Kerbe in der Wand hinwegwandert. Die mittleren Druckstörungen durch diese Kerbe wurden für verschiedene geometrische Verhältnisse bei zwei Breiten der Kerbe in Diagrammen mitgeteilt.

*F. Keune.*

**Kogan, Abraham:** An application of Crocco's stream function to the study of rotational supersonic flow past airfoils. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **11**, 1—23 (1958).

Zweidimensionale stationäre Strömung eines reibungsfreien idealen Gases um einen Körper mit scharfer Vorderkante bei hohen Überschallgeschwindigkeiten. Mit Hilfe der Croccoschen Stromfunktion  $\psi$  werden durch Störungsrechnung analytische Näherungsausdrücke für das Strömungsfeld um den Körper gewonnen. Nullte Näherung: a) Strömungsfeld konstanter Geschwindigkeit, b) Strömungsfeld mit Stoß an einem Keil, der die Körperspitze approximiert. Berechnung der ersten und zweiten Näherung der Strömung a) um das ganze Profil, b) in der Nähe der Vorderkante aus homogenen und unhomogenen Wellengleichungen für  $\psi$ . a) Ergebnisse gültig für dünne Körper, Abschätzung des Gültigkeitsbereichs. b) Vergleich von Beispielsrechnungen mit Ergebnissen nach anderen Verfahren: Die erste Näherung gibt gute Übereinstimmung nur in der unmittelbaren Umgebung der Vorderkante, die zweite Näherung noch erheblich weiter stromabwärts.

*K. Nickel.*

**Anliker, Max:** A numerical method of evaluating the velocity potential and the minimum drag warping of arbitrary supersonic wings. *Z. angew. Math. Phys.* **10**, 1—15 (1959).

Der Beiwert des Druckwiderstandes, bezogen auf das Quadrat des Auftriebsbeiwertes wird durch eine gesuchte geometrische Verwindung des Flügels ohne Dicke zu einem Minimum gemacht. Es wird ein numerisches Verfahren zur Bestimmung der optimalen Verwindung für vorgegebene, vorn spitze beliebige Flügelgrundrisse bei Überschallströmung vorgeschlagen, das sowohl für Flügel mit Unterschall-, Schall- und Überschallvorderkanten gültig bleibt. Die unbekannte Verwindung wird durch eine Reihenentwicklung in Tiefen- und Spannweitenrichtung mit gesuchten Ko-

effizienten analytisch angenommen, wobei nach Vergleichen mit analytischen Methoden die ersten 10 Glieder der Entwicklung ausreichend erscheinen. Das Geschwindigkeitspotential wird numerisch gut genähert, indem in jedem aus vier benachbarten Machlinien begrenzten Parallelogramm der Abwind konstant gleich dem in der Mitte gesetzt wird. Die Minimalwertbestimmung wird so auf die Bestimmung der Koeffizienten des Reihenansatzes für die Verwindung zurückgeführt. Eine Reihe von Beispielen mit geradlinigen Flügelgrundrissen wurde bei verschiedenen Machzahlen mit analytischen Ergebnissen von J. H. Kainer [Convair San Diego Report ZA-259 (1957)] verglichen. Die Übereinstimmung ist ausgezeichnet, wenn auch für pfeilflügelartige Grundrisse eine engere Unterteilung des Einflußgebietes in Parallelogramme notwendig ist. Ob und wie weit die Güte des Verfahrens durch eine solche engere Unterteilung allein kontrolliert und verbessert werden kann, wurde hier nicht untersucht. Auf Grund der gewählten Methode und der Ergebnisse der Vergleiche kann man mit Verf. übereinstimmen, daß ein zuverlässiger Weg zu einer praktisch leicht durchführbaren Berechnung solcher Probleme vorliegt. *F. Keune.*

**Cheng, Sin-I.:** An approximate method of determining axisymmetric inviscid supersonic flow over a solid body and its wake. *J. aeronaut. Sci.* 25, 185—193 (1958).

Angabe eines halbempirischen Verfahrens zur raschen Berechnung der Druckverteilung an einem axial angeströmten Rotationskörper mit spitzer Vorderkante und anliegender Kopfwelle in stationärer reibungsfreier Überschallströmung. Verbesserung einer Näherungslösung durch eine Quadratur in Strömungsrichtung; zur Bestimmung des Anfangswerts dient die bekannte Strömung um den die Körper spitze approximierenden Kreiskegel. Der Vergleich mit anderen Verfahren gibt bei zwei Beispielen (Zylinder mit ogivaler Spitze, Rotationskörper mit Kreisbogenkontur) z. T. sehr gute Übereinstimmung. *K. Nickel.*

**Belen'kij, S. Z.:** Zur Theorie der Umströmung eines Keils mit Überschallgeschwindigkeit. *Trudy fiz. Inst.* 10, 5—14 (1958) [Russisch].

Untersucht wird die Überschallströmung an einem Keil. Für einen unendlichen Keil, der ja nur eine mathematische Abstraktion ist, sind die zwei erhaltenen Lösungen gleichberechtigt. Es wird gezeigt, daß das bei der Umströmung eines endlichen Keiles nicht mehr zutrifft. Wenn der Winkel (Halbwinkel) des Keiles  $\varphi$  eine bestimmte Größe  $\varphi_1$ , die nicht größer als  $\varphi_{\max}$  der entsprechenden Busemannschen Stoßlinie ist, nicht überschreitet, so kann nach dem Stoß eine Überschallgeschwindigkeit erhalten werden, und nur in diesem Fall wird der Verdichtungsstoß vom Scheitelpunkt des Keiles ausgehen. Auf diese Weise wird ein Kriterium erhalten, welches von dem durch Lewinson erhaltenen verschieden ist. *F. Labisch.*

**Goldsworthy, F. A.:** The structure of a contact region, with application to the reflexion of a shock from a heat-conducting wall. *J. Fluid Mechanics* 5, 164—176 (1959).

Diskutiert wird der Einfluß der Zähigkeit und der Wärmeleitfähigkeit auf die innere Struktur eines Kontaktgebietes. Bei Anwendung in der Grenzschichttheorie bekannter Methoden wird gezeigt, daß der Druck innerhalb eines Kontaktgebietes nahezu konstant bleibt. Für die Temperatur wird eine partielle Differentialgleichung erhalten. Die Temperaturverteilung kann gefunden werden, wenn die Lösung für das „ideale Gas“ außerhalb des Kontaktgebietes bekannt ist. Im betrachteten Gebiet kann jetzt Geschwindigkeit und Druck besser berechnet werden. Als Anwendungsbeispiel wird für ein Gas, dessen Teilchen sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, bei Voraussetzung einer Änderung der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur  $\tau$  wie  $k = k_n \tau^n$  ( $n = 0, 1, 2$ ), Temperatur, Geschwindigkeit und Druckverteilung im Kontaktgebiet gefunden. Die allgemeine Theorie wird auch zur Bestimmung der Geschwindigkeit einer ebenen, von einer ebenen, leitfähigen Wand reflektierten Stoßwelle angewendet. Gezeigt wird, daß die Wärmeleitfähigkeit eine Geschwindigkeitsverminderung der reflektierten Stoßwelle bewirkt, die berechnet wird. *F. Labisch.*



**Ong, Rudi S.:** On the generalized Prandtl relation. *J. aeronaut. Sci.* **25**, 209—210 (1958).

Die Prandtl'sche Beziehung wird an einer Mannigfaltigkeit von Unstetigkeitsflächen aus den Sprungbedingungen, die den Eulerschen Gleichungen, der Kontinuitätsgleichung und der Energiebeziehung entsprechen, mit Hilfe von Einheitsnormalvektoren hergeleitet.

*J. Pretsch.*

**Deb Ray, G.:** An exact solution of a spherical blast wave under terrestrial conditions. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* **24**, 106—112 (1958).

Eine kugelförmige Stoßwelle läuft mit konstanter positiver Radialgeschwindigkeit  $V$  in ruhendes homogenes perfektes Gas ( $p_0, \rho_0; \gamma$ ) hinein. Zur Beschreibung der stetigen Strömung hinter der Stoßwelle macht Verf. wie früher (s. dies. Zbl. **81**, 201) einen Homologieansatz (mit einer Hilfskoordinate  $\eta = r^{\mu-1} t$ ) und findet in ähnlicher Weise wie dort eine analytische Lösung, die drei wesentliche Parameter  $\gamma$ ,  $M = V (\gamma p_0 / \rho_0)^{-1/2}$  und  $\mu$  enthält. Die Gesamtenergie bleibt nicht konstant. — Anm. des Ref.: 1. Bei Beachtung der aus  $M = \text{const}$  folgenden Entropiekonstanz lassen sich die Formeln vereinfachen. — 2. Da bei gegebenem  $\gamma$  und  $M$  die Lösung von der Stoßfront her mathematisch eindeutig bestimmt ist, ist nur ein Wert  $\mu$  zulässig. Die einzig richtige Lösung (mit  $\mu = 0$ ) wurde schon von G. I. Taylor [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.* **186**, 273—292 (1946)] angegeben, freilich nicht in analytischer Form.

*F. Wecken.*

**Krook, Max:** Structure of shock fronts in ionized gases. *Ann. of Phys.* **6**, 188—207 (1959).

Ausgehend von einer Verallgemeinerung der Methode von Mott-Smith (s. dies. Zbl. **43**, 407) zur Lösung der Boltzmann-Gleichung für eine ebene Stoßwelle in einem einfachen Gas wird ein Verfahren angegeben, die Struktur einer ebenen Stoßfront in einem homogenen, im thermischen Gleichgewicht befindlichen, vollständig ionisierten Gas zu berechnen. Aus den Grundgleichungen (Poisson-Gleichung, kinetische Gleichung und Fokker-Planck-Term für die Wechselwirkungsausdrücke) ergeben sich nichtlineare Integrodifferentialgleichungen, die das Problem beschreiben. Das Lösungsverfahren arbeitet bei Näherungen beliebiger Ordnung und benutzt die Darstellung der Verteilungsfunktion als Summe von modifizierten Maxwell-Funktionen. In den erhaltenen Näherungslösungen wird die Struktur der Stoßfront charakterisiert durch zwei dimensionslose Parameter (1. die Machzahl  $M$  und 2. das Verhältnis der mittleren freien Ionen-Weglänge zur Debye-Länge im Überschallgebiet). Numerische Berechnungen werden in einer folgenden Arbeit angekündigt.

*G. Wallis.*

**Jones, H.:** Accelerated flames and detonation in gases. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **248**, 333—349 (1958).

Vom geschlossenen Ende eines Rohres ( $x = t = 0$ ) läuft eine Flammenfront  $x = X(t)$  längs des Rohres, sendet Druckwellen voraus, die sich zur Stoßfront aufsteilen und erzeugt schließlich eine Detonations- und Retonationswelle. Die Betrachtungsweise ist rein gasdynamisch, ohne Transporteffekte, in hydraulischer Näherung; Flammen-, Stoß- und Detonationsfront sind als Diskontinuitäten behandelt. Durch mehrere stark vereinfachende Annahmen, insbesondere  $X \sim t^2$  (Fall a) bzw.  $X \sim t^3$  (Fall b), wird das Problem analytischer Behandlung zugänglich gemacht. Nur Fall a wird näher durchgeführt. Eine chemische Nachreaktion in der Retonationswelle wird wahrscheinlich gemacht. Die Ergebnisse werden mit Drehstrommelaufnahmen verglichen. — Anm. des Ref.: Da hinter der Flammenfront ( $x < X$ ) keine Energiegleichung benutzt wird, ist die energetische Zulässigkeit der gemachten Annahmen zweifelhaft.

*F. Wecken.*

**Singh, Sampooran:** A note on explosives with modified trumpet liners. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* **24**, 151—154 (1958).

Verf. gibt eine bestimmte geometrische Form (mit fünf Parametern) für die Metalleinlage einer Hohlladung an und entwickelt im Anschluß an frühere Arbeiten



halbempirische Formeln für die Bewegung der Einlage und insbesondere die Strahlbildung. Dabei wird die Bewegung jedes einzelnen Segmentes der Einlage stationärhydrodynamisch und als von den anderen Segmenten unabhängig behandelt. Verf. gibt an, daß sich für diese Einlageform gegenüber der Kegelform eine um 7% höhere Durchschlagswirkung theoretisch ergibt, und daß Sprengversuche die Überlegenheit bestätigt haben.

*F. Wecken.*

**Aris, R.: On the dispersion of linear kinematic waves.** Proc. roy. Soc. London, Ser. A **245**, 268—277 (1958).

1955 haben Lighthill und Whitham [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **229**, 281—316, 317—345 (1955)] auf eine Klasse von Wellenbewegungen hingewiesen, welche entstehen, wenn zwischen einer Strömungsgröße  $q$  und einer Konzentrationsgröße  $k$  eine Kontinuitätsgleichung und überdies eine funktionale Relation erfüllt ist. Linear werden diese kinematischen Wellen genannt, wenn die Beziehung zwischen  $q$  und  $k$  durch eine Reihe linearer, algebraischer oder Differentialgleichungen gegeben ist. Den trivialen Fall  $q = ak + b$  nebst  $\partial k / \partial t + \partial q / \partial x = 0$  ausgenommen, ändern diese kinematischen Wellen ihre Gestalt bei der Fortpflanzung. Es wird gezeigt, daß für eine große Klasse von Wellen eine anfängliche sprunghafte Störung allmählich im Laufe der Fortbewegung zerstreut wird und daß die asymptotische Wellenform eine Gaußsche ist. Die allgemeinen Formeln werden an dem Beispiel einer kinematischen Temperaturwelle illustriert.

*Th. Sexl.*

**Kear, George: The scattering of waves by a large sphere for impedance boundary conditions.** Ann. of Phys. **6**, 102—113 (1959).

Es wird der Einfall einer ebenen Welle auf eine Kugel betrachtet. Der Radius der Kugel wird als groß gegenüber der Wellenlänge angenommen. Die hier angewandte mathematische Methode teilt die gestreute Welle in ein diskretes und in ein kontinuierliches Spektrum von radialen Wellen auf. Hierdurch wird erreicht, daß sich abgesehen von einem kleinen Korrekturglied das diskrete und kontinuierliche Spektrum bis auf eine endliche Summe von radialen Wellentypen und ein endliches Integral gegenseitig aufheben. Man hat daher bei der hier angewandten mathematischen Methode eine ausgezeichnete Konvergenz.

*G. Piefke.*

**Eseande, L.: Transformation des conditions de fonctionnement des grands ouvrages hydrauliques par aspiration de la couche limite.** Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. **3**, 253—287 (1958).

L'aspiration de la couche limite est bien connue et de nombreuses applications en ont été faites en aérodynamique. L'A. a appliqué cette méthode aux ouvrages hydrauliques. 1. Ainsi, pour supprimer le décollement sur le parement aval d'un barrage déversoir, il suffit d'aspirer la couche limite dans la portion supérieure de ce parement. 2. Lors des crues, la vitesse d'appel provoque, à l'extrémité amont d'une prise d'eau, un décollement et la formation d'une zone tourbillonnaire souvent très étendue. On peut éviter cet inconvénient, en supprimant le décollement au moyen d'une fente aspiratrice, convenablement placée. 3. On sait qu'en l'absence des dispositifs particuliers, un diffuseur perd toute efficacité quand il correspond à un angle au centre supérieur à une dizaine de degrés; en effet, les filets liquides décollent alors nettement des parois. Dans le cas d'un diffuseur plan, on a pu, au moyen de deux fentes aspiratrices, placées d'une part et d'autre du col, éviter le décollement pour des diffuseurs dont l'angle au sommet atteint  $60^\circ$ . 4. Au sommet intérieur d'un coude à angle droit d'un canal découvert, les filets décollent et il se produit une zone tourbillonnaire étendue, génératrice de pertes de charge et de dépôts, à moins que, par l'action d'une fente aspiratrice, on provoque le recollement des filets. — Les exemples cités, ainsi que quelques autres, permettent de se rendre compte de toute l'étendue du domaine des applications possibles du procédé de suppression des décollements par aspiration de la couche limite.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Escande, Léopold:** Manoeuvres rythmiques pour une cheminée déversante avec influence de la hauteur de chute dans le cas d'une turbine avec régulateur. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 613—616 (1959).

On donne une méthode graphique pour l'étude des manoeuvres rythmiques provoquant le déversement maximum pour une cheminée d'équilibre à étranglement, associée au fonctionnement des turbines avec régulateur. *Dan Gh. Ionescu.*

**Escande, Léopold:** Manoeuvres rythmiques pour une cheminée déversante avec influence de la hauteur de chute dans le cas d'un orifice. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 501—504 (1959).

On donne une méthode graphique permettant l'étude des manoeuvres rythmiques les plus dangereuses dans le cas d'une chambre d'équilibre déversante, à étranglement, en supposant que l'installation considérée ne comporte pas de régulateur et que les manoeuvres correspondent à l'ouverture d'une section déterminée et constante, offerte au passage de l'eau. *Dan Gh. Ionescu.*

**Grăic, Josip:** Étude des oscillations et de la stabilité pour une chambre d'équilibre avec un coussin d'air. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 641—644 (1959).

Si l'on diminue la communication existant entre l'atmosphère et le plan d'eau dans une cheminée d'équilibre par un orifice relativement petit  $f_a$ , ou si on la supprime complètement, il se forme, au dessus de l'eau dans la cheminée, un coussin d'air. Ce dernier diminue les amplitudes des oscillations de l'eau dans la chambre, provoquées par les changements de charge des turbines. Dans cette note, l'A. traite le problème de l'influence du coussin d'air sur les oscillations et la stabilité de la cheminée d'équilibre, en envisageant le cas où l'ouverture mettant en communication la chambre avec l'atmosphère est optimum, ( $f_a/F = \text{optimum}$ ), puis celui où cette ouverture est entièrement fermée ( $f_a/F = 0$ ). On a calculé la montée maximum du plan d'eau et la surpression maximum pour la fermeture totale instantanée des turbines et pour différents volumes initiaux de l'air dans la cheminée. Vu les valeurs considérables de cette surpression, qui exige de fortes dimensions du revêtement de la cheminée et de la galerie, il est évident que le coussin d'air avec  $f_a/F = 0$  n'offre pas une solution économique. Cependant si le coussin d'air a un orifice optimum  $f_a$ , la cheminée peut être économique. En supposant un coefficient de contraction  $\mu = 0,65$ , on trouve pour la valeur optimum  $f_a/F = 8 \cdot 10^{-4}$ . Avec cette dimension de l'orifice, la plus grande surpression dans la cheminée ne dépasse pas la valeur qui aurait été obtenue avec l'amplitude maximum dans la cheminée d'équilibre classique.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Vasilescu, Alexandre:** Sur le calcul de la vitesse de l'eau dans les canaux découverts. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 919—921 (1959).

On propose la formule approximative  $v = \sqrt{g \bar{P} I / K n a}$ , avec

$$K = \frac{P}{R/2 + P/100} + 10, \quad a = 0,2404 e^{1/(R+1,27)}$$

$P$  étant le périmètre mouillé,  $I$  la pente du canal,  $R$  le rayon hydraulique et  $n$  le coefficient de rugosité de la formule de Ganguillet-Kutter. *Dan Gh. Ionescu.*

**Švec, Jan:** Berechnung der Versickerung „mit Stau“ aus trapezförmigen, nicht mit einer undurchlässigen Dichtungsschicht ausgestatteten Kanälen. Rozprawy Českosl. Akad. Věd, Ř. techn. Věd 68, Nr. 3, 1—70, deutsche Zusammenfassg. 71—77, Beilage I—VII (1958) [Tschechisch].

In der Abhandlung ist an Hand des Kirchhoffschen Hodographenverfahrens das Problem der Versickerung aus trapezförmigen Kanälen für diejenigen Fälle gelöst, in denen sich unter der durchlässigen Schicht (in der sich die Filterbewegung abspielt) eine undurchlässige Grundsicht befindet. Die Lösung wird unter der Voraussetzung eines homogenen und isotropen Filtergebietes gegeben. Es werden die Größe des Wasserverlustes aus dem Kanal sowie auch die Form der freien Grenze

des aus dem Kanal versickernden Wasserstromes bestimmt. Ein numerisches Beispiel findet sich nur am Ende des Absatzes III. (d. h. im Falle der Versickerung „mit Stau“ aus einem Kanal von trapezförmigem Querschnitte unter der Voraussetzung einer unendlichen Mächtigkeit der durchlässigen Schicht). In allen anderen konkreten Fällen ist ein Gleichungssystem mit sehr komplizierten Integralausdrücken zu lösen, was ohne moderne Rechenmaschinen zu mühsam in der Durchführung erscheint.

*M. Růžicka.*

**Vučić, Vlastimir M. and Momčilo Rekalíć: On the problem of the fluid flow through the porous medium.** Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Math. Phys. 1958, Nr. 19, 7 p. (1958) [Serbo-kroatisch mit engl. Zusammenfassg.]

Le problème se rapport à l'écoulement d'un gaz parfait dans un milieu poreux limité, à une certaine profondeur, par un plan horizontal, supposé compact, et en haut par une couche du sol, plus mince et moins poreuse. Le mouvement ne dépend que de la distance d'un axe vertical et est réalisé par un puits et par une pompe permettant d'établir un régime d'écoulement permanent. Les résultats d'analyse théorique correspondent bien à une courbe trouvée expérimentalement.

*C. Woronetz.*

### Wärmelehre:

**Buchdahl, H. A.: A formal treatment of the consequences of the second law of thermodynamics in Carathéodory's formulation.** Z. Phys. 152, 425—439 (1958).

An account of Carathéodory's method in thermodynamics is given, without making an appeal to the mathematical theorem on Pfaffian equations which was given by him (and was extended later: see Ref., this Zbl. 72, 208, esp. p. 377 of the paper, reviewed there, to be referred to as *R*). It is pointed out in § 4 that the statements made in this approach presume that, of all the states under consideration, any two (*A* and *B*) must stand in the relationship that either *A* can be attained from *B* adiabatically, or *B* from *A*, or both processes are possible (this is also pointed out in *R*). By using a parameter for the ordering of states from the point of view of adiabatic accessibility, an empirical entropy function is introduced (§ 5), and hence the principle of the increase of entropy is found (§ 7). The arguments used are quite reasonable physically, but they cannot lay claim to rigour, as certain implicit assumptions have been made to rule out certain mathematically possible, but physically unlikely situations.

*P. T. Landsberg.*

**Cerulus, F. and R. Hagedorn: A Monte-Carlo method to calculate multiple phase space integrals. I, II.** Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 9, 646—658, 659—677 (1958).

Berechnet werden soll das Volumen des Phasenraumes, definiert dadurch, daß für *n* Teilchen gegebener Massen Gesamtenergie und Gesamtimpuls gegeben sind. Das Integral zerfällt in ein Produkt; jeder Faktor wird durch ein Monte-Carlo-Verfahren berechnet, welches genau mit Rechenprogramm für Rechenautomaten angegeben wird. Im zweiten Teil werden die Fehler (insbes. der statistische Fehler) bestimmt und die Rechenzeit abgeschätzt. Die Begründungen für den statistischen Fehler sind umfangreich und verwenden z. T. die Annahme, daß gewisse Größen als normalverteilt angesehen werden können. Der wichtige Hinweis wird gegeben, daß bei Berechnung mehrerer Werte die durch Interpolation geglätteten Werte verbessert sind. Ein kurzer Bericht über praktische Erfahrungen beschließt die Untersuchung.

*D. Morgenstern.*

**Casal, Pierre: Intégrale simple donnant le volume de l'espace des phases intérieur à la variété d'énergie constante. Application à la mécanique statistique. Loi de Gibbs.** C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1219—1221 (1957).

The author gives a geometrical construction, which has no apparent physical meaning, but makes it possible to reduce certain multiple integrals of thermodynamics



to simple integrals. This gives a new proof of the fact that a small part of a large microcanonical system follows the Gibbs canonical distribution. *B. Mandelbrot.*

**Hemmer, P. Chr., L. C. Maximon and H. Wergeland:** Recurrence time of a dynamical system. *Phys. Review, II. Ser.* **111**, 689—694 (1958).

Angeregt von der Untersuchung von H. L. Frisch (dies. Zbl. **72**, 429) werden für ein anderes mechanisches System, bestehend aus  $N$ , jeweils harmonisch mit den beiden Nachbarn gekoppelten, gleichschweren Massenpunkten, die Poincaréschen Wiederkehrzeiten bestimmt. Ähnlich wie bei Frisch, wenn auch durch kompliziertere Überlegungen, ergibt sich die Abhängigkeit von dem Präzisionsmaß und der Anzahl der Freiheitsgrade. *D. Morgenstern.*

**Brown, W. Byers:** Constant pressure ensembles in statistical mechanics. *Molecular Phys.* **1**, 68—82 (1958).

Although constant pressure ensembles have been used repeatedly in the statistical mechanical literature, some of the difficulties which arise from their use are not always appreciated. The author recognises these explicitly. He tries to overcome them by introducing a „quantisation“ of volume for a system at constant pressure  $p$ , by supposing that for a given eigenstate  $\alpha^{(n)}$  there is only one volume ( $V_n$ ) for which equilibrium between the system and its pressurised envelope is possible. The result of this rather novel hypothesis is that the volume fluctuations worked out by the author for an ensemble for which temperature, pressure and number of particles are given, turn out to be smaller than those usually found for this kind of ensemble. This discrepancy is not commented upon by the author, though he does show that in certain simple cases his approach leads to reasonable results. *P. T. Landsberg.*

**Klimontovič (Klimontovich), Ju. L. (Ju. L.):** Space-time correlation functions for a system of particles with electromagnetic interaction. *Soviet Phys., JETP* **7**, 119—127 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **34**, 173—185 (1958).

Eine endliche Anzahl gleichartiger Teilchen mit wechselseitiger Coulomb-Anziehung in einem elektromagnetischen Feld wird durch ein System von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen beschrieben, wobei außer den Feldgrößen auch die Aufenthaltsorte der Teilchen zufällig sein sollen. Für die interessierenden räumlichen und zeitlichen Korrelationskoeffizienten werden, insbesondere im stationären Fall, Gleichungen aufgestellt, die unter zusätzlichen Annahmen über die höheren Momente gelöst werden. Insbesondere wird die Dielektrizitätskonstante auf Grund dieser Vorstellungen bestimmt. *D. Morgenstern.*

**Fajn (Fain), V. M.:** Saturation effect in a system with three energy levels. *Soviet Phys., JETP* **6**, 991—995 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **33**, 1290—1294 (1957).

Anwendung einer Art Boltzmann-Gleichung auf die Verteilung der Energiezustände gerichteter Einzelelemente. Das „Stoßintegral“ wird (durch Verallgemeinerung eines Relaxationsgliedes) als Tensor erhalten, dessen Diagonalglieder die Population der drei Niveaus beschreiben, während die anderen Glieder die Dipolmomente angeben. Eine einfache Lösung wird bei Störung durch ein Wechselfeld erhalten, dessen Frequenz der eines Quantensprungs entspricht (Anwendung auf Maser). *K. Raver.*

**Saroléa, L. et H. Koppe:** Evaluation des matrices de densité dans les systèmes homogènes en équilibre thermique. *Z. Phys.* **151**, 385—395 (1958).

The concept of the density matrix of an equilibrium system is discussed, using the methods of second quantisation. The Darwin-Fowler method is used for the case of negligible interaction. *P. T. Landsberg.*

**Philippot, J.:** Le théorème  $H$  pour la matrice de densité. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **44**, 240—243 (1958).

Using a relation for the rate of change of the non-diagonal elements of a density matrix obtained recently by Prigogine and Toda, the author establishes directly that these elements tend asymptotically towards the value zero.

*P. T. Landsberg.*

**Band, William:** New look at von Neumann's operator method in quantum statistics. I, II. Amer. J. Phys. 26, 440—451; 540—548 (1958).

Dichteoperator und Entropie-Operator eines quantenmechanischen, statistischen Ensembles werden möglichst einfach eingeführt und diskutiert. — Im zweiten Teil wird versucht, mit einfachen Mitteln klar zu machen, wie aus der Quantenmechanik und der Statistik der 2. Hauptsatz der Thermodynamik folgt. Insbesondere wird die Tatsache diskutiert, daß die Entropie abgeschlossener Systeme einem Maximalwert zustrebt.

*G. Heber.*

**Hill, N. E.:** The application of Onsager's theory to dielectric dispersion. Proc. phys. Soc. 72, 532—536 (1958).

Die Onsager'sche Theorie der statistischen Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten wird auf Wechselfelder erweitert. Die erhaltene Formel für den Fall eines einfachen Relaxationsmechanismus weicht von der einfachen Debyeschen Beziehung wenig ab, und makroskopische und molekulare Relaxationszeit sind fast gleich.

*J. Meixner.*

**Ford, Joseph:** Approach of one-dimensional systems to equilibrium. Phys. Review, II. Ser. 112, 1445—1451 (1958).

Zu einer Lösung  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  der Liouvilleschen Gleichung (feinkörnige Dichte) wird eine grobkörnige Dichte durch die Gleichung

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \infty) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Omega} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Delta\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{p}$$

definiert.  $d\mathbf{x} d\mathbf{p}$  ist ein Volumenelement des Phasenraumes. Die Integration erstreckt sich über den Bereich  $\Delta\Omega$ . Die angegebene Reihenfolge der Grenzwerte ist wesentlich. Es wird gezeigt, daß die Dichte  $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \infty)$  für den linearen anharmonischen Oszillator und für ein Modell einer anharmonischen Kette im allgemeinen existiert und deren Gleichgewichtsverhalten beschreibt. Das Resultat beruht auf dem sogenannten Umrühreffekt infolge der energieabhängigen Umlauffrequenz.

*J. Meixner.*

**Kästner, Siegfried:** Zur Theorie der Relaxation. II: Elektrische Netzwerkmodelle für das Relaxationsverhalten der Materie. Ann. der Physik, VII. F. 2, 146—162 (1958).

(Teil I s. dies. Zbl. 81, 207.) Es werden Relaxationssysteme mit äußeren und inneren Variablen betrachtet. Dabei ist vorausgesetzt, daß sowohl die äußeren als auch die inneren Variablen von gleichem Charakter bezüglich Zeitumkehr sind. Im Falle einer einzigen äußeren Variablen kann man ihren Zusammenhang mit der zu ihr konjugierten äußeren Variablen durch einfache Netzwerkmodelle beschreiben. In dieser Arbeit werden Netzwerkmodelle für den Fall einer beliebigen Anzahl von äußeren Variablen angegeben. Sie enthalten im allgemeinen neben Widerständen und Kapazitäten bzw. Induktivitäten auch noch ideale Übertrager. Diese sind in einigen Spezialfällen entbehrlich. Weiter werden Netzwerkmodelle besonders einfacher Struktur angegeben, die aber auch negative Elemente enthalten.

*J. Meixner.*

**Černikov (Chernikov), N. A.:** The generalized stochastic problem of particle motion. Soviet Phys., Doklady 2, 103—105 (1957), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 1030—1032 (1957).

Die Arbeit enthält eine relativistische Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung eines sich stochastisch bewegenden Teilchens.

*I. Fényes.*

**MacDonald, D. K. C.:** Brownian movement. Phys. Review, II. Ser. **108**, 541—545 (1957).

Verf. untersucht zufällige thermische Schwankungen der Ladung  $\xi$  in einem speziellen elektrischen  $RC$ -Kreis, in welchem die Verhältnisse derart beschaffen sind, daß  $f(x, t)$ , die auch von der Zeit  $t$  abhängige Dichtefunktion von  $\xi$  einer Gleichung Fokker-Planckschen Typs

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C_1 \frac{\partial}{\partial x} [x G(x) f(x, t)] + C_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [F(x) f(x, t)]$$

Genüge leistet, wobei  $C_1, C_2$  Konstante,  $G(x), F(x)$  durch die Beschaffenheiten des Kreises bestimmte Funktionen sind. Bei der Annahme, daß  $G(x), F(x)$  vom Typ  $\alpha + \gamma x^2$  ( $\gamma \ll 1, \alpha$  konst.) sind, wird der Fall des statistischen Gleichgewichts (auch an einem konkreten Beispiel) behandelt. *P. Medgyessy.*

**Mazur, P.:** On the theory of brownian motion. Physica **25**, 149—162 (1959).

Die klassischen Gleichungen für die Brownsche Bewegung mit Reibung in zwei Dimensionen

$$du/dt = -\beta u + A(t), \quad dv/dt = -\beta v + B(t)$$

mit unabhängigen zufälligen normalverteilten  $A, B$  ergeben einen normalverteilten Markoffschen Prozeß mit bekannten Streuungen und Fokker-Planckscher Gleichung. Die Umrechnung auf die Variablen  $\varepsilon = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2)^{1/2}$  und  $\alpha = \arctg v/u$  ergibt einen anderen Markoffschen Prozeß, für den die Fokker-Plancksche Differentialgleichung, die Übergangswahrscheinlichkeiten und die Streuungen berechnet werden. Auch die Verteilung der Größen  $\varepsilon$  allein, sowie die Fourierentwicklungskoeffizienten werden bestimmt. Diese Formeln stimmen überein mit den auf andere Weise innerhalb der statistischen Mechanik irreversibler Prozesse von Prigogine und Balescu (dies. Zbl. **77**, 403) gefundenen Ergebnissen. Die Resultate werden auf einfache Weise auf den Fall zusätzlicher Lorentzkraft ausgedehnt. Zuletzt zeigt Verf., daß der 1-dimensionale harmonische Oszillator mit zufälliger Stoßfunktion, beschrieben durch

$$dx/dt = u, \quad du/dt = -\beta u - \omega^2 x + A(t),$$

näherungsweise bei kleiner Dämpfung durch den anfangs dargestellten Formelapparat beschrieben werden kann. Die entsprechenden Ergebnisse wurden von Prigogine und Philippot (dies. Zbl. **77**, 403) mittels der statistischen Mechanik gefunden. *D. Morgenstern.*

**Terleckij, Ja. P.:** Über die Berechnung der Fluktuationen und Korrelationen nach der Gibbsschen Methode. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. **12**, Nr. 4, 119—123 (1957) [Russisch].

The paper is devoted to the deduction of expressions for the mean square derivations and for the correlation functions which occur in the theory of fluctuations and of Brownian motion. They are obtained as exact results in classical statistical mechanics. It is not claimed that these results are new, but merely that they are sometimes regarded as approximate, when they should be regarded as exact.

*P. T. Landsberg.*

**Reid, Walter P.:** Heat flow in a cylinder. Quart. appl. Math. **16**, 147—153 (1958).

Col metodo della separazione delle variabili l'A. da la soluzione formale del seguente sistema:  $k \Delta u = u_t$ ,  $u(r, 0) = f(r)$ ,  $u_r(0, t) = 0$ ,  $u_r(1, t) = a(w - u(1, t))$ ,  $h w_t = a(u(1, t) - w(t)) + b(g(t) - w(t))$ ,  $w(0) = W$ ;  $k, h, a, b$  costanti positive. Il sistema trae origine dal problema di determinare la temperatura in un cilindro rotondo indefinito, omogeneo e termicamente isotropo, che scambia calore, per irraggiamento, con un sottile manicotto cilindrico coassiale buon conduttore (la cui



temperatura è  $w(t)$ ) attraverso un interposto strato di aria. L'interesse principale del lavoro sta nella non usuale condizione al contorno cui il problema studiato da luogo.

*G. Sestini.*

**Gibson, R. E.: A heat conduction problem involving a specified moving boundary.** Quart. appl. Math. **16**, 426—430 (1959).

L'A. considera problemi unidimensionali in campi variabili col tempo, essendo nota la legge di variazione della frontiera del campo. In particolare vengono esaminati un problema sferico ed un problema cilindrico con distribuzione uniforme dei sorgenti a rendimento variabile col tempo. La semplicità delle leggi di variazione del raggio della sfera e del cilindro (ad es.  $R = ct^{1/2}$ ;  $R = kt$ ) rende possibile, ed in modo assai facile, una forma esplicita della soluzione o col metodo della separazione delle variabili o con quello della riduzione ad equazione integrale.

*G. Sestini.*

**Vernotte, Pierre: L'intégration de l'équation de la chaleur quand les propriétés physiques dépendent de la température, intensément. Application à la diffusion.** C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 378—380 (1959).

Applicando la teoria delle serie divergenti, l'A. precisa il calcolo del raffreddamento di una massa gassosa ad alta temperatura in presenza di una parete fredda, tenendo conto della variazione con la temperatura della conduttività del gas. L'A. annuncia che, a calcoli fatti, il flusso di calore attraverso alla parete fredda può essere calcolato con la formula classica, avendo preso la densità (inversamente proporzionale alla temperatura assoluta) alla temperatura del gas e la conduttività (proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta) ad una temperatura che è  $7/10$  della precedente. Secondo l'affermazione dell'A. il calcolo può essere applicato allo studio di problemi di diffusione.

*G. Sestini.*

**Abel, Louis: Chauffage par induction H. F. Existence d'un courant induit ondulé en rapport avec l'effet de „zébrage“.** J. Phys. Radium **18**, Suppl. au Nr. 12, 144 A—153 A (1957).

Les études sur le chauffage d'un cylindre ferromagnétique placé dans un inducteur concentrique n'ont fait jusqu'ici usage que d'hypothèses simples. On considérait un acier ayant une perméabilité constante. On cherchait une solution des équations de Maxwell sans tenir compte de la coordonnée axiale  $z$ ; seule la coordonnée polaire  $r$  intervenait. La variation du courant induits en fonction de  $r$  et de  $z$  donne une explication du phénomène de „zébrage“: Du moins au début du chauffage à haute température et peu avant le point de transformation  $A_3$  des aciers il y a une alternance de bandes chaudes et froides, formant des cercles parallèles de l'inducteur, mais présentant une largeur et un pas peu variables auteur d'une moyenne elle-même fonction de la seule fréquence du courant inducteur, en première approximation. Ces „zébrures“ se déplaçant avec le cylindre si on les déplace axialement dans l'inducteur, ont un pas qui semble un peu varier avec la composition de l'induit, existent quelle que soit la longueur de ce dernier, mais disparaissent rapidement avec la prolongation du chauffage. Dans le travail il est montré que l'origine de ce phénomène, jusqu'ici attribué à des causes d'origine purement électromagnétique.

Il existe en plus du champ classique  $\vec{H}'$  induit purement axial, un champ  $\vec{H}$  ondulé, avec composante radiale, satisfaisant aux équations de Maxwell et aux conditions du contour.

*W. Iwanow.*

### Elektrodynamik. Optik:

**Bouix, Maurice: Application des distributions aux équations de Maxwell et de Helmholtz.** C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 2858—2860 (1958).

Lorsque les champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  sont discontinus sur une surface  $S$ , les équations de Maxwell pour les ondes monochromatiques s'écrivent en théorie des distributions

sous la forme

$$(1) \quad \begin{aligned} \{\text{rot } \vec{E}\} + \vec{n} \wedge \sigma(\vec{E}) \delta_s + i \omega \mu \vec{H} &= \vec{M} \\ \{\text{rot } \vec{H}\} + \vec{n} \wedge \sigma(\vec{H}) \delta_s - i \omega \varepsilon \vec{E} &= \vec{\mathfrak{J}} \end{aligned}$$

avec:  $\omega$  = pulsation de l'onde monochromatique,  $\mu$  = perméabilité magnétique,  $\varepsilon$  = pouvoir inducteur spécifique;  $\vec{E}, \vec{H}$  amplitudes complexes des champs électrique et magnétique;  $\vec{\mathfrak{E}} = \vec{E} e^{i\omega t}$ ,  $\vec{\mathfrak{H}} = \vec{H} e^{i\omega t}$ ;  $\sigma(\vec{E})$  (resp.  $\sigma(\vec{H})$ ) = saut de  $\vec{E}$  (resp. de  $\vec{H}$ ) sur  $S$ ;  $\vec{\mathfrak{J}}, \vec{M}$ , amplitudes complexes des courants „appliqués“  $\vec{\mathfrak{J}} = \vec{\mathfrak{J}} e^{i\omega t}$ ,  $\vec{M} = \vec{M} e^{i\omega t}$ , qui représentent des sources.  $\delta_s$  = mesure de Dirac sur  $S$ .  $\{f\}$  = valeur de la distribution  $f$  en tout point où elle résulte d'une fonction continue. En prenant les champs fondamentaux en coordonnées sphériques i. e.

$$\vec{E} = \vec{n}_0 e_{mn}, \quad \vec{H} = i k \vec{n}_0 e_{nm}, \quad k = \omega (\varepsilon \mu)^{1/2}, \quad \vec{n}, \vec{n}_0 = \text{vecteurs de Stratton},$$

l'A. trouve que les courants appliqués (lorsqu'on entoure l'origine d'une sphère  $S$  de rayon  $\varrho$ ) sont localisés sur  $S$  et sont donnés par  $\vec{\mathfrak{J}} = \vec{n} \wedge \sigma(\vec{H}) \delta_s$ ;  $M = \vec{n} \wedge \sigma(\vec{E}) \delta_s$ . Si  $\varrho \rightarrow 0$ , alors  $\vec{\mathfrak{J}} \rightarrow \vec{\mathfrak{J}}_0 = -8\pi k \vec{\delta}_0 / 3 \omega \varepsilon \mu$ , ( $\vec{\mathfrak{J}}_0$  concentré à l'origine), et  $\vec{M}$  a pour limite une distribution de support à l'origine et de rotationnel

$$G_0 = -\frac{4\pi i}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{grad } \delta_0 - k \Delta \delta_0 \right)$$

$\vec{k}$  = verseur de l'axe  $oz$ .

*S. Vasilache.*

● Sigorskiĭ, V. P.: Methoden der Analyse elektrischer Schaltungen mit Vielpol-Elementen. [Metody analiza élektřičeskich schem s mnogopolju'snymi élementami.] Kiev: Verlag der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR 1958. 404 S. R. 13,50 [Russisch].

Ausgehend von den Elementen der elektrischen Schaltungen (Widerstände, Kapazitäten, Eigen- und Gegeninduktivitäten) und den Kirchhoffschen Regeln werden die Beziehungen zwischen Strömen und Spannungen in beliebigen linearen Netzen (Vielpolen) in Matrizenform aufgestellt. Dabei wird der Begriff des Vielpols auch auf aktive Elemente wie Elektronenröhren und Halbleitertrioden ausgedehnt. Die Anwendung dieser Matrizen wird als lineare Transformation der Koordinaten im Raume von beliebig vielen Dimensionen aufgefaßt. Der Übergang zu anderen Koordinatensystemen und der Einfluß von Veränderungen der Schaltelemente werden behandelt. Die entwickelte allgemeine Theorie wird auf die Analyse von Schaltungen angewandt. Zunächst von solchen, die aus reinen Zweipolen (komplexen Widerständen) zusammengesetzt sind, und dann auf Schaltungen, die Gegeninduktivitäten, Elektronenröhren und Halbleitertrioden enthalten. Schließlich wird die hier dargestellte Methode mit anderen Verfahren der Netzwerkanalyse verglichen, darunter auch mit der Tensorrechnung von G. Kron. Das Buch ist für Ingenieure und Theoretiker der Schaltungstechnik bestimmt. Es setzt Hochschulkennntnisse der theoretischen Elektrotechnik und der Matrizenrechnung voraus. In dem umfangreichen Verzeichnis des einschlägigen Schrifttums überwiegen Arbeiten in russischer Sprache.

*G. Günther.*

Nag, B. R.: Study of an oscillator with two degrees of freedom by a differential analyser. Indian J. Phys. 33 (42), 57—73 (1959).

Ausgehend von den beiden simultanen Differentialgleichungen 2. Ordnung eines Oszillators mit abgestimmten Gitter- und Anodenschwingkreisen (bzw. mit einem Anodenschwingkreis und magnetischer Rückkopplung) werden die möglichen Schwingungsformen untersucht, wenn der Kreis eine durch ein Polynom 3. Grades darstellbare Nichtlinearität enthält. Verf. gibt eine ausführliche Durchrechnung der durch die Nichtlinearität bedingten Abhängigkeit der Schwingungsformen und ihrer

Stabilitätsgrenzen von den Systemparametern, insbesondere von dem Verhältnis der beiden Eigenfrequenzen der Schwingkreise: Der Oszillator kann danach entweder mit einer der beiden Eigenfrequenzen schwingen oder mit beiden gleichzeitig. Die zweite Schwingungsform ist nur stabil, wenn das Frequenzverhältnis — abhängig von der Größe der Nichtlinearität — etwa 3:1 oder 2:1 beträgt. Abschließend werden die Schaltschemata eines Analogrechners beschrieben, mit dem die theoretisch gewonnenen Ergebnisse experimentell bestätigt werden konnten. *H. Schließmann.*

**Feinberg, E. L.: Propagation of radio waves along an inhomogeneous surface.** *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 11, 60—91 (1959).*

Die vorliegende Arbeit bringt einen ausführlichen Bericht über die physikalischen Grundlagen und die mathematische Methode, die einer Reihe von Arbeiten größtenteils russischer Herkunft auf dem Gebiet der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs einer inhomogenen, ebenen oder kugelförmigen Oberfläche zugrunde liegen. In der Tat ist darüber auf deutscher Seite nur wenig bekannt. Die vorliegende Darstellung über dieses Thema von einem der daran führend beteiligten russischen Gelehrten ist für eine erste Einführung und einen gründlichen Überblick sehr geeignet, weil sie auch auf die grundlegenden Vorstellungen und auf die Hauptergebnisse der neuen Methoden, soweit sie bisher von verschiedenen Seiten erzielt worden sind, kurz eingeht. Die Aufgabe wird zurückgeführt auf die Berechnung eines Dämpfungsfaktors, der als Faktor zu dem bekannten Ausdruck  $\exp(i k r)/r$  hinzutritt, wenn dämpfende Ursachen bei einer inhomogenen Erdoberfläche vorhanden sind. Die Berechnung dieses Dämpfungsfaktors erfordert die Auflösung einer Integralgleichung. Besonders eingehend wird in den referierenden Angaben auf das praktisch bedeutsame Problem der Küstenbrechung an der ebenen Erde eingegangen. Es wird aber auch die Lösung solcher Fälle besprochen, wo die Inhomogenitäten auf der ebenen Erde aus  $N$  homogenen Streifen bestehen. Die Formen der Lösung variieren mit der relativen Größe der numerischen Entfernung zu der Breite der Streifen. Zum Schluß wird auch noch auf die Lösung der entsprechenden Aufgabe eingegangen, wenn die Erdoberfläche als kugelförmig angesehen wird. *H. Buchholz.*

**Brown, J.: Propagation in coupled transmission line systems.** *Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 235—243 (1958).*

Die Arbeit behandelt die Wellenausbreitung in einem System von verlustfreien Leitungen, die in äquidistanten Punkten durch Koppelnetzwerke aus Reaktanzelementen miteinander verbunden sind. Solche Systeme liegen z. B. vor, wenn man die gleichzeitige Ausbreitung mehrerer Wellentypen in einem Hohlleiter betrachtet, der regelmäßige Stoßstellen enthält, an denen eine Umwandlung eines Wellentyps in einen anderen möglich ist. Zur Bestimmung der Übertragungsmaße des unendlich langen Leitungssystems wird die Kettenmatrix eines der sich periodisch wiederholenden Leitungsabschnitte aufgestellt. Aus den Eigenwerten dieser Matrix erhält man die Wellenübertragungsmaße des gesamten Systems. *G. Bosse.*

**Paradopoulos, V. M.: The scattering effect of a junction between two circular waveguides.** *Quart. J. Mech. appl. Math. 10, 191—209 (1957).*

In dieser Arbeit wird das Problem der Übertragungseigenschaften einer Verbindung zweier runder Hohlleiter verschiedener Durchmesser mit gleicher Achse behandelt. Die einfallende Welle ist eine rotationssymmetrische E-Welle. Die Abmessungen der Hohlleiter sind so gewählt, daß nur dieser Hauptwellentyp (rotationssymmetrische E-Welle) fortschreiten kann. Das heißt, die durch die Hohlleiter-Verbindung angeregten höheren Wellentypen sind alle exponentiell gedämpft. Zur Berechnung wird die gesamte Anordnung in zwei Bereiche aufgeteilt. Wenn  $z$  die Achse der Hohlleiter ( $z = 0$  bei der Verbindung),  $a$  der Radius des Hohlleiters mit dem großen Durchmesser,  $b$  der Radius des Hohlleiters mit dem kleinen Durchmesser und  $r$  die radiale Koordinate sind, so liegt der eine Bereich in  $r < b$ ,  $-\infty < z < +\infty$ , der andere Bereich in  $a > r > b$ ,  $z > 0$ . Die exakte Lösung ist durch ein unendliches



Gleichungssystem gegeben. Die hier angewandte mathematische Methode gibt gute Ergebnisse, d. h. das Gleichungssystem konvergiert rasch, wenn der Unterschied zwischen den Durchmessern der Hohlleiter klein ist. Für solche kleinen Unterschiede werden Kurven für die Absolutwerte der Streukoeffizienten der Hauptwelle berechnet.

*G. Piefke.*

**Longuet-Higgins, M. S.:** The distribution of the sizes of images reflected in a random surface. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **55**, 91—100 (1959).

Da frühere Arbeiten anderer Verff. gezeigt haben, daß es möglich und zweckmäßig ist, die Oberflächenwellen des Meeres aus der mittleren Intensität des an ihnen reflektierten und aus verschiedenen Richtungen beobachteten Sonnenlichtes näher zu bestimmen, da man aus jenen Beobachtungen eine statistische Verteilung der Komponenten der Oberflächenneigungen erhält, so versucht Verf. in vorliegender Arbeit, die Frage zu behandeln, welche Information man über die Oberflächenwellen aus der Verteilung der reflektierten Sonnenbildchen erhält. Es wird gezeigt, daß die statistische Verteilung der Bildgrößen von der Höhe  $H$  der Wellen und ihrer Wellenlänge  $\lambda$  abhängt, daß aber die Gestalt der Bilder weitgehend unabhängig ist von der Größe  $\lambda$  der Wellen. Die durch  $H$  bedingten Informationen werden ausführlich behandelt.

*J. Picht.*

**Kučer, I.:** Diffuse reflection of light from a semiinfinite scattering medium. *J. Math. Physics* **37**, 52—57 (1958).

Unter der Voraussetzung, daß Polarisierungseffekte vernachlässigt werden können, wird folgendes Problem behandelt: Licht fällt unter beliebigem Winkel auf ein unendlich ausgedehntes, auf der einen Seite von einer Ebene begrenztes streuendes Medium. Die Intensität im Medium sowie außerhalb wird unter Verwendung von  $H$ -,  $X$ - und  $Y$ -Funktionen berechnet. Die mathematischen Voraussetzungen sowie die benutzten Symbole sind die gleichen wie in der vorangegangenen Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **73**, 436).

*K. Hunger.*

**Ho, Kuo-chu:** Periodic focusing of high current electron beams. *Sci. Sinica* **7**, 1247—1271 (1958).

In der Arbeit werden die Elektronenbahnen für verschiedene, starkfokussierende Linsensysteme berechnet. Es wird nicht vorausgesetzt, daß die Elektronen parallel zur Hauptachse in das Linsensystem einfallen und die Bahnen nur eine geringe Welligkeit besitzen. Zuerst wird der einfache Fall behandelt, bei dem die Fokussierung durch zentrisch angebrachte Scheiben mit kreisförmiger Öffnung erreicht wird. Die Scheiben liegen periodisch auf höherem und tieferem Potential. Der Verf. stellt die Gleichung für ein äußeres Elektron auf. Für einen großen Plattenabstand im Vergleich zur Plattendicke nähert er die Potentialfunktion durch eine Sägezahnkurve an. So kann die Gleichung exakt gelöst werden, und die Anpassungsbedingungen können angegeben werden. Insbesondere werden die Bedingungen für die Verwendung eines derartigen Systems in Verbindung mit einer Elektronenkanone behandelt. Die Möglichkeit einer Korrektur der erhaltenen Gleichung durch nachträgliche Berücksichtigung des Potentialverlaufes in der Gegend der Platten wird aufgezeigt. Für kleinen Plattenabstand im Verhältnis zur Plattendicke löst der Verf. die Gleichung mit Hilfe einer Störungsrechnung. Für beide Fälle werden numerische Beispiele gerechnet. Ebenfalls durch Anwendung einer Störungsrechnung werden die Bahnen in einem axialsymmetrischen Magnetfeld, einem elektrischen und einem magnetischen Quadrupolfeld ermittelt.

*C. Passow.*

**Vanhuyse, V. J.:** Anomalous attenuation in linear electron accelerators. *Nature* **182**, 1081—1082 (1958).

Die in den Wellenleitern eines Linearbeschleunigers durch aufprallende Elektronen erzeugten Sekundärelektronen können bei geeigneter Geometrie die Quelle von Elektronenlawinen bilden, die mit der Betriebsfrequenz des Beschleunigers zwischen den Blenden Schwingungen ausführen. Durch diesen, als multipactor effect bezeichneten

neten Vorgang, wird dem Wellenleiter Energie entzogen. Der Verf. versucht, die Abhängigkeit dieser Dämpfung von der Betriebsleistung, die an einem Beschleuniger der Universität Ghent gemessen wurde, zu erklären. *C. Passow.*

**Robinson, Kenneth W.:** Radiation effects in circular electron accelerators. Phys. Review, II. Ser. **111**, 373—380 (1958).

Die Energieverluste, die Elektronen in Zirkularbeschleunigern infolge der Ablenkung durch das Magnetfeld in Form von  $\gamma$ -Quanten erleiden, beeinflussen die Amplituden der Betatron- und Synchrotronschwingungen. Der Verf. errechnet aus der infinitesimalen Übertragungsmatrix sechster Ordnung für die Koordinaten und deren Ableitung im Koordinatensystem des Sollteilchens die Charakteristiken der Schwingungsformen, welche die Dämpfungsraten und Frequenzen der beiden Betatronschwingungen und der Synchrotronschwingung bestimmen. Er erhält die Summe der Dämpfungsraten generell für jeden Typ eines Elektronenbeschleunigers für den Fall, daß die mittlere Energie konstant ist. Für Beschleuniger, für die keine Kopplung zwischen den Schwingungen in horizontaler und vertikaler Richtung besteht, errechnet er darüber hinaus die einzelnen Dämpfungsraten für die Betatronschwingungen in vertikaler Richtung und die Synchrotronschwingungen, so daß sich die Dämpfung für die radiale Richtung als Differenz zur Gesamtdämpfungsrate ergibt. Es zeigt sich, daß, für den Fall der starken Fokussierung, die Betatronschwingung in horizontaler Richtung entdämpft, die beiden anderen Schwingungen gedämpft sind. Bei Maschinen mit schwacher Fokussierung sind alle drei Schwingungen gedämpft. Weiterhin wird das gemittelte Quadrat der Amplitude der Betatronschwingungen in allgemeiner Form und für den speziellen Fall des im Bau befindlichen 6-GeV-Elektronenbeschleunigers in Cambridge errechnet. Während der Verf. im Anhang zeigt, daß die Dämpfungsraten der Schwingungen von der Art des Beschleunigungssystems unabhängig sind, gibt er zwei Möglichkeiten der Verringerung der Strahlungsdämpfung für starkfokussierende Maschinen an. Einmal kann durch Gestaltung der Feldform in der Weise, daß die Sollbahn keine isomagnetische Bahn in den fokussierenden und defokussierenden Magnetsektoren darstellt, zum anderen durch starke Kopplung der Betatronschwingungen der beiden Richtungen z. B. mit Hilfe schräggestellter Quadrupollinsen, die Form der Schwingungen verändert werden. *C. Passow.*

**Kiselev, M. I. and V. I. Cepljaev (Tsepljaev):** Oblique shock waves in a plasma with finite conductivity. Soviet Phys., JETP **7**, 1104—1106 (1958), Übersetz. von Zurn. éksper. teor. Fiz. **34**, 1605—1607 (1958).

Um auch für ein Plasma mit endlicher Leitfähigkeit und bei schiefen Stoßwellen die Dicke der Wellenfront abzuschätzen, werden unter Berücksichtigung der Randbedingungen partikuläre Integrale der magnetohydrodynamischen Bewegungsgleichungen angegeben. Für den Fall unendlicher Leitfähigkeit wird auch der Grenzwinkel für die Ausbreitung einer schiefen Stoßfront angegeben. *G. Wallis.*

**Naze, Jacqueline:** Étude de la stabilité des écoulements de Resler-Sears. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 362—365 (1959).

Für das Ausflußproblem einer nichtzähen, nicht Wärme leitenden Flüssigkeit mit einer endlichen Leitfähigkeit  $\neq 0$  sind von Resler und Sears (s. dies. Zbl. **80**, 411) für den Fall konstanten elektrischen und magnetischen Feldes die stationären Lösungen angegeben worden. Verf. untersucht darauf die Stabilitätsbedingungen für Störungen zweiter Ordnung beim Ausfluß. *G. Wallis.*

### Quantentheorie:

**Halbwachs, Francis et Jean-Pierre Vigier:** Lagrangien d'une masse fluide relativiste libre. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1124—1126 (1959).

On applique le formalisme général précédemment décrit à un lagrangien quadratique contenant une énergie de rotation propre exprimée en variables d'Einstein-Kramers. On trouve comme moment angulaire une expression généralisant correctement l'expression classique.

Zusammenfassg. der Autoren.

**Halbwachs, Francis et Jean-Pierre Vigier:** Formalisme lagrangien pour une particule relativiste isolée étendue. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 934—937 (1959).

On donne une méthode générale pour constituer un formalisme lagrangien pour le mouvement d'une particule relativiste isolée possédant une structure interne définie par un nombre quelconque de vecteurs. La méthode est étendue au cas d'un lagrangien contenant explicitement l'accélération globale.  
Zusammenfass. der Autoren.

**Hove, Léon van:** A remark on the time-dependent pair distribution. Physica **24**, 404—408 (1958).

Die anschauliche Bedeutung der in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **56**, 442) eingeführten zeitabhängigen Zweierverteilung wird diskutiert. Ihr Imaginärteil beschreibt direkt die durch Anwesenheit von Neutronen hervorgerufene Änderung der Dichte.

W. Brenig.

**Tzou, Kuo-Hsien:** Identification des solutions des équations de Dirac sous  $P$ ,  $T$  et  $C$ . C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 375—378 (1959).

Es wird gezeigt, daß die Gruppe  $G$  der diskreten Symmetrietransformationen der Dirac-Gleichung, die aus der Raumspiegelung  $P$ , der Zeitumkehr  $T$ , der Ladungskonjugation  $C$  und deren Produkten besteht, aus einer speziellen Lösung der Dirac-Gleichung drei weitere linear unabhängige Lösungen liefert. Nimmt man noch die Gruppe  $L$  der eigentlichen Lorentz-Transformationen hinzu, so kann aus einer speziellen Lösung die Gesamtheit aller Lösungen der Dirac-Gleichung erzeugt werden. Die ebenen Wellen mit dem Impuls  $\pm \vec{p}$  und der Energie  $\pm E$  (im Sinne der Löchertheorie) werden durch die Elemente von  $G$  ineinander transformiert. (Die verschiedenen Spinstellungen werden jedoch nicht berücksichtigt.) Es wird weiter darauf hingewiesen, daß im Fall des Vorhandenseins eines äußeren elektromagnetischen Feldes nur die Transformationen von  $G$  und  $L$  zulässige Symmetrietransformationen der Dirac-Gleichung sind, die das äußere Feld in seinem Funktionscharakter invariant lassen, so daß man aus einer speziellen Lösung nicht sämtliche Lösungen dieser Dirac-Gleichung mit Hilfe von Symmetrietransformationen aus  $G$  und  $L$  erhält.

K.-J. Biebl.

**Géhéniau, J.:** Sur les tenseurs du groupe de Pauli. Acad. roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér. **44**, 418—422 (1958).

Es werden die Lorentz-kovarianten Bilinearformen aus einem Viererspinor  $\psi$  und dem adjungierten Viererspinor  $\bar{\psi}$  hinsichtlich ihres Transformationsverhaltens gegenüber der Pauli-Gruppe untersucht. Hierzu werden 8-komponentige Spinoren aus  $\psi$  und dem ladungskonjugierten Spinor  $\psi^C$  aufgebaut und die Bilinearformen durch diese ausgedrückt, wobei vorausgesetzt wird, daß jede Komponente von  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  mit jeder solchen Komponente antikommutiert. Auf Zusammenhänge mit dem Matrixformalismus von Gürsey [Nuovo Cimento, X. Ser. **7**, 411—415 (1958)] wird hingewiesen.

F. Engelmann.

**Ruelle, D.:** Représentation des formes en  $\psi$  et  $\bar{\psi}$ . Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **44**, 466—471 (1958).

Die Tensoren, die aus einem Viererspinor  $\psi$  und dem adjungierten Viererspinor  $\bar{\psi}$  bilinear gebildet werden können, werden in der Wellenmatrixschreibweise von Gürsey [Nuovo Cimento, X. Ser. **7**, 411—415 (1958)] ausgedrückt. Dabei wird vorausgesetzt, daß  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  miteinander und mit sich selbst antikommutieren. Die zwischen den Tensoren geltenden Beziehungen lassen sich dann leicht angeben. Insbesondere übersieht man unschwer, daß nur eine in  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  biquadratische Form existiert, die gegenüber Lorentz-Pauli-Transformationen invariant ist, was den Ausgangspunkt für Heisenbergs nicht-lineare Spinorgleichung [Z. Naturforsch. **14a**, 441—485 (1959)] darstellt.

F. Engelmann.

**Johnson, Kenneth A.:** Consistency of quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. **112**, 1367—1370 (1958).



Der Verf. sagt in der Zusammenfassung seiner Arbeit, daß er den Beweis der Aussage, daß wenigstens eine der Renormierungskonstanten der Quantenelektrodynamik unendlich ist (G. Källén, dies. Zbl. 50, 430), mit den Ergebnissen der Störungstheorie und mit der Eichinvarianz der Theorie vergleichen will, und kommt zum Resultat, daß der Beweis falsch sein müßte, da beide Eigenschaften der Theorie nicht mit den Einzelheiten des Beweises konsistent wären. Verf. argumentiert in folgender Weise: Ein wesentlicher Punkt im Beweis ist die Aussage, daß ein spezielles Matricelement des Stromoperators, und zwar das Element  $\langle 0 | j_\mu | q, q' \rangle$ , wo der Zustand  $|q, q'\rangle$  ein Zustand mit einem (einlaufenden) Paar ist, und  $|0\rangle$  das Vakuum ist, für große Werte von  $-(q + q')^2$  durch das entsprechende Matricelement eines freien Stromes  $j_\mu^{(0)}$  in folgender Weise ausgedrückt werden kann

$$(1) \quad \lim_{-(q+q')^2 \rightarrow \infty} \langle 0 | j_\mu | q, q' \rangle = \frac{N^2}{1-L} \langle 0 | j_\mu^{(0)} | q, q' \rangle.$$

Hier ist  $N$  die Renormierungskonstante des Diracfeldes in einer gewissen Eichung, die in der vorliegenden Arbeit die „Gupta-Bleuler-Eichung“ genannt wird, und  $L$  die Konstante der Ladungsrenormierung. Verf. diskutiert nicht den Beweis dieser Gleichung, bemerkt aber, daß der Stromoperator eichinvariant ist, das Diracfeld und deshalb auch die Konstante  $N$  aber nicht. Also, meint Verf., müßte (1) die Eichinvarianz der Theorie verletzen. Mit Hilfe eines Plausibilitätsargumentes, das dem Ref. unverständlich ist, schlägt er statt dessen vor, daß das  $N$  in der Gupta-Bleuler-Eichung oben durch das  $N$  in einer anderen Eichung (die sogenannte „Strahlungseichung“) ersetzt werden sollte, und daß dies die Eichinvarianz in Ordnung bringen sollte. Diese Ersetzung sollte es weiter unmöglich machen, den übrigen Teil des Beweises durchzuführen. Hierzu möchte der Ref. bemerken, daß die eichinvariante Konstante oben sehr wohl gleich einer anderen, nicht eichinvarianten Konstante sein kann, wenn diese letzte Konstante in einer speziellen Eichung ausgewertet wird. Hierdurch wird die Eichinvarianz der Theorie nicht verletzt. Ein Beispiel einer solchen Relation hat man in der bekannten Wardschen Identität. Diese sagt aus, daß die Konstante  $N$  in der Gupta-Bleuler-Eichung gleich einer gewissen eichinvarianten Konstante in der Vertexfunktion ist. Verf. ist wohl auch grundsätzlich hiermit einverstanden, da er eigentlich nur für die Auswertung der Konstante  $N$  in einer anderen Eichung argumentiert. Diese Sache kann aber nur durch eine explizite Rechnung entschieden werden, was in der vorliegenden Arbeit nicht vorkommt. Weiter macht Verf. einen Vergleich der obigen Gl. (1) mit den Ergebnissen der Störungstheorie. In erster, nicht-trivialer Näherung erhält man für das Matricelement oben den folgenden Ausdruck

$$(2) \quad \langle 0 | j_\mu | q, q' \rangle = \left[ 1 + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{da f(-a)}{[a + (q + q')^2]_P} - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{da}{a} f(-a) + i\pi f((q, q')^2) \right] \cdot \langle 0 | j_\mu^{(0)} | q, q' \rangle + \text{magn. Moment}$$

Die Funktion  $f(-a)$  ist eine explizit bekannte Funktion der Ordnung  $e^2$ , die sich für große Werte von  $a$  wie  $\log a$  verhält. Das dritte Glied in der eckigen Paranthese ist ein Renormierungsglied. Das zweite und das dritte Glied sind jedes für sich unendlich, die Summe aber konvergent. Für große Werte von  $-(q + q')^2$  strebt deshalb die Paranthese in (2) keiner endlichen Grenze zu, was aber an sich keinen Widerspruch mit (1) bedeutet, da der Beweis dieser Gleichung sich wesentlich auf die Voraussetzung stützt, daß alle Renormierungsglieder und deshalb auch das dritte Glied in (2) endlich sind. Um überhaupt einen Vergleich durchführen zu können, muß der Verf. deshalb eine Abschneidegröße  $K$  einführen. Wenn  $-(q + q')^2 \gg K$  ist, geht dann die Paranthese in (2) gegen eine endliche Grenze, und zwar gegen

$$1 - \int f(-a) da/a = 1 + O(e^2 \log^2 K).$$

Wenn aber andererseits die Konstanten  $N$  und  $L$  in ähnlicher Weise mit Hilfe von Abschneidegrößen  $K_c$  und  $K'_c$  ausgerechnet werden, so erhält man für die rechte Seite von (1) einen Ausdruck der Form  $1 + O(e^2 \log K_c) + O(e^2 \log K'_c)$ . Wenn man hier mit dem Verf. die weiteren Voraussetzungen machte, daß  $K$ ,  $K_c$  und  $K'_c$  alle gleich oder wenigstens von derselben Größenordnung wären, so hätte man die Aussage vom Verf., daß (1) nicht mit der Störungstheorie konsistent wäre. Hierzu will der Ref. bemerken, daß die Renormierungskonstante in (2) sich aus der Ladungsrenormierung und aus der Renormierungskonstante der Vertexfunktion zusammensetzt. Die letzte Konstante ist aber mit Hilfe der Wardschen Identität mit der Renormierungskonstante  $N$  in der Gupta-Bleuler-Eichung verknüpft. Mit den hier benützten Bezeichnungen lautet diese Identität

$$(3) \quad 1 - \int f(-a) da/a = N^2/(1 - L).$$

Es folgt sofort, daß das oben angegebene Abschneideverfahren, wo  $K \sim K_c \sim K'$  gesetzt wird, die Wardsche Identität und damit die Eichinvarianz der Theorie verletzt. Um ein eichinvariantes Abschneideverfahren zu bekommen, muß man (3) benützen, und damit eine Relation zwischen den sonst voneinander unabhängigen Größen  $K$  definieren. Wenn dies gemacht wird, so ist die Übereinstimmung von (1) und (2) trivial. G. Källén.

**Goldberg, Irwin:** Gauge-invariant quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. **112**, 1361—1366 (1958).

Es wird ein Quantisierungsverfahren für das elektromagnetische Feld angegeben, das explizit eichinvariant, aber nicht explizit Lorentzinvariant ist. Das Verfahren besteht im wesentlichen darin, daß die Feldstärken statt der Potentiale benützt werden. Für ein freies Feld macht das keine Schwierigkeiten. Wenn das elektromagnetische Feld mit einem Diracfeld in Wechselwirkung steht, lassen sich aber mit dem in der vorliegenden Arbeit benützten Verfahren keine Vertauschungsrelationen für das Spinorfeld erhalten. Statt dessen bekommt man nur Vertauschungsrelationen für gewisse „beobachtbare“ Größen, die vom Diracfeld quadratisch abhängen. Dies bedeutet u. a., daß Bosestatistik für die Diraceteilchen möglich wäre. Zu diesem Punkt sagt der Verf.: „... if one resorts to experiment, . . . , the choice of the anticommutator is required.“ Es ist dem Ref. nicht klar, warum der gewöhnliche Beweis für den Zusammenhang zwischen Spin und Statistik hier nicht brauchbar ist, da die Voraussetzungen dieses Beweises (positiv definite Energie, Lorentzinvarianz usw.) sehr allgemein sind, und auch hier gültig sein sollten. G. Källén.

**Sorensen, R. A.:** Electromagnetic effects in meson-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. **112**, 1813—1825 (1958).

In view of the Puppi-Stanghellini discrepancy in the dispersion relations for meson-nucleon scattering, the effect of the electromagnetic interaction on pion-nucleon scattering in an otherwise charge-independent meson theory is investigated by a method based on the static-nucleon, one-meson approximation of Chew and Low. The interaction Lagrangian is assumed to consist, apart from renormalization counterterms, of the charge-independent pseudoscalar coupling of the pseudoscalar meson field to the nucleon field and the gauge-invariant coupling of the mesons and nucleons to the electromagnetic field. The proton and neutron masses are taken as equal and the charged-neutral meson mass difference is assumed to be purely electromagnetic. In the first part of the calculation the problem is solved for  $e = 0$ . This does not lead to charge-independent scattering, because the charged-neutral meson masses in the free field Lagrangian are not equal. Since there are many processes which can take place through the emission and reabsorption of a virtual photon — and which do not depend on the meson self-energy — the author remarks that there is no reason to believe that the result of this part of the calculation should represent the most important electromagnetic effect in pion-nucleon scattering. However,

it seems too difficult at present to include all possible processes of emission and reabsorption of virtual photons. Accordingly, in the second part of the calculation the problem is treated in the so-called "Coulomb approximation" where the effects of transverse photons and of graphs, in which the incoming and outgoing meson lines are crossed, are ignored. Apart from simple Coulomb and kinematic effects, the most significant effect of including the electromagnetic interaction on  $\pi^+$ -proton scattering is found to be an alteration of the  $J = 3/2$  phase shift for that state such as to sharpen the (3, 3) resonance and move it to a higher energy. The meson mass difference effect and the Coulomb effect contribute about equally to produce a phase shift alteration of about  $2^\circ$  at its largest. *F. Kortel.*

**Oneda, S.: Strange particle decays and the universal  $V - A$  four-fermion interaction.** Nuclear Phys. 9, 476—497 (1959).

Since the same four-fermion interaction, of the type  $V - A$  (t. i. vector and axial vector in the lepton current) seems to explain the  $\mu$  capture (by a proton) and the  $\beta$  decays of muons and nucleons, it is suggestive to try an interpretation of the  $\beta$  decays of  $\Lambda$  and  $\Sigma$  hyperons on the same footing. A universal  $V - A$  Fermi interaction between four bare barions may also serve to yield a possible interpretation of the pion-decay of the hyperons through an intermediate state with a pair hyperons, which in turn give rise to the final pion. The  $\beta$  decay rates of the  $\Lambda^0$  and  $\Sigma^-$  hyperons evaluated theoretically result to be an order of magnitude larger than the actual experimental result. An explanation of the discrepancy, if it turns out to be confirmed by further experiments, can be attributed to a renormalization effect which should be present in a strong interaction. If this is not the case, the author concludes that the squared coupling constant of the baryon-lepton interaction (corresponding to those transitions which do not conserve the strangeness) should be smaller by a factor of about 10 than the square of the usual Fermi coupling constant. An extensive investigation of the various decay modes of  $K$  mesons is carried out, based on the same type of  $V - A$  four-fermion interaction. Finally an estimation of the electron and muon decay rate of  $\Lambda^0$  is also reported, making recourse to the experimentally known rates of  $K \rightarrow \mu + \nu$  and  $K \rightarrow \pi + e(\mu) + \nu$ . This estimate is shown to be consistent with the present experimental results. *M. Verde.*

**Nakagawa, Kimiko: The isobaric selection rule for hyperons and  $K$ -mesons.** Nuclear Phys. 10, 20—27 (1959).

Several experiments on decays of  $\Sigma$  hyperons and  $K$  mesons are in favour of the selection rule  $\Delta I = \frac{1}{2}$  for the isotopic spin. Yet, the slow decay of a  $K$  meson in two pions, cannot be regarded in the opinion of the author as a corroboration of the mentioned selection rule. It is indeed possible to explain such decay through an intermediate state with a nucleon pair, without taking recourse to the rule  $\Delta I = \frac{1}{2}$ . The anisotropy in the angular distribution of the decay products of a polarized  $\Sigma$  hyperon is more suitable to proof or disproof the selection rule in question. In fact under the assumptions of  $\Sigma$  hyperons with spin  $\frac{1}{2}$ , of invariance with respect to time reversal, and a parity violating weak interaction with equal couplings for the parity conserving and parity non conserving terms, there is a unique local hamiltonian. Therefore a prediction of the anisotropy in the decay can be made. A comparison with experimental results, still incomplete, is open. *M. Verde.*

### Fester Körper:

**Fues, E., H. Stumpf und F. Wahl: Klassische nichtlineare Gitterstatik eindimensionaler Gitterstörungen.** Z. Naturforsch. 13a, 962—978 (1958).

Setzen wir voraus, daß die potentielle Energie der Wechselwirkung der Gitterteilchen als Funktion ihrer Koordinaten bekannt ist. Die Gleichgewichtslagen der Atome entsprechen dem Minimum der potentiellen Energie. Da nicht nur ein ideales,



sondern auch ein zerstörtes Gitter stabil ist, müssen neben dem absoluten Minimum (ideales Gitter) auch relative Minima existieren, welche die Gleichgewichtslagen der Atome der Gitter mit Störungen bestimmen. Da bei den Versetzungen die Auslenkungen der Atome aus den Gleichgewichtslagen des idealen Gitters groß sind, ist die übliche Entwicklung der Gitterenergie in eine Potenzreihe in den Auslenkungen aus den Ruhelagen des idealen Gitters nicht mehr möglich; man muß von der Entwicklung aus einem deformierten Gitter ausgehen. Es wird gezeigt, daß man mittels gewisser Transformationen die Gleichungen für die Gleichgewichtslagen der Atome in Kristallen mit Stufen- und Schraubenversetzungen formal auf die Form der Gleichungen für die Gleichgewichtslagen der Atome in einem idealen Gitter unter der Wirkung äußerer Kräfte überführen kann. So ist die Aufgabe auf eine schon früher gelöste zurückgeführt (vgl. E. Fues, H. Stumpf, dies. Zbl. 64, 235). *O. Litzman.*

**Hori, Jun-ichi:** On the vibration of disordered linear lattice. II. Progress theor. Phys. 18, 367—374 (1957).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (vgl. Verf. und T. Asahi, dies. Zbl. 80, 235), kritische Diskussion einer dort benutzten und wohl nicht einwandfreien Voraussetzung. *W. Klose.*

**Bueche, F.:** Tensile strength of plastics: Effects of flaws and chain relaxation. J. appl. Phys. 29, 1231—1234 (1958).

A molecular theory of the strength of polymers is presented in which the effect of the relaxation, under high stresses, of short molecular chains is considered. It is shown that the resulting reduction of the number of effective load-carrying chains with time provides the principal time-effect of the phenomenon.

*A. M. Freudenthal.*

• **Lipson, H. and C. A. Taylor:** Fourier transforms and X-ray diffraction. London: G. Bell and Sons Ltd. 1958. VII, 76 p. 18 s. 6 d. net.

Das Buch der Verff. hat sich zum Ziel gesetzt, vornehmlich Studenten mit den theoretischen Grundlagen der Röntgenstrukturforschung vertraut zu machen. Verdienstvoll ist, daß die von P. P. Ewald 1940 in der Strukturforschung eingeführten Faltungsoperationen wie auch die Punktfunktion berücksichtigt werden. Auch die Ewaldsche Ausbreitungskugel findet Anwendung. Gemäß dem Ziel des Buches, lediglich eine Einführung zu sein, ist die mathematische Darstellung auf das Notwendigste beschränkt und sehr knapp gehalten. Teilweise vielleicht etwas zu knapp. Ein Kapitel über die praktische Anwendung der Fouriertransformation lenkt die Aufmerksamkeit auf die Probleme der Kristallstrukturbestimmung nach „trial and error“, die Bestimmung der Kristallitgröße und den Temperatureinfluß. Leider vermißt man einen Hinweis auf die in der Strukturforschung parakristalliner, flüssiger und amorpher Substanzen auftretenden statistischen Probleme, obwohl diese erst die Überlegenheit der in dem Buch angegebenen Faltungsoperationen voll erkennen lassen. Ein Vergleich zwischen einigen rechnerisch und daneben auch lichtoptisch durchgeführten Fouriertransformationen trägt in interessanter und anschaulicher Weise zum Verständnis der mathematischen Zusammenhänge bei.

*R. Bonart.*

**Krivoglaz, M. A.:** Theory of diffuse scattering of X-rays and thermal neutrons in solid solutions. III. Account of geometrical distortions of the lattice. Soviet Phys., JETP 7, 139—150 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 34, 204—218 (1958).

[Part I und II see *ibid.* 4, 293—302 resp. 5, 1115—1125 (1957), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 31, 625—635 (1956) resp. 32, 1368—1831 (1957)]. — A method for treatment of various problems connected with static distortions of crystal lattices is proposed, in which the distortions are related to fluctuation waves of the composition and of the internal parameters. Scattering of X-rays and thermal neutrons in binary solutions of arbitrary composition and with arbitrary values of the short and long range order parameters is considered. Anisotropy of the crystal and its atomic structure are taken into account explicitly. Aus der Zusammenfassg. des Autors.

**Želudev, I. S.: Punktgruppen der Symmetrie der Kristalle und ihre physikalische Interpretation.** Kristallografija 2, 728—733 (1957) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß sich die 32 kristallographischen Punktgruppen durch skalare, vektorielle und tensorielle Einwirkungen auf den Würfel erzielen lassen. Es wird die Annahme geäußert, daß der sich dabei ergebenden Mannigfaltigkeit der Gruppen mit gleicher Symmetrie ein Unterschied in den Eigenschaften der Kristalle von derselben Symmetriegruppe entspricht. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

*Werner Nowacki.*

**Zamorzaev, A. M. und E. I. Sokolov: Die Symmetrie und verschiedenartige Antisymmetrie endlicher Figuren.** Kristallografija 2, 9—14 (1957) [Russisch].

Die Antisymmetrie von A. V. Šubnikov erhält eine Verallgemeinerung in Form von Antisymmetrie verschiedener Art, wenn man den Figurenpunkten nicht nur ein Vorzeichen, sondern zwei, drei oder mehr in verschiedenem Sinne zuschreibt. Es wird die allgemeine Theorie entwickelt und eine Klassifikation der Symmetrie- und verschiedenartiger Antisymmetriegruppen angegeben, wonach die Zahl der endlichen kristallographischen Gruppen dieser Art errechnet wird. Diese Berechnung ist für den Fall von zwei oder drei Vorzeichen nicht trivial, wird aber trivial für endliche Figuren bei vier oder mehr Vorzeichen. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

*Werner Nowacki.*

**Belov, N. V.: Über Tetartoeder ( $T-23$ ) und Gyroeder- ( $O-432$ ) Gruppen.** Kristallografija 2, 722—724 (1957) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß man die Beziehungen zwischen den Drehungen um die Tri-, Di- bzw. Tetragryen in den beiden Kristallklassen  $T-23$  bzw.  $O-432$  anschaulich an Hand eines Würfels, dessen Flächen entsprechend der Symmetrie  $C_{2-2}$  bzw.  $C_{4-4}$  geteilt worden sind, darstellen kann. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

*Werner Nowacki.*

**Belov, N. V.: Satz über die Primitivität (Leere) des fundamentalen Parallelepipeds des Kristallgitters.** Kristallografija 2, 725—727 (1957) [Russisch].

Es wird der folgende Satz bewiesen: Wenn man für einen gegebenen Kristall sein Translationsgitter konstruiert und unter Erhaltung seiner Parallelität zu sich selbst einen der Gitterpunkte (Knoten-Punkte) zur Deckung bringt, so müssen alle übrigen Homologiepunkte sich nur in den Ecken der sich wiederholenden Fundamentalparallelepipede anordnen und kein homologer Punkt kann innerhalb des Parallelepipeds, auf seiner Fläche oder auf einer Kante vorkommen. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

*Werner Nowacki.*

**Peretti, Jean: Propriétés analytiques de la fonction  $F(z)$  attachée à un réseau cristallin à une dimension.** C. r. Acad. Sci., Paris 244, 1311—1313 (1957).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 67, 236).

**Grimley, T. B.: The electronic structure of crystals having the sodium chloride type of lattice.** Proc. phys. Soc. 71, 749—757 (1958).

The electronic structure of an ionic crystal is investigated with the assumption that the solutions of Fock's equations for the valence electrons can be expressed as linear combinations of the outer orbitals on the negative ions and the first vacant orbitals on the metal ions. The inclusion of this latter group of orbitals allows for homopolar binding. Numerical calculations are made for LiF and the width of the  $F-2p$  band is found to be  $5 \cdot 4$  ev of which about 5% is due to homopolar binding. The main homopolar effect is to provide a coupling between ions which are second nearest neighbours in the halide ion lattice. (From the author's summary.)

*J. Mycielski.*

**Searf, Frederick L.: New soluble energy band problem.** Phys. Review, II. Ser. 112, 1137—1140 (1958).

Die eindimensionale Schrödinger-Gleichung mit dem Potential  $V(x) = -V_0 \csc^2(\pi x/a)$  wird gelöst. Das Potential ist dem Gitterpotential ähnlich, hat

aber an den Gitterpunkten eine stärkere Singularität als das Coulombpotential. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen werden in Abhängigkeit von  $V_0 a^2$  angegeben. Die effektive Masse wird berechnet. Sowohl die Näherung für gebundene Elektronen, als auch (wegen der Singularität des Potentials) die Näherung für freie Elektronen liefern keine mit den strengen Werten übereinstimmenden Ergebnisse. Die Eigenfunktionen können evtl. als Basis für eine Störungsrechnung dienen.

*H. W. Streitwolf.*

**Parmenter, R. H.:** Acousto-electric effect. Phys. Review, II. Ser. **113**, 102—109 (1959).

Verschiedene theoretische Ansätze zur Beschreibung des akustoelektrischen Effektes in festen Körpern (Erzeugung eines Kurzschlußstromes oder einer Leerlaufspannung durch eine longitudinal laufende Schallwelle) werden miteinander verglichen und einige in der Literatur vorhandene Widersprüche aufgeklärt.

*O. Madelung.*

**Edwards, S. F.:** A new method for the evaluation of electric conductivity in metals. Philos. Mag., VIII. Ser. **3**, 1020—1031 (1958).

“A method is developed which allows the evaluation of the closed formal expressions for electrical conductivity which have recently been developed by several authors. The case of a random set of scatterers is treated in detail and the formal solution made to yield directly the solution to the Boltzmann equation” (from the author's summary).

*P. T. Landsberg.*

**Block, B.:** Generalized transport theory. Ann. of Phys. **6**, 37—49 (1959).

In der vorliegenden Arbeit werden die Überlegungen von Lax (dies. Zbl. **80**, 452) fortgesetzt. Dabei wird im Fall schwacher Kopplung ( $a$  des Gitters z. B.) sowohl klassisch als auch quantentheoretisch eine Formulierung der Theorie gegeben, jeweils von der „Heisenbergschen Form der Bewegungsgleichungen“ ausgehend. Spezielle Anwendungen: Gültigkeitsgrenzen der klassischen Behandlung des Ohmschen Verhaltens; Halleffekt und Magnetwiderstand.

*W. Klose.*

**Gurži (Gurshi), R. N.:** A quantum mechanical transport equation for electrons in metals. Soviet Phys., JETP **6**, 352—358 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. **33**, 451—458 (1959).

Zur Behandlung des anomalen Skin-Effektes wird unter Verwendung der Dichtematrix eine quantenmechanische Transportgleichung für Elektronen in Metallen abgeleitet, die auch noch für den Fall gültig ist, daß die Photonenenergie der elektromagnetischen Welle groß gegen  $kT$  ist.

*G. Blankenfeld.*

**García-Moliner, F.:** A variational calculation of electronic transport in a magnetic field. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **249**, 73—89 (1959).

Transportvorgänge für unendlich ausgedehnte Metalle im Magnetfeld werden mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung behandelt. Der vom Magnetfeld abhängige Term wird in üblicher Weise in die Boltzmann-Gleichung eingeführt. Die Boltzmann-Gleichung wird in ein Variationsproblem umtransformiert. Die zur Lösung des Variationsproblems benutzten Vergleichsfunktionen werden nach kubischen harmonischen Funktionen entwickelt. Dabei sind die den Onsagerschen Relationen entsprechenden Reziprozitätsbeziehungen in jeder Näherung erfüllt. Für den elektrischen Widerstand folgt formal derselbe Ausdruck, den Seitz 1950 für kubische Kristalle phänomenologisch, allerdings unter der Voraussetzung kleiner Feldstärken abgeleitet hat. Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes vom Magnetfeld sollte nach den Ergebnissen des Autors für hohe Feldstärken eine Sättigung zeigen und isotrop werden. Für mittlere Feldstärken wird jedoch eine stark anisotrope Abhängigkeit gefunden, die mit den Beobachtungen qualitativ übereinstimmt. Für kleine Feldstärken werden die hier erhaltenen Ergebnisse mit der exakten Theorie von Jones und Zener verglichen.

*H. W. Streitwolf.*



Azbel', M. Ja. (M. Ia.): Quantum theory of the high frequency conductivity of metals. Soviet Phys., JETP 7, 669—678 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 34, 969—983 (1958).

Verf. entwickelt eine quantenmechanische Leitfähigkeitstheorie für Metalle in einem hochfrequenten elektromagnetischen Feld und einem konstanten Magnetfeld, wobei das Metall einen Halbraum erfüllt. Dispersionsgesetz für die Leitfähigkeitselektronen und Streubedingungen für die Metallelektronen an der Metalloberfläche sind dabei weitgehend willkürlich gelassen. Die quantenmechanische Theorie liefert Oszillationen der Leitfähigkeit, die beträchtlich größer sind als die diamagnetischen Oszillationen der statischen Leitfähigkeit des kompakten Materials.

G. Blankenfeld.

Azbel', M. Ya (M. Ja): The quantum theory of the high frequency surface impedance of a metal. Phys. Chem. Solids 7, 105—117 (1958).

Verf. berechnet die Oberflächenimpedanz eines Metalles bei Anwesenheit eines konstanten Magnetfeldes, dessen Richtung zur Metalloberfläche beliebig ist. Die Rechnung erfolgt unter Verwendung des Dichteoperators. Über das Dispersionsgesetz der Leitfähigkeitselektronen werden keine speziellen Annahmen gemacht. Es wird die Möglichkeit diskutiert, aus den gewonnenen experimentellen Daten die Gestalt der Fermioberfläche zu berechnen und die Geschwindigkeit der Elektronen an der Fermioberfläche zu bestimmen.

G. Blankenfeld.

Rodriguez, Sergio: Theory of cyclotron resonance in metals. Phys. Review, II. Ser. 112, 1616—1620 (1958).

Verf. berechnet die Oberflächenimpedanz eines Metalles, wenn ein konstantes Magnetfeld besteht, das zur Metalloberfläche parallel ist. Unter der Voraussetzung sphärischer Energieflächen für die Metallelektronen sowie spiegelnder Reflexion der Elektronen an der Metalloberfläche werden die zwei Fälle behandelt, daß das elektrische Feld der einfallenden elektromagnetischen Welle parallel zum konstanten Magnetfeld und senkrecht dazu ist. Der Rechnung liegt die linearisierte Boltzmann-Gleichung zugrunde; die Existenz einer Relaxationszeit wird vorausgesetzt. Es zeigt sich, daß Lage, Intensität und Breite der Zyklotronresonanzlinien für longitudinale und transversale Zyklotronresonanz die gleichen sind.

G. Blankenfeld.

Kaner, É. A.: Theory of cyclotron resonance. Soviet Phys., JETP 6, 1135—1138 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 1472—1476 (1957).

Im ersten Teil der Arbeit wird die Möglichkeit einer Zyklotronresonanz in Metallen für den Fall untersucht, daß das für den Effekt entscheidende konstante Magnetfeld gegen die Metalloberfläche geneigt ist. Im zweiten Teil der Arbeit wird ein zur Metalloberfläche paralleles Magnetfeld angenommen und die Oberflächenimpedanz in Abhängigkeit von den Reflexionsverhältnissen (diffuse Streuung oder elastische Reflexion der Elektronen an der Metalloberfläche) berechnet.

G. Blankenfeld.

Kaner, É. A.: Cyclotron resonance in plasma. Soviet Phys., JETP 6, 425—427 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 544—546 (1957).

Verf. berechnet unter den Bedingungen für anomalen Skin-Effekt die Oberflächenimpedanz eines Elektron-Ion-Plasmas (bei Vernachlässigung der Ionenbewegung), das einen Halbraum erfüllt. Messungen der Zyklotronresonanz gestatten eine genauere Bestimmung von Relaxationszeiten als die sonstigen Verfahren.

G. Blankenfeld.

Silin, V. P.: On the theory of the anomalous skin effect in metals. Soviet Phys. JETP 6, 985—988 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 1282—1286 (1957).

In den bisherigen Theorien des anomalen Skin-Effektes wird das Modell des Elektronengases zugrunde gelegt. Der Verf. geht von der Landauschen Theorie

der Fermi-Flüssigkeit aus und zeigt, daß die aus der Messung der Oberflächenimpedanz gewonnene Kenntnis über die Fermi-Oberfläche nicht davon abhängt, ob man die Elektronen als Gas oder als Flüssigkeit behandelt.

*G. Blankenfeld.*

**Mattis, D. C. and G. Dresselhaus:** Anomalous skin effect in a magnetic field. Phys. Review, II. Ser. **111**, 403—411 (1958).

Verff. berechnen im ersten Teil der Arbeit auf klassischem Wege die Oberflächenimpedanz eines Metalles bei Anwesenheit eines konstanten, zur Oberfläche des Metalles parallelen Magnetfeldes. Sie behandeln den Fall der longitudinalen Zyklotronresonanz (konstantes Magnetfeld und elektrisches Feld der einfallenden elektromagnetischen Welle parallel). Sie gehen bei der Berechnung von der linearisierten Boltzmann-Gleichung aus und setzen die Existenz einer Relaxationszeit voraus. Im zweiten Teil wird dasselbe Problem quantenmechanisch unter Verwendung des statistischen Operators behandelt. Das Resultat weicht nur für niedrige Quantenzahlen und starkes Magnetfeld vom klassischen Ergebnis ab. An Stelle des Resonanzverhaltens findet man dann eine Änderung der Oberflächenimpedanz vom de Haas-van Alphen-Typ.

*G. Blankenfeld.*

**Czaja, W.:** Über die Anwendung der Thermodynamik irreversibler Prozesse auf Leitungsvorgänge in Halbleitern. Helvet. phys. Acta **32**, 1—23 (1959).

Die Grundgleichungen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse werden auf Leitungsvorgänge in Halbleitern angewandt. Als Transportprozesse werden Wärmeleitung, Wanderung von Elektronen und Löchern, als innere Umwandlung die Rekombination bzw. Erzeugung von Elektronen und Löchern angesetzt. Einige Anwendungen werden diskutiert.

*J. Meixner.*

**Walton, A. K. and T. S. Moss:** The theory of electrical and photoelectric effects for three carriers in a magnetic field. Proc. phys. Soc. **73**, 399—412 (1959).

Im Rahmen des Drei-Ladungsträger-Modells (Elektronen, schnelle und langsame Löcher) werden Formeln für Hall-Effekte, Widerstandsänderung im Magnetfeld, PEM- und Dember-Effekt abgeleitet und die Resultate auf den Fall des Germaniums angewandt.

*O. Madelung.*

**Ziman, J. M.:** The thermoelectric power of the alkali metals at low temperatures. Philos. Mag., VIII. Ser. **4**, 371—379 (1959).

Es wird der infolge des „Phonon-drags“ hervorgerufene Anteil der absoluten Thermokraft bei Alkalimetallen mit Hilfe eines Variationsverfahrens berechnet. Dabei werden auch Umklappprozesse berücksichtigt, wodurch ein positives Vorzeichen der Thermokraft erklärt werden kann. Diese „Gitter-Thermokraft“ ist verhältnismäßig stark von der Form der Fermifläche abhängig. Entscheidend ist dabei der minimale Abstand der Fermifläche von der Oberfläche der 1. Brillouin-Zone. Die Fermifläche wird daher durch eine Kugel approximiert, die den gleichen minimalen Abstand hat. Für Na erhält man unter Annahme einer sphärischen Fermifläche gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Bei bekannter Form der Fermifläche können eventuell Aussagen über die Art der Elektron-Phonon-Wechselwirkung gemacht werden.

*H. W. Streitwolf.*

**Bloch, F.:** Theory of line narrowing by double-frequency irradiation. Phys. Review, II. Ser. **111**, 841—853 (1958).

Ausgehend von der allgemeinen Gleichung für die Verteilungsmatrix, wird die magnetische Resonanzabsorption in Kristallen durch Einführung der Fourier-Transformierten für die Resonanzlinie behandelt. Mit Hilfe dieser Methode werden zunächst einige früher von VanVleck gewonnene Ergebnisse über die Linienmomente abgeleitet. Anschließend wird das Verfahren auf den experimentell untersuchten Fall angewandt, bei welchem die Resonanz-Absorption eines magnetischen Bestandteils beobachtet wird, während gleichzeitig ein anderer magnetischer Bestandteil einem starken Resonanzfeld ausgesetzt ist (Beispielsweise  $\text{Na}^{23}$  und  $\text{F}^{19}$ ).

in NaF). Es wird gezeigt, daß die Absorptionslinie aus einer Zentrallinie und schwachen Seitenbändern besteht. Der beobachteten Breitenabnahme der Zentrallinie entspricht eine Abnahme des zweiten Moments dieser Linie. Das totale Moment der Linie wird dagegen durch die Bestrahlung des anderen magnetischen Bestandteils nicht geändert, weil der Momentenverlust der Zentrallinie durch die Seitenbänder kompensiert wird.

W. Oldekop.

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Giannuzzi, Maria Antonietta: *Determinazione delle densità delle componenti in un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse. I.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 533—536 (1958).

In der Beziehung für Doppelsterne (2-Körperproblem)  $\mu_1 + \mu_2 = (a'')^3/(\pi'')^3 P^2$  kann die Parallaxe  $\pi''$  vermittelt

$M - m = 5 + 5 \log \pi'' = -5 (\log R + 2 \log T - M_\odot/5 - \lg R_0 - 2 \log T_\odot)$  eliminiert werden. Ohne Kenntnis der Doppelsternparallaxe kann man bei bekanntem  $(T_1, T_2)$  zunächst aus

$$m_2 - m_1 = 5 \log R_1/R_2 + 10 \log T_1/T_2$$

$R_1/R_2$  bestimmen. Die Größe  $\beta = \mu_1/\mu_2$  ist im Falle, wo die Absolutbewegung des Doppelsterns bekannt ist, aus  $\mu_1 : \mu_2 = a_2 : a_1$  zu entnehmen; andernfalls greift man auf die Masse-Leuchtkraftbeziehung  $L = \mu^{3.58}$  zurück und bestimmt  $\beta = 10^{\frac{m_2 - m_1}{8.95}}$ .

Mit  $V_1/V_2 = (R_1/R_2)^3 = \alpha$  folgt dann  $\varrho_1/\varrho_2 = \beta : \alpha$ ; ferner hat man  $\varrho/\varrho_2 = (\beta + 1)/(\alpha + 1)$ , wo  $\varrho$  die mittlere Dichte des Doppelsternsystems ist, die aus  $C (a'')^2/P^2 = \varrho \{10^{-0.6 m_1}/T_1^6 + 10^{-0.6 m_2}/T_2^6\}$  mit  $C = \frac{3}{4} \pi^{-1} 10^{3(0.2 h_\odot + 1)}$  folgt.

J. Fleckenstein.

● Ambartsumyan (Ambarcumjan), V. A. (edited by): *Theoretical astrophysics*. Transl. from the russian by J. B. Sykes. London, New York, Paris, Los Angeles: Pergamon Press 1958. XV, 645 p. £ 6 15 s. net, \$ 22,50.

Das erste Lehrbuch der theoretischen Astrophysik in russischer Sprache wurde 1939 von Ambarcumjan geschrieben. 1952 erschien in Moskau eine völlig umgearbeitete Neuauflage als gemeinsames Werk von fünf Autoren mit Ambarcumjan als Herausgeber; eine deutsche, von den Autoren selbst revidierte Übersetzung kam 1957 heraus (Berlin). Das vorliegende Buch ist die hervorragend gelungene englische Übersetzung von J. B. Sykes, ebenfalls von den Autoren selbst durchgesehen, stellenweise ergänzt und auf den neuesten Stand gebracht. Inhaltlich unterscheiden sich die drei Ausgaben nur wenig. Abgesehen von kleineren Änderungen im Vorwort und im Text sind nur drei ganz kurze Abschnitte über Polarisation des Sternlichts, über allgemeine Radio-Emission und über den Crab-Nebel in der englischen Ausgabe neu hinzu gekommen. — Das Buch umfaßt, bei einem Umfang von über 600 Seiten, tatsächlich das Gesamtgebiet der theoretischen Astrophysik. Es ist als Standardlehrbuch an sowjetischen Universitäten eingeführt und legt dementsprechend das Hauptgewicht auf die klassischen Probleme; in der Darstellung stehen die Methoden im Vordergrund. Beobachtungsdaten werden im allgemeinen knapp geschildert, ebenso knapp werden die nötigen physikalischen Sätze und Begriffe eingeführt, und zwar nicht in eigenen Vorkapiteln, sondern unmittelbar in dem Zusammenhang, in dem sie gebraucht werden. Der mathematische Apparat wird zugunsten der physikalischen Diskussion eingeschränkt. Die Darstellung ist gründlich, flüssig und anregend, sie erhält besonderes Interesse dadurch, daß den bei uns oft wenig bekannten Arbeiten sowjetischer Astrophysiker ein breiter Raum gewidmet ist. Allerdings entsteht dadurch nicht selten ein einseitiges Bild, gut illustriert durch das Literaturverzeichnis, das zu 61% russische Titel führt. Kaum oder gar nicht berührt werden neue Probleme: Sternentstehung und Sternentwicklung, Elemententstehung, Kosmische Strahlung,



Synchrotronstrahlung, Radioastronomie. Die Kosmologie ist nicht in den Rahmen der theoretischen Astrophysik einbezogen. Das Buch besteht aus neun Teilen. Die ersten drei Teile mit fast zwei Dritteln des gesamten Umfangs stammen von E. R. Mustel und behandeln Sternatmosphären und Sonnenphysik. In Teil I (Theorie des Strahlungsgleichgewichtes von Sternatmosphären und des kontinuierlichen Spektrums der Sterne) ist besonders bemerkenswert Kap. 8 mit der Diskussion der Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht und der Mustelschen Methode für die Behandlung nichtgrauer Sternatmosphären. Teil II behandelt die Entstehung der Fraunhoferlinien in Sternspektren. Als wesentlicher Mechanismus wird die Streuung betrachtet, in Kap. 9 wird als Hauptargument dafür das Nichtverschwinden starker Absorptionslinien am Sonnenrand angeführt — daß dafür ein scharfer Temperaturabstieg an der Grenze der Photosphäre verantwortlich sein kann und daß die Zentren starker Fraunhoferlinien offenbar in der unteren Chromosphäre entstehen, wird nicht erwähnt. Teil III behandelt unter dem Titel „Physik der Sonnenhüllen“ Granulation, Sonnenflecken, Protuberanzen, Chromosphäre, Flares und in zwei besonders interessanten Kapiteln aus der Feder von S. B. Pikelner elektromagnetisch-hydrodynamische Phänomene in der Sonnenatmosphäre, Korona und Radioemission der Sonne. Teil IV ist den Planetarischen Nebeln gewidmet (V. V. Sobolev). Teil V (Novae), ebenfalls von Sobolev, zeichnet sich aus durch die schöne Darstellung der Arbeiten von Mustel. Teil VI (Sterne mit Emissionslinien, von Sobolev) bringt wertvolle Untersuchungen aus einem sonst gelegentlich vernachlässigten Gebiet; dieser Teil enthält auch einen Abschnitt über Sternassoziationen. In Teil VII behandelt Severnij den inneren Aufbau der Sterne. Dies ist der umstrittenste Teil des Buches. Die Theorie bleibt durchweg bei der Annahme chemisch homogenen Aufbaus stehen, die Darstellung der Energieerzeugung durch Kernreaktionen ist veraltet, Schalenquellenmodelle werden überhaupt nicht erwähnt. Ebenso wenig ist behandelt die Pulsationstheorie, der innere Aufbau rotierender Sterne und Stabilitätsfragen. Die Schlußkapitel stammen von Ambarcumjan und berücksichtigen in sehr eigenwilliger, aber interessanter Form vor allem die Arbeiten dieses Autors selbst. Dabei ist in Teil VIII (Streuung des Lichtes in Planetenatmosphären) besonders der schöne Abschnitt über Ambarcumjans Invarianzprinzip und dessen Anwendung hervorzuheben. Teil IX (Interstellare Materie) ist zu kurz und läßt vieles vermissen, erwähnt wird W. J. Struve, es fehlen die Namen Wolfs, Trümpfers und Hartmanns, und andererseits werden Ewen und Purcell als Entdecker der 21-cm-Linie zitiert. Trotz mancher Einseitigkeiten und der in einem solchen Werk wohl unvermeidlichen Fehler ist aber das Buch zum Studium wirklich zu empfehlen, auch für den Studenten, dem es in gut lesbarer Darstellung ein fundiertes Wissen in den meisten Gebieten der theoretischen Astrophysik vermittelt. Ein ganz besonderer Wert kommt dem Werk aber dadurch zu, daß es als Ganzes auch eine ausgedehnte und zuverlässige Zusammenfassung sowjetischer Beiträge zur theoretischen Astrophysik darstellt, die ja für diejenigen, die die russische Sprache nicht kennen, nur schwer zugänglich sind. Namen- und Sachverzeichnis sind recht vollständig, Druck und Ausstattung hervorragend.

*Th. Schmidt-Kaler.*

● **Ambarzumjan (Ambarcumjan), V. A. (u. a.): Theoretische Astrophysik.** (Hochschulbücher für Physik. Band 27.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957. XII, 644 S. 75 Abb. Leinen DM 42,—.

Vgl. die vorstehende Besprechung der englischen Übersetzung.

**Kippenhahn, R., St. Temesváry und L. Biermann: Sternmodelle I. Die Entwicklung der Sterne der Population II.** Z. Astrophys. 46, 257—275 (1958).

Die von Hoyle und Schwarzschild berechnete Entwicklungssequenz von Sternen der Population II wird erneut diskutiert. Es werden quasistationäre Modelle eines Sternes mit festgehaltener Masse ( $M = 1,2 M_{\text{Sonne}}$ ) und inhomogener chemi-

scher Zusammensetzung berechnet. Der Kern besteht aus Helium mit zunehmendem Massenanteil und ist isotherm entartet. Er ist von einer Schalenquelle der Energieerzeugung umgeben (Kohlenstoff-Stickstoff-Zyklus). Die äußeren Teile bestehen vorwiegend aus Wasserstoff. Die 4 Gleichungen des inneren Aufbaus der Sterne werden direkt von außen nach innen mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine *G 2* integriert, indem die Oberflächenbedingungen  $L$  und  $T_e$  (außer der bereits vorgegebenen Gesamtmasse) versuchsweise vorgegeben werden. Die richtige Kombination  $L$ ,  $T_e$  erfüllt dann die Zentralbedingung  $M_r = L_r = 0$ . Die so berechnete Entwicklung weicht im ersten Teil der Sequenz von der von Hoyle und Schwarzschild berechneten Sequenz nicht wesentlich ab. Der weitere Verlauf ist jedoch erheblich flacher als bei den oben genannten. Dies erklärt sich dadurch, daß dort die Effektivität der Wasserstoffkonvektionszone überschätzt ist. *K. Hunger.*

**Scheffler, H.: Streuung von Radiowellen in der Sonnenkorona und die Mitte-Rand-Variation der ruhigen solaren Meterwellenstrahlung.** *Z. Astrophys.* **45**, 113—148 (1958).

Auf Grund der von Hewish und Witkewitsch experimentell gefundenen Winkeldurchmesservergrößerung der Radioquelle Taurus A bei Durchstrahlung der äußeren Sonnenkorona, wobei man diese Vergrößerung als unter dem Einfluß von streuenden Elektronendichte-Inhomogenitäten zustande kommend deutet, unternimmt es der Verf., den Einfluß dieser auch in der inneren Korona als vorhanden angenommenen Dichtefluktuationen auf die Strahlbahnen der thermischen Meterwellenstrahlung zu berechnen, um auf diesem Wege die bisherige Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung der Mitte-Rand-Variation der Radiostrahlung aufzuheben. Da aus der Gesamtheit der Strahlbahnen die Mitte-Rand-Variation resultiert, wird auch diese von der Inhomogenitätenstreuung affiziert, und zwar in dem Sinne, daß die bisherigen theoretischen M. R. V.-Profile verflacht und damit den gemessenen Profilen genähert werden, wobei allerdings die letzteren noch durch andere, bisher quantitativ nicht genau erfaßte Einflüsse wie z. B. mangelndes Antennenauflösungsvermögen beeinflusst sein können. Unter der Voraussetzung statistisch verteilter Inhomogenitäten im sonst sphärisch angenommenen radialen Elektronendichteverlauf und mit der Annahme, daß merkliche Dichteänderungen nur auf Strecken auftreten, die groß gegen die Wellenlänge der Strahlung im Elektronenplasma sind, ergeben sich längs einer ungestörten Strahlbahn zu nehmende Linienintegrale über das mittlere effektive Verhältnis von Dichteschwankung zu Schwankungsbereichsausdehnung als für den Streueffekt maßgeblich. Die entwickelten Formeln werden dazu benutzt, um denjenigen radialen Verlauf des eben genannten Verhältnisses in der Sonnenkorona zu ermitteln, der erforderlich wäre, um sowohl die beobachtete Mitte-Rand-Variation für mehrere Wellenlängen als auch die eingangs erwähnte Winkelvergrößerung wiederzugeben. Da die getrennte Ermittlung der beiden in das Verhältnis eingehenden Größen nicht möglich ist, werden 2 ausgezeichnete Fälle, nämlich diejenigen konstanter mittlerer relativer Dichteschwankung und konstanter Schwankungsbereichsausdehnung näher untersucht und ihr Einfluß auf die Helligkeitsschwankungen der optischen Strahlung der Korona diskutiert. *R. W. Larenz.*

**Böhm, K. H.: Über die Größe der Konvektionselemente in Schichten mit variablem Temperaturgradienten.** *Z. Astrophys.* **46**, 245—256 (1958).

Die Annahme, daß die Größe der Konvektionselemente bzw. der Mischungsweg in einer Sternatmosphäre gleich der lokalen Äquivalenthöhe ist, führt zu Schwierigkeiten. Die Beobachtungen an der Sonne zeigen, daß die Größe der Granulen weder der Äquivalenthöhe in der Photosphäre noch der Dicke der gesamten Wasserstoffkonvektionszone entspricht, sondern vielmehr der Dicke der oberen, infolge der partiellen Ionisation des Wasserstoffs sehr instabilen Schicht von etwa 500 km. Untersuchungen der Instabilitäten nach der Rayleighschen Methode ergeben für den horizontalen Durchmesser der instabilsten Konvektionselemente die gleiche Größe.



Im Anhang wird die Konvektionsinstabilität einer polytropen Atmosphäre unter Berücksichtigung einer starken Dichteveriation wie bereits bei A. Skumanich, aber für ein etwas verschiedenes Beispiel untersucht.

*K. Hunger.*

**Segre, Sergio: Un modello della struttura interna di Algol A. II.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **24**, 537—541 (1958).

In diesem 2. Teil (Teil I, s. dies. Zbl. **81**, 239) der Untersuchungen über den inneren Aufbau von Algol A wird der isotherme Kern numerisch berechnet. Der Kern besteht aus Helium. Es ist umgeben von einer dünnen energiereich erzeugenden Hülle. Die äußeren Teile des Sterns sollen sich im Strahlungsgleichgewicht befinden. Die Beobachtungen lassen aber eher einen konvektiven Kern vermuten.

*K. Hunger.*

● **Kotsakis, Dem.: The origin of solar system.** Athen 1959. 108 S. [Neugriechisch].

**Levallois, Jean-Jaques: Sur la détermination du géoïde par des mesures gravimétriques sur la surface topographique.** C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2479—2482 (1957).

Herleitung einer Integro-Differentialgleichung zur Berechnung der Gestalt des „Co-Geoids“ (Abkürzung von kompensiertem G.), welches zu isostatisch reduzierten Schwerewerten gehört.

*W. Kertz.*

**Norinelli, Armando: Il gradiente del campo gravitazionale.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **22**, 470—477 (1957).

Es wird das Gradientenfeld des absoluten Betrages der Schwerebeschleunigung gebildet. Geometrische Beziehungen zwischen diesem und dem ursprünglichen Schwerfeld werden untersucht für das Feld von zwei Massenpunkten.

*W. Kertz.*

● **Ewing, W. Maurice, Wenceslas S. Jardetzky and Frank Press: Elastic waves in layered media.** (Lamont Geological Observatory Contribution No. 189. McGraw-Hill Series in the Geological Sciences.) New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1957. X, 380 p. \$ 10,—.

In 7 Kapiteln wird die Theorie der Ausbreitung seismischer Wellen in den oberflächennahen Schichten der Erde entwickelt: 1. Grundgleichungen und Lösungen für den Vollraum. 2. Homogener und isotroper Halbraum. 3. Zwei Halbräume, die an einer vertikalen Trennungsebene aneinanderstoßen. 4. (Hauptkapitel mit 130 Seiten) Geschichteter Halbraum. 5. Einfluß der Schwere, Oberflächenkrümmung und inneren Reibung. 6. Schwingungen von Platten und Zylindern. 7. Wellenausbreitung in Medien mit variabler Geschwindigkeit. Im Anhang werden die Verfahren der Sattelpunktmethode und der Lösung von Eigenwertproblemen nach dem Rayleighschen Prinzip dargestellt, weil sie in den vorausgegangenen Kapiteln laufend gebraucht wurden. Daraus ist auch die mathematische Behandlung der Probleme zu erkennen. Die Lösung der behandelten Randwertaufgaben erfolgt nach der Strahl- und der „mode“-Theorie. Für die zeitliche Erregung wird allgemein ein seismischer „pulse“ angenommen. Jedes Kapitel enthält ausführliche Literaturangaben, wobei naturgemäß die zahlreichen (und verstreuten) Arbeiten der Verff. einen breiten Raum einnehmen. Für die seismischen Anwendungen sind besonders wichtig die Darstellung der Ausbreitung von Rayleigh- und Love-Wellen am Grunde des Ozeans und über die Kontinente, Rayleigh-Wellen im Erdmantel, Mikroseismik und die SOFAR (sound fixing and ranging)-Schallausbreitung. Häufig wird auf seismische Modellexperimente mit Überschall Bezug genommen.

*W. Kertz.*

**Jeffreys, Harold and E. R. Lapwood: The reflexion of a pulse within a sphere.** Proc. roy. Soc. London, Ser. A **241**, Nr. 1227, 455—479 (1957).

Zum Studium des unterschiedlichen Verhaltens der an der Erdoberfläche reflektierten seismischen Impulse werden in einem vereinfachten Modell die Reflexionen in einer homogenen, kompressiblen Flüssigkeitskugel (keine Scherungswellen!) untersucht. Die Lösung hat die Form einer unendlichen Reihe von Legendreschen Polynomen mit Koeffizienten, die sich durch Quotienten aus Besselfunktionen dar-



stellen lassen. Nach einem dem entsprechenden Problem für elektromagnetische Wellen nachgebildeten Verfahren wird diese Lösung auf eine Integraldarstellung transformiert und die Integrale nach der Sattelpunktmethode näherungsweise berechnet. Die einzelnen Lösungsterme lassen sich nach der geometrischen Strahltheorie deuten. Über die Strahltheorie hinaus erhält man aber auch Aussagen über die Form der ankommenden reflektierten Impulse. Diese ist unterschiedlich je nachdem, ob die Bahnen echte Extreme darstellen oder nicht. Dies erklärt das in der Seismik beobachtete unterschiedliche Aussehen des etwa auf halbem Wege zwischen Herd und Station reflektierten  $PP$ -Einsatzes von dem in der Nähe des Herdes reflektierten  $pP$ -Einsatzes. Letzterer hat einen scharfen Einsatz, während ersterer „verwaschen“ erscheint. Die zugehörigen Zeitfunktionen sollen sich verhalten wie Fourierintegrale zu ihren zugeordneten, bei denen die Koeffizientenfunktionen der  $\cos$ - und  $\sin$ -Glieder vertauscht sind. *W. Kertz.*

**Fognolo Massaglia, Bruna:** Sulla rappresentazione delle onde sismiche della fase di Rayleigh. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **91**, 20—39 (1957)

Die Ausbreitung seismischer Wellen in einem zweischichtigen Medium wird berechnet. Dabei handelt es sich um die Verallgemeinerung einer Untersuchung von Love über Rayleighwellen für die Nachbarschaft des Epizentrums. *W. Kertz.*

**Duwal, George and J. A. Jacobs:** Effects of a liquid core on the propagation of seismic waves. *Canadian J. Phys.* **37**, 109—128 (1959).

Beugungserscheinungen an einer flüssigen Kugel, die in ein festes, homogenes, isotropes elastisches Medium eingebettet ist, werden untersucht unter der Bedingung, daß der Kugelumfang groß gegen die Wellenlänge ist. Die Lösungen werden nach der Residuenmethode aus Integraldarstellungen gewonnen. Die Erregungsquelle liegt außerhalb der Kugel. Bei der Aussendung von Longitudinalwellen entstehen gebeugte Longitudinal- und Transversalwellen. Letztere sind in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt polarisiert ( $SV$ -Wellen). Sendet die Quelle hingegen Transversalwellen aus, deren Polarisationssebene die Kugel tangieren ( $SH$ -Wellen), so sind auch die gebeugten Wellen reine  $SH$ -Wellen. Für beide Fälle wird das Abnahmegesetz in der Schattenzone als Funktion der Frequenz angegeben. *W. Kertz.*

**Jeffreys, Harold:** Rock creep, tidal friction and the moon's ellipticities. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **118**, 14—17 (1958).

Es wird ein Gesetz für die elastische Nachwirkung von Gesteinen angegeben, welches sowohl mit seismischen Beobachtungen als auch den beobachteten Breiten-schwankungen und der Gezeitenreibung des Mondes und anderer Himmelskörper übereinstimmt. *W. Kertz.*

**Gruzewski, Aleksander:** Application of a certain stochastic process to the computation of the mean geostatic pressure. *Arch. Mech. stosow.* **10**, 115—125 (1958).

Berechnung des Erwartungswertes des statischen Druckes von Gesteinsschichten als Funktion der Tiefe. Die Gesteinsschichten sollen dabei aus zwei verschiedenen Materialien (mit unterschiedlicher Dichte) bestehen. Anordnung und Dicke der einzelnen Schichten seien statistisch verteilt. Das Problem läßt sich als „Markoffsche Kette“ behandeln. *W. Kertz.*

**Fedorov, E. P.:** On the forces of interaction between the earth's core and shell, due to the nutation. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **115**, 1084—1087 (1957) [Russisch].

Unter der Annahme, daß der Kern und die Schale der Erde sich nicht gegeneinander bewegen, berechnet Verf. die Momente der zwischen ihnen wirkenden Wechselwirkungskräfte, die sich infolge des Hauptgliedes und des Halbmonatsgliedes der Nutation ergeben; die Effekte der Beweglichkeit des Kernes gegenüber der Schale werden nachträglich qualitativ diskutiert. *I. Földes.*

**Coulmy, Geneviève:** Analyse et prédiction des marées. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 1960—1962 (1958).



Les amplitudes et les phases intervenant dans une somme de termes sinusoïdaux dont les périodes connues sont déterminées par la méthode de Labrouste (Méthode d'analyse par combinaison linéaire d'ordonnées, Paris 1943). Les résultats relatifs au cas des marées de Port Martin (Terre déliée) sont donnés.

*J. Kuntzmann.*

**Proudman, J.:** On the series that represent tides and surges in an estuary. *J. Fluid Mechanics* 3, 411—417 (1958).

Zwecks Verbesserung der Gezeitenberechnung wird für eine fortschreitende Welle allgemeiner Gestalt in einer breiten und unendlichen langen Flußmündung mit ständiger Flußströmung und mit gleichförmigem Querschnitt bei Vernachlässigung der Reibung die Oberflächenauslenkung und Gezeitengeschwindigkeit in Form einer unendlichen Reihe dargestellt. Für den Fall einer einzigen Harmonischen an der Mündung werden über die ersten drei seit Airy bekannten harmonischen Glieder der Seichtwasserwelle hinaus noch zwei weitere für einen beliebigen Punkt stromauf angegeben.

*J. Pretsch.*

**Crease, J.:** The propagation of long waves into a semi-infinite channel in a rotating system. *J. Fluid Mechanics* 4, 306—320 (1958).

In einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. 71, 208) ist gezeigt worden, daß lange Gezeitenwellen, die normal auf eine halbunendlich lange Barriere auftreffen, in einem rotierenden System das Auftreten Kelvinscher Wellen im Raum hinter der Barriere verursachen. Die Amplitude dieser sekundären Wellen schwächt sich in der Richtung der Barriere nicht ab, sondern nur normal dazu. Bei bestimmten Verhältnissen der Wellenfrequenzen können die Amplituden der Sekundärwellen größer sein als die der einfallenden Wellen. Man kann dieses Modell als eine Idealisierung der Verhältnisse in der Nordsee auffassen, wobei die Barriere von den Britischen Inseln gebildet wird. In der vorliegenden Arbeit wird darüberhinausgehend der Fall untersucht, daß der Raum hinter der Barriere durch eine zweite Barriere parallel zur ersten begrenzt wird. Dabei werden die beiden Fälle behandelt, daß die zweite Barriere entweder unendlich lang oder ebenfalls halbunendlich lang ist. Bei Vernachlässigung der Erddrehung erhält man Gleichungen, die für analoge elektrische oder akustische Probleme bereits gelöst sind. Die sich bei Berücksichtigung der Erddrehung ergebenden Lösungen werden mit Hilfe des Greenschen Satzes als Kurvenintegrale dargestellt. Für beide Fälle der Barriere werden numerische Werte berechnet, die den Verhältnissen der Nordsee angepaßt sind. Dabei zeigt sich, daß bei der unendlich langen zweiten Barriere der Einfluß der Erddrehung herausfällt, dagegen nicht bei der halbunendlich langen Barriere. Die in der Nordsee beobachteten Werte für die Amplitude der halbtäglichen Gezeitenwellen im Verhältnis zu den im Atlantik einfallenden Wellen sind in besserer Übereinstimmung mit dem Modell der halbunendlichen langen Barriere.

*W. Wuest.*

**Greenspan, H. P.:** On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mechanics* 4, 330—334 (1958).

In Fortführung einer kürzlich referierten Untersuchung (Carrier und Greenspan, dieses Zbl. 80, 195) wird gezeigt, daß Wellen, welche gegen ruhendes Wasser auf einen schrägen Strand zulaufen, noch vorm Erreichen der Küstenlinie gebrochen werden, wenn das Wellenprofil nicht tangential in das ruhige Wasser übergeht. Aus den Anfangsbedingungen läßt sich der Ort angeben, wo die Wellen gebrochen werden.

*K. Eggers.*

**Šulejkin (Shulejkin), V. V. (W. W.):** Growth in length of high wind waves and the role of turbulent internal friction. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 113, 560—563 (1957) [Russisch].

Verf. berechnet angenähert den Einfluß der inneren Reibung des Wassers auf die Wellenlänge der durch Wind erzeugten Oberflächenwellen des Meeres. Die theoretischen Ergebnisse werden von den Experimenten bestätigt.

*J. Zierep.*



● **Mauersberger, Peter, Otto Lucke, Robert Lauterbach und Friedrich Frölich:** *Über das aus dem Erdinnern stammende Magnetfeld.* (Geomagnetismus und Aeronomie. Bd. 3.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959. XII, 632 S. DM 123,—.

Dies ist der zuerst erschienene Band einer sechsbändigen Schriftenreihe. Er enthält die Kapitel 9 bis 14: 9. Beobachtungsergebnisse über das Hauptfeld und die Säkularvariation. Von mathematischem Interesse ist darin besonders ein Abschnitt über die Konstruktion geomagnetischer Karten. 10. Mathematische Beschreibung und statistische Untersuchung des Hauptfeldes und der Säkularvariation. Entwicklung des Potentials und der Feldkomponenten nach Kugelfunktionen. Gaußsches Verfahren der Trennung von „Innen“- und „Außenfeld“. Neu ist die Übertragung statistischer Begriffe wie Expektanz und Zufallswahrscheinlichkeit auf die Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklungen. 11. Analyse der Veränderungen des erdmagnetischen Hauptfeldes aus den Potentialentwicklungen erschlossen. Die Untersuchungen beziehen sich auf die letzten 100 Jahre. Ausführlich werden die Beziehungen der verschiedenen Darstellungen von Multipolen, die in den Entwicklungen auftreten, angegeben. 12. Über den physikalischen Zustand der Materie im Erdinnern und den Ursprung des geomagnetischen Hauptfeldes. Zusammenstellung der geophysikalischen, vorwiegend seismischen Erkenntnisse über das Erdinnere. Hydromagnetische und andere Theorien des erdmagnetischen Hauptfeldes. 13. Geomagnetische Aufschlußverfahren im Dienste der Geologie. Zahlreiche Beispiele lokaler magnetischer Anomalien. Ausführliche Darstellung der von R. Lauterbach entwickelten mikromagnetischen Untersuchungsmethode, bei der eine Richtungsstatistik kleinräumiger Isanomalien zur Erkundung geologischer Fragen benutzt wird. 14. Magnetismus der Erdkruste. Enthält Gesteinsmagnetismus und Paläomagnetismus.

*W. Kertz.*

● **Massey, H. S. W. and R. L. F. Boyd:** *The upper atmosphere.* London: Hutchinson and Co. Publishers Ltd. 1958. XII, 333 p.; 25 plates 63 s. net.

Kein Fachbuch, sondern eine allgemeinverständliche, anschauliche Übersicht mit vielen Bildern. (Nicht mit dem bekannten Buch gleichen Titels von S. K. Mitra zu verwechseln.) Elementare, sehr klare Darstellung der Probleme der Ballon-, Raketen- und Satelliten-Aufstiege. Weiter werden Methoden und wichtigste Ergebnisse für folgende Gebiete gegeben: Lotung mit Schall-Wellen; Lotung mit Radio-Wellen, Ozonosphäre und Ionosphäre, Nachthimmel-Licht, Gezeiten, erdmagnetischer Tagesgang und moderne Dynamo-Theorie (Martyn), Störungen, Meteore, Ultrastrahlung. In bezug auf Aufstiege und deren Ergebnisse durchaus up to date bis zum Erscheinen (Sommer 1958).

*K. Rauer.*

● **Scorer, R. S.:** *Natural aerodynamics.* (Internat. Ser. of Monographs on Aeronautical Sciences and Space Flight. Division 2: Aerodynamics, Vol. 1.) London and New York: Pergamon Press 1958. XI, 312 p.; 22 plates. 60 s. net.

Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die Verf. am Imperial College wiederholt gehalten hat. Ohne umfangreichen mathematischen Aufwand wird bei einer großen Anzahl von Problemen der angewandten Aerodynamik das Wesentliche klar erkannt und dem Leser auf eine anregende Art und Weise vermittelt. Bei den behandelten Fragen stehen solche der Meteorologie im Vordergrund. Hier ist Verf. immer wieder durch eigene Arbeiten hervorgetreten. Die wichtigsten der behandelten Themen sind: Trägheitskräfte, Bewegungen auf der rotierenden Erde, Vorticity, Reibung, Grenzschichten, Totwasser und Turbulenz, Schwerekonvektion, Rauchfahne und Strahl, Luftwellen, Wolken und Niederschlag. — Es handelt sich um eine originelle und in manchen Punkten auch eigenwillige Darstellung, die es ganz auf das Verständnis der von der Natur gestellten Fragen abgesehen hat. Dem Buch ist eine weite Verbreitung zu wünschen.

*J. Zieryp.*